29. 9. 72

S. 804. C.7

S. 804. c. 7.

RECUEIL

DES PIECES

QUI ONT REMPORTÉ LES PRIX

DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,

Depuis leur fondation.

TOME SEPTIEME.

Qui contient une partie des Pieces de 1751, 1752, 1753, 1759, 1760 & 1761.

A PARIS,

Chez PANCKOUCKE, rue & à côté de la Comédie Françoise.

M. DCC. LXIX.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

AVERTISSEMENT,

Au ſujet des Pièces qui compoſent ce Volume & de celles qui ont été réſervées pour le Volume ſuivant.

LE ſixieme Volume de ce Recueil parut en 1752, & il contenoit cinq Pieces : ſçavoir, celles des années 1745 & 1747, ſur la meilleure maniere de trouver l'heure en Mer. Depuis 1748 juſqu'à 1761 incluſivement, il y a 14 années dont nous allons parcourir la ſuite en peu de mots, pour que le Lecteur connoiſſe mieux la liaiſon des Pièces qu'on lui préſente avec celles qui ont déja été publiées.

En 1748 l'Académie adjugea le Prix à la Pièce de M. EULER ſur les Inégalités du mouvement de Saturne & de Jupiter. Elle fut imprimée en 1749, & quelquefois elle ſe trouve reliée à la fin du ſixieme Volume, elle eſt même indiquée dans le titre général ; quoi qu'il en ſoit elle ſe trouve chez Delatour, Libraire, rue ſaint Jacques, vis-à-vis la rue des Mathurins. Cette Pièce étoit deſtinée à commencer le ſeptieme Volume du Recueil ; mais le Privilége ayant paſſé ſucceſſivement entre les mains de pluſieurs Libraires, cette Pièce eſt reſtée avec les précédentes dans le fond de Librairie de M. Delatour.

En 1749 il n'y eut point de Prix d'adjugé, il fut remis à 1751.

En 1750 il fut également remis.

En 1751 le ſujet du Prix étoit la nature & la cauſe des Courans. M. BERNOULLI le remporta, & ſa Pièce eſt la premiere de ce ſeptieme Volume.

En 1752 il s'agiſſoit de déterminer les Inégalités de Saturne & de Jupiter ; la Pièce de M. EULER eſt la ſeconde de ce ſeptieme Volume. Celle du P. BOSCOVICH, qui eut l'*Acceſſit*, & qui avoit été deſtinée à l'impreſſion, ayant été publiée par l'Auteur à Rome en 1756, ne ſera point imprimée dans ce Recueil.

En 1753 on demandoit la maniere la plus avantageuſe de ſuppléer à l'action du vent ſur les grands Vaiſſeaux. La Pièce de M. BERNOULLI, qui remporta le Prix, eſt la troiſieme de ce Volume. Celles de M. EULER & de M. MATHON DE LA COUR, qui furent également deſtinées à l'impreſſion, ne ſont point encore imprimées.

En 1754 le Prix ne fut point adjugé.

Pour 1755 l'Académie avoit proposé la maniere de diminuer le plus qu'il est possible le Roulis & le Tangage d'un navire ; la Pièce de M. CHAUCHOT, qui fut couronnée, fut imprimée à Paris chez Delatour, où elle se vend séparément, elle ne sera point partie de ce Volume.

Pour 1756, le sujet étoit la Théorie des inégalités que les Planetes peuvent causer au mouvement de la Terre ; la Piece de M. EULER obtint le Prix, mais elle ne sera point dans ce Volume.

Pour 1757, l'Académie avoit proposé de nouveau la question du Roulis, & du Tangage des navires, le Prix fut adjugé à M. BERNOULLI ; mais sa Pièce n'est pas encore imprimée.

Pour 1758, il s'agissoit de la nature des Atmosphères des Planetes. La Pièce du P. FRISI, qui obtint le Prix, a été imprimée séparément en Italie, & ne sera point partie de ce Recueil.

Pour 1759, le sujet étoit : l'examen des efforts qu'ont à soutenir toutes les *parties d'un Vaisseau dans le Roulis & dans le Tangage, & la meilleure maniere de procurer à leur assemblage la solidité nécessaire pour résister à ces efforts* ; le Prix fut partagé entre deux Pièces, l'une de M. EULER, l'autre de M. GROIGNARD. La premiere n'est point encore imprimée ; la seconde, qui fut imprimée dès lors, pour l'utilité des Constructeurs, est la quatrieme Pièce de ce Volume.

Pour 1760, l'Académie proposa d'examiner *S'il y avoit de l'altération dans le moyen mouvement des Planètes*, la Pièce de M. Charles EULER, qui eut le Prix, & celle du P. FRISI, qui eut l'*Accessit*, ne sont point encore imprimées.

La même année un Citoyen zélé ayant proposé un Prix extraordinaire sur la perfection des Verreries, l'Académie l'adjugea à une Pièce de M. d'ANTIC ; elle fut imprimée la même année, c'est la cinquieme de ce Volume.

Pour 1761, l'on proposa pour sujet, *la meilleure maniere de lester & d'arrimer un Vaisseau*. Le prix fut partagé entre les deux Pièces de M. Jean-Albert EULER & de M. l'Abbé BOSSUT ; elles forment la sixieme & la septieme de ce Volume.

On voit par le détail précédent que sept Pièces détachées qui ont été imprimées en divers temps, se sont trouvées suffisantes pour former un septieme Volume de ce Recueil. Dans ces circonstances on a mieux aimé le publier dès-à-présent pour satisfaire le desir des Savans, que d'attendre l'impression d'un huitieme Volume, qui eût été nécessaire pour pouvoir observer l'ordre chronologique dans l'arrangement de ces Mémoires.

SUR LA NATURE
ET LA CAUSE
DES COURANS,

ET LA MEILLEURE MANIÉRE DE LES DÉTERMINER.

Pièce qui a remporté le Prix double, proposé par l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, pour les années 1749 & 1751.

PAR M. DANIEL BERNOULLY, *Associé étranger de l'*ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, *Membre des Académies de Pétersbourg & de Boulogne, &c. Professeur d'Anatomie & de Botanique à Basle.*

MÉMOIRE

SUR

LA NATURE

ET LA CAUSE DES COURANS,

ET LA MEILLEURE MANIERE DE LES OBSERVER

ET DE LES DÉTERMINER.

agit tranquilla poteſtas
Quod violenta nequit.

PREMIÉRE PARTIE.

Sur la nature & la cauſe des courans.

I.

LA queſtion que l'Académie Royale des Sciences avoit propoſée pour le Prix de l'année 1749 me parut d'abord d'une nature à n'admettre que des ſolutions ou

trop faciles à voir pour de certains cas particuliers, ou trop imparfaites hors de ces cas. Il s'agiſſoit de la meilleure manière d'obſerver & de déterminer les courans ſur mer, queſtion extrêmement importante pour la navigation. Il peut arriver que cette queſtion n'ait pas plus de difficulté que celle de déterminer le mouvement des eaux ſur une grande rivière navigable : mais hors de ces cas, ou d'autres ſemblables, on tombe facilement dans le préjugé, qu'il n'eſt pas plus poſſible de ſatisfaire au problème, que s'il s'agiſſoit d'obſerver le ſillage du vaiſſeau à fond de cale, ſans avoir la moindre communication avec rien qui environne le vaiſſeau, ou d'obſerver le mouvement de la terre par des obſervations purement méchaniques, faites ſur des objets terreſtres. L'Académie m'a tiré de ce préjugé par l'addition qu'elle a faite à ſon problème ; ſes vûes ſont toujours tournées du côté de la manière d'obſerver les courans ; mais elle demande encore une théorie bien fondée ſur la nature & la cauſe des courans. Comme cette ſeconde queſtion, purement théorique, n'eſt pas de la nature de celles que l'Académie a coutume de propoſer pour le ſecond Prix, il m'eſt venu l'idée que cette illuſtre ſociété, à la pénétration de laquelle rien ne ſçauroit échapper, ne demandoit cette théorie que comme un moyen pour parvenir à la ſolution de ſa première queſtion principale : j'ai vû auſſitôt qu'il falloit s'appliquer à déterminer les courans par eux mêmes, & que le plus ſouvent il ne reſtoit aucun autre moyen de le faire. J'ai donc examiné avec le plus grand ſoin, dont je ſuis encore capable, quelles pourroient être les cauſes des courans, quelle ſorte de mouvement en devroient prendre les eaux, quelles pourroient être les inégalités de ce mouvement par rapport aux différentes profondeurs des eaux, & enfin de quelle manière on pourroit mettre à profit ces inégalités pour en déterminer le mouvement qui ſe fait vers la ſurface de la mer. C'eſt là le plan de mes recherches

ſur lequel je ſuis bien sûr de n'avoir aucun ſuffrage contre moi.

II.

On diſtingue ordinairement les marées d'avec les courans, & c'eſt avec raiſon ; on connoît parfaitement la cauſe des marées, mais on ne convient pas également ſur celle des courans. Il y a même des ſçavans du premier ordre, dont je reſpecte infiniment l'autorité & la pénétration, qui ne donnent qu'une ſeule & même cauſe aux marées & aux courans, en regardant ceux-ci ſimplement comme une ſuite des marées. J'examinerai ce ſentiment dans ſa place, cette diſtinction ne convient pas avec notre ſujet ; & nous ferons mieux d'entendre par *courant* tout mouvement horiſontal & progreſſif des eaux de la mer, quelles que ſoient les variations de ce mouvement, ainſi nous n'excluons que le mouvement ondoyant des vagues.

III.

Il y a différentes eſpèces de courans, & chaque eſpèce paroît provenir d'une cauſe différente. L'expérience nous a appris qu'il y a des courans qui ſont à-peu-près toujours les mêmes, qu'il y en a d'autres qui changent de force & de direction de ſix en ſix mois & qui reprennent leur état au bout de chaque année, que d'autres ſe règlent ſur le mouvement de la lune, & enfin, qu'il y en a de tout-à-fait irréguliers. On voit auſſi qu'il peut arriver que deux ou pluſieurs de ces différentes eſpèces de courans concourent & ne forment en apparence qu'un ſeul & même courant, que j'appellerai *mixte* : enfin la théorie, que je me ſuis formée ſur les courans, m'a conduit elle-même à une diviſion d'une toute autre nature & très-eſſentielle, c'eſt celle de *courans ſimples & courans doubles* : j'appelle courant ſimple celui dont tou-

tes les eaux, depuis la ſurface juſqu'au fond, ſont portées vers la même plage ; & courant double, quand les eaux ont un mouvement oppoſé ou preſque tel vers la ſurface & vers le fond. Après avoir vû par ma théorie la néceſſité des courans doubles dans pluſieurs cas, & ramaſſant enſuite toutes les obſervations que je trouvois dans les auteurs ſur cette matière, j'en ai trouvé un exemple dans *le Voyage autour du monde de Dampier*, auteur digne de foi, quoique beaucoup critiqué ſur d'autres matières ; nous devons cette obſervation à un haſard, j'eſpère qu'elles deviendront beaucoup moins rares à l'avenir. Je commencerai ces recherches par les courans conſtans.

IV.

Il me paroît naturel de dire que les courans, qui demeurent conſtamment les mêmes, ne peuvent être cauſés ni par la lune, ni par le ſoleil, car les grands changemens en déclinaiſon de ces deux aſtres ne manqueroient pas d'y produire des changemens ſenſibles dans leur direction & dans leur force, outre que cet effet des deux aſtres ne ſçauroit être expliqué, à mon avis, par les loix de la méchanique, comme je tâcherai de démontrer ci-deſſous : toute la théorie des marées confirme cette remarque. Si nous renonçons donc à l'une & l'autre de ces deux cauſes, il ne nous reſte abſolument d'autre reſſource, que le mouvement journalier de la terre, puiſque ſans l'action du ſoleil, ſans celle de la lune & ſans le mouvement diurne de la terre, il eſt évident que les eaux de la mer demeureroient dans un entier équilibre & dans un repos parfait ; c'eſt apparemment cette raiſon qui a engagé pluſieurs Auteurs avant moi à attribuer les courans conſtans au mouvement journalier de la terre ; mais je ne ſçache perſonne qui en ait bien montré le méchaniſme : je tâcherai donc de l'expliquer le plus clairement qu'il me ſera poſſible.

V.

Conſidérons la terre comme un grand noyau ſolide & ſphérique tout couvert d'eau à la hauteur de quelques centaines de toiſes, qui tourne autour de ſon axe en vingt-quatre heures de tems : on ſçait que quand même l'eau n'auroit d'abord aucun mouvement, elle ſeroit peu à peu entraînée par le noyau tournant juſqu'à ce que tout le ſyſtême parvienne à ſon état de permanence. Mais c'eſt une queſtion, ſi dans cet état de permanence toutes les couches d'eau feront leur révolution parfaitement dans le même tems que le noyau ſolide ? Je dis que cela arriveroit, ſi tout notre ſyſtême étoit dans un vuide parfait ; l'adhérence des fluides, quelque petite qu'elle ſoit, doit néceſſairement produire cet effet, & toutes les expériences phyſiques le confirment. Ainſi nous ne voyons encore rien qui puiſſe occaſionner aucun courant.

V I.

Examinons donc à préſent l'effet de l'atmoſphère qui environne la ſurface des eaux. Il eſt encore certain, par la raiſon que je viens d'alléguer, quelqu'étendue qu'on donne à l'atmoſphère, & quelque diminution qu'on ſuppoſe dans ſes denſités, que toute ſa maſſe doit parfaitement ſuivre le tournoyement du noyau de la terre, après que tout le ſyſtême aura atteint ſon état de permanence, pourvû qu'on ſuppoſe que l'atmophère ne ſoit enveloppée par aucune autre matière, & que toute ſa matière ne reçoive abſolument aucune autre impreſſion. Mais une telle condition eſt ſans doute abſurde, de quelque façon qu'on l'enviſage, & il faudra nous tranſporter au-delà des limites de notre atmoſphère. Nous dirons donc que l'atmoſphère de la terre eſt d'une étendue infinie ou bornée ; au premier cas, qui d'ailleurs n'eſt pas ſoutenable, il eſt viſible que la matière de l'atmoſphère, à une certaine diſtance de la terre, ſera plus maîtriſée par le ſoleil, de

ſorte qu'elle ne pourra plus ſuivre librement le mouvement diurne de la terre, & cette concluſion ſuffit pour notre deſſein ; auſſi n'y aura-t-il perſonne qui croie qu'une telle atmoſphère d'une étendue comme infinie pût tourner toute entière en vingt-quatre heures de tems autour de l'axe de la terre. Mais ſi cette atmoſphère eſt bornée, perſonne ne croira non plus qu'il puiſſe règner un vuide parfait autour de cette atmoſphère, & la matière qui lui eſt contigue en retardera le mouvement ; ce retardement ſe communiquera de couche en couche depuis les limites juſqu'à la ſurface de la terre. Il paroît que c'eſt dans ce retardement de la matière qui environne les eaux de la terre que conſiſte le vent aliſé d'orient en occident ; du moins cette façon de l'expliquer eſt entièrement conforme aux loix de méchanique, & aux expériences phyſiques faites ſur des fluides, qu'on fait tourner en rond par le moyen d'un cylindre vertical, placé au milieu des fluides, & qu'on tourne autour de ſon axe : Les fluides perdent ſenſiblement de leur viteſſe angulaire depuis le cylindre vers les bords du vaſe qui les renferme, où les fluides ſentent le même empêchement, que l'atmoſphère ſouffre par la matière qui l'environne ; mais ſi l'air eſt empêché ou retardé dans ſa rotation journalière, il faut que les eaux de la mer le ſoient auſſi, & dans le même ſens. C'eſt-là la cauſe du courant conſtant entièrement indépendant du ſoleil & de la lune ; ſuivant cette explication, le courant en queſtion doit ſe faire d'orient en occident, & il obſerve effectivement cette direction.

VII.

On auroit tort de regarder cette explication comme un de ces raiſonnemens vagues aſſez ordinaires aux phyſiciens, qu'un eſprit de préciſion voit être faux, & qu'il ne ſçauroit refuter parce qu'ils ſont trop vagues. M. d'Alembert, ce grand & illuſtre Géomètre, refute à la vérité expreſſément ce ſentiment dans ſa diſſertation ſur

les

vents, qui a remporté le prix de l'Académie de Berlin de 1746 ; mais il n'a pas fait attention que l'atmoſphère ne ſçauroit ſuivre avec une liberté entière le mouvement journalier de la terre dans ſes limites. Il n'y a donc entre nous qu'une diverſité d'hypothèſe phyſique. Au reſte, il s'en faut de beaucoup que nous connoiſſions aſſez la nature de l'adhérence des fluides, pour pouvoir déterminer géométriquement tous les effets qu'elle doit produire. Concevons un vaſe cylindrique vertical d'une grande hauteur, rempli d'un fluide, & au milieu de ce vaſe un cylindre ſolide, qui tourne uniformément autour de ſon axe ; le fluide ſera ſans doute peu à peu entrainé par le cylindre, & bientôt il aura atteint ſon mouvement uniforme. Dans cet état, le fluide qui touche immédiatement le cylindre tourne avec la même viteſſe que la ſurface du cylindre, pendant que le fluide, qui touche immédiatement les bords du vaſe, demeure dans un entier repos : voilà comment les eaux, au fond de la mer, ſuivent parfaitement le noyau ſolide, & y demeurent dans un entier repos relatif ; voilà auſſi comment l'air, qui touche immédiatement la ſurface de la mer, ſuit parfaitement le mouvement de celle-ci ; & enfin, comment on doit ſuppoſer que l'air perd tout ſon mouvement là où il touche immédiatement la matière, qui n'appartient plus au ſyſtême de la terre. On me dira, que j'euſſe mieux fait de conſidérer une ſphère tournante à la place d'un cylindre ; on voit cependant que les premières conſéquences que je viens de marquer ſont les mêmes pour la ſphère & pour le cylindre : & quand aux autres queſtions, que nous allons examiner, je ne les crois plus ſuſceptibles d'aucune ſolution géométrique pour la ſphère ; je n'ai donc voulu conſidérer qu'un cylindre & examiner le mouvement de tout le fluide compris entre le cylindre & les bords du vaſe ; M. Newton a déjà examiné cette queſtion dans *ſes princ. math. phil. Nat. au liv.* 2. *ſect.* 9 *prop.* 51. & j'y renverrois ſimple-

ment le lecteur, ſi je n'y avois remarqué une faute eſſentielle. Un ſi grand homme n'en ſçauroit faire qui ne ſoit remarquée tôt ou tard. Voici la propoſition dont il s'agit.

VIII.

Problème. Si un cylindre ſolide d'une hauteur infinie eſt tourné uniformément autour de ſon axe vertical dans un fluide, & que tout le mouvement ſoit réduit à ſon état permanent, trouver le mouvement de tout le fluide qui environne le cylindre.

Solution. Concevons une ſection horiſontale de tout le ſyſtême; ſoit ALF, celle du cylindre, dont le centre eſt en S; qu'on tire enſuite la droite SQ, depuis le centre juſqu'au bord du vaſe, & qu'on prenne dans cette droite horiſontale trois élémens égaux gh, hl & lm, qui marquent les épaiſſeurs des couches fluides concentriques : nous conſidérons chacune de ces couches élémentaires comme ſolide; en vertu de cette ſuppoſition chaque point d'une ſeule & même couche doit faire ſa révolution dans un tems parfaitement égal. Pour voir que cette ſuppoſition eſt permiſe ici, il n'y a qu'à conſidérer les fluides comme un aſſemblage de particules ſolides extrêmement petites; mais cette conſidération même demande qu'on ſuppoſe les élémens gh, hl & lm conſtans, parce que le même fluide doit être ſuppoſé formé par des petites parties égales. Il eſt eſſentiel de faire cette remarque, parce que dans toute la ſolution analytique, il ne paroîtra aucun veſtige où il ſoit fait mention de cette conſtante. On pourroit donc croire facilement que, dans l'application de notre ſolution, il eſt permis de choiſir telle conſtante qu'on voudroit; cependant cela n'eſt pas, & chaque autre conſtante donneroit une autre ſolution finale. Je ſuis ſurpris que M. Newton, qui prend le même élément pour conſtant, n'ait pas fait la même remarque.

Là-deſſus j'obſerve 1°. que l'action étant toujours

égale à la réaction, l'adhérence mutuelle de deux couches contigues, de quelque nature qu'elle ſoit, exerce une force égale pour retarder la couche intérieure & pour accélérer la couche extérieure. 2°. Qu'une ſeule & même couche, telle que $h\,l$, ſoutient deux forces contraires, une intérieure en h qui tend à l'accélérer, & une extérieure en l qui tend à la retarder. 3°. Qu'à cauſe de l'état permanent ces deux forces doivent s'entre-détruire parfaitement. Tout cela juſqu'ici eſt parfaitement conforme aux remarques préliminaires de M. Newton : mais il a manqué, qu'on me permette de franchir le terme, dans l'application de la troiſième remarque : pour y ſatisfaire, il fait la force en h égale à la force contraire en l : voici ſes paroles : *Proinde ut orbis unuſquiſque in motu ſuo uniformiter perſeveret, debent impreſſiones* (il entend par ce terme les forces de l'adhérence) *ex parte utraque ſibi invicem æquari & fieri in regiones contrarias* : pendant qu'il devoit dire, *debent* MOMENTA *impreſſionum ex parte utraque ſibi invicem æquari*. La correction eſt trop claire pour y inſiſter.

Soit à préſent $S\,h=x$; $h\,l=d\,x$; la force de l'adhérence en $h=\varphi$ & en $l=\varphi+d\,\varphi$; il faut que le produit de φ par x ſoit égal au produit de $\varphi+d\,\varphi$ par $x+d\,x$, ce qui donne $\varphi\,x$ égale à une conſtante, au lieu qu'en négligeant la conſidération de l'inégalité des léviers $S\,h$ & $S\,l$ on parvient à la fauſſe équation $\varphi=$ conſt. Suppoſant enſuite une relation donnée entre φ & les vîteſſes relatives élémentaires, cette relation donnera une équation entre les diſtances x & les vîteſſes du fluide qui y répondent. *C.Q.F.J.*

IX.

Coroll. 1. S'il y avoit une ſeule couche qui pût tourner avec une liberté entière dans ſa couche voiſine, il faudroit faire $\varphi\,x=o$ ou $\varphi=o$; cela demande que tout le ſyſtême du cylindre & du fluide juſqu'à la couche en queſtion tourne comme un même corps ſolide, chaque

point faiſant ſa révolution en temps égal, pendant que le reſte de la maſſe fluide, au-delà de ladite couche, demeure dans un repos parfait.

X.

Coroll. 2. Si l'adhéſion ϕ ne dépendoit aucunement de la vîteſſe, il arriveroit toujours ce que je viens de dire; c'eſt à dire, que là, où le *momentum* de l'adhérence ſeroit le plus petit, ſe termineroit la révolution, que toutes les couches au delà demeureroient en repos, & toutes les autres en deçà feroient leur révolution en même tems que le cylindre qu'on tourne; cette remarque nous apprend ce qui arriveroit dans une ſuite de tuyaux ajuſtés & emboités l'un dans l'autre, dont on affermiroit l'extérieur pendant qu'on tourneroit l'intérieur ſur ſon axe; car comme on ſuppoſe ordinairement que le frottement des corps ſolides ne dépend point de leur vîteſſe relatives, il n'arrivera pas toujours que tous les tuyaux ſoient entraînés; quelques-uns des extérieurs pourront demeurer immobiles, & tous ceux qui ſeront mis en mouvement demeureront comme collés enſemble; on voit auſſi par la plus ſimple méchanique, que le dernier tuyau qui tourne ſera toujours celui qui, avec ſon voiſin, forme, non le moindre frottement, comme il s'enſuivroit de la ſolution de M. Newton, mais le moindre *momentum* de frottement.

XI.

Corrol. 3. Si au contraire on remplit un vaſe cylindrique d'un fluide, & ſi on y tourne ſur ſon axe un cylindre ſolide, l'expérience nous apprend que tout le fluide ſe tourne en rond, & que les vîteſſes angulaires du fluide diminuent depuis la ſurface du cylindre, vers les bords du vaſe; c'eſt là une preuve que l'adhérence des fluides eſt d'une nature tout-à-fait différente de celle du frottement des corps ſolides, & qu'elle dépend du petit

élément de vîteſſe relative, avec laquelle chaque couche eſt mûe ſur ſa voiſine. M. Newton ſuppoſe l'intenſité de l'adhérence proportionnelle à ladite vîteſſe relative élémentaire, & cette hypothèſe phyſique, de laquelle dépend la ſolution entière de notre queſtion, me paroît auſſi la plus vraiſemblable : Il ſemble effectivement que les parties d'un fluide, qui ſont obligées de ſe ſéparer, doivent être enviſagées comme attachées enſemble par des fils infiniment ſubtils qu'on déchire, & qu'ainſi l'intenſité de l'adhérence doit être cenſée proportionnelle au nombre des fils qui ſe déchirent dans un temps égal, & par conſéquent proportionnelle à la vîteſſe relative. Il paroît même que c'eſt une loi générale de la nature, que toutes les variations cauſées par des cauſes infiniment petites ſont proportionnelles à ces cauſes. La courbure des lames à reſſort, par exemple, dépend abſolument du même principe : chaque élément y fait, avec ſon voiſin, un angle infiniment petit, qu'on ſuppoſe proportionnel au *momentum* de la force qui plie & courbe la lame. Je ne me fais donc point de peine d'employer la même hypothèſe. Dans les corps ſolides, il faudroit encore faire attention à l'appreſſion de chaque couche contre ſa voiſine, laquelle rend le frottement plus ou moins grand, ſelon que cette appreſſion eſt plus ou moins grande ; mais les expériences qu'on a faites ſur l'adhérence des fluides, de même que l'idée que nous avons donnée de cette adhérence, prouvent également que la compreſſion du fluide ne ſçauroit faire varier l'intenſité de l'adhérence.

XII.

Pour appliquer notre ſolution générale & purement géométrique du §. 8. à notre ſujet principal, nous conſidérerons près de l'équateur deux plans parallèles à l'équateur proches l'un de l'autre, qui coupent la terre, & nous ferons abſtraction de l'adhérence des eaux contre

les deux plans ; ſoit la ſection du noyau ſolide de la terre, renfermée par le cercle AFL, & que AQ repréſente la hauteur verticale des eaux de la mer ; ſoit le rayon $A = r$; $AQ = a$; $Sg = x$; $gh = hl = lm = dx$; la viteſſe abſolue au point $A = C$; la vîteſſe abſolue des eaux à la ſurface de la mer $= c$: Examinons à préſent comment il faudra exprimer l'adhérence ϕ entre les deux orbes gh & h', leſquels étant élémentaires peuvent être conſidérés comme ſolides. Or il eſt clair que l'adhérence entière entre deux orbes eſt d'abord d'autant plus grande, que le rayon des orbes eſt plus grand, parce que le nombre des particules adhérentes ſuit la proportion des rayons : mais outre cela cette adhérence eſt en vertu du §. 11. proportionnelle à la vîteſſe relative de la ſurface extérieure de l'orbe gh & de la ſurface intérieure de l'orbe hl ; il faudra donc exprimer cette petite viteſſe relative ; ſoit la vîteſſe abſolue de la ſurface intérieure de l'orbe $gh = v$, il faudra donc nommer $v + dv$ la vîteſſe abſolue de la ſurface intérieure de l'orbe ſuivant hl, pendant que la vîteſſe abſolue de la ſurface extérieure de l'orbe $gh = v + \frac{dx}{x} \times v$ à cauſe de la ſolidité ſuppoſée pour chaque orbe élémentaire : ainſi la petite viteſſe relative eſt $= v + \frac{dx}{x} \times v - v - dv = \frac{vdx - xdv}{x}$; ainſi l'adhérence ϕ eſt en raiſon compoſée du rayon x & de la petite vîteſſe relative $\frac{vdx - xdv}{x}$ & par conſéquent proportionnelle à la quantité $vdx - xdv$; or la quantité ϕx eſt $=$ conſt. (§. 8.) Il faut donc que $(vdx - xdv)\, x$ ſoit $=$ conſt. Il paroît d'abord ici qu'il eſt encore permis de choiſir tel élément qu'on veut pour conſtant, puiſque dans toute notre analyſe nous ne nous ſommes ſervis d'aucun élément conſtant ; cependant tout autre élément que celui de dx donneroit une fauſſe ſolution ; c'eſt pourquoi j'ai cru néceſſaire d'expliquer préalablement ce paradoxe vers le milieu du §. 8. Nous aurons donc cette équation,

$$(vdx - xdv) \times x = fdx$$

& nous verrons dans la ſuite ce qu'il faudra entendre

par le coëfficient conſtant f : Diviſant cette équation par x^3, on aura $\frac{vdx-xdv}{xx} = \frac{fdx}{x^3}$, dont l'intégrale avec l'addition de la conſtante convenable eſt

$$-\frac{v}{x} + \frac{c}{r} = \frac{f}{2rr} - \frac{f}{2xx}.$$

Cette équation marque, que la différence des vîteſſes angulaires ſuit la proportion de la quantité $\frac{1}{rr} - \frac{1}{xx}$. La quantité f ſe détermine par la condition, qu'en faiſant $x = SQ = r+a$, la vîteſſe v devient $= c$.

XIII.

Coroll. 1. Si on ſuppoſe $f=0$, la vîteſſe angulaire devient par-tout la même, & cela arrive en ſuppoſant $\frac{c}{r+a} = \frac{C}{r}$. En effet, ſi on détermine par notre précédent article la valeur de f pour le cas de $\frac{c}{r+a} = \frac{C}{r}$, on obtient $f=0$; auſſi la vérité de ce corollaire eſt-elle manifeſte par elle-même.

XIV.

Coroll. 2. Si on ſuppoſe $f = 2rC$, on obtient $v = \frac{r}{x}C$; cela arrive en ſuppoſant $c = \frac{r}{r+a}C$; on aura donc en ce cas les vîteſſes abſolues réciproquement proportionnelles aux diſtances du fluide à l'axe du cylindre. On voit en général qu'on ne ſçauroit déterminer les vîteſſes abſolues, ſans que cette vîteſſe ſoit connue pour deux points tels que A & Q.

XV.

Corol. 3. Comme le rayon du noyau ſolide de la terre repréſenté par SA peut être cenſé incomparablement plus grand que la profondeur de la mer, repréſentée par AQ, nous pourrons ſuppoſer $x = r+Z$, & conſidérer Z comme incomparablement plus petit que r. En ce cas la différence des vîteſſes angulaires devient $\frac{3Z}{r}$, & par conſéquent proportionnelle à l'élévation des eaux par-deſſus le fond de la mer. Comme les courans ne ſe font ſentir que par la différence des vîteſſes angulaires,

c'eſt à cette différence qu'il convient de faire attention. Cependant pour peu que les courans ſoient ſenſibles, la différence des viteſſes angulaires ne diffère pas ſenſiblement des viteſſes abſolues : Voici un exemple qui le confirme. La différence des viteſſes abſolues pour les points A & Q eſt $C-c$, & la différence des viteſſes angulaires pour les mêmes points eſt $C-\frac{r}{r+a}\times c$. Soit donc $C=1435$; $c=1434$; $r=19616000$; $a=1000$; ces poſitions conviennent avec un courant qui fait un pied par ſeconde dans une mer qui auroit mille pieds de profondeur ; en ce cas les deux dites différences ſont à peu-près comme 13 à 14 & par conſéquent preſque égales.

XVI.

Scholie. Si au lieu de faire ϕx = conſt. nous ſuppoſions ϕ = conſt. comme M. Newton a fait, nous aurions cette équation

$$v\,dx-x\,dv=f\,dx,$$

laquelle donneroit après ſon intégration

$$-\frac{v}{x}+\frac{c}{r}=\frac{f}{r}-\frac{f}{x}$$

& cette équation eſt conforme à tout ce que M. Newton dit ſur cette matière. Il eſt même à remarquer, que les deux ſolutions ne diffèrent pas entre elles, tant qu'on conſidére la profondeur de la mer comme incomparablement plus petite que le rayon de la terre ſolide, puiſque la différence des viteſſes angulaires devient encore en ce cas proportionnelle à A, c'eſt-à-dire, à l'élévation des eaux par-deſſus le noyau ſolide. Au reſte, s'il s'agiſſoit ici de déterminer encore la nature du vent aliſé oriental, qui dépend tout-à-fait de la même cauſe, il faudroit dans l'eſtime de l'adhérence ϕ avoir égard aux diminutions des densités de l'air, qui font diminuer dans une certaine raiſon le nombre des particules adhérentes, après quoi le calcul ſe fera de la même façon que ci-deſſous ; je me contenterai d'avoir indiqué cette précaution.

XVII.

XVII.

Voilà donc quelle eſt la cauſe & la nature de ce courant général & conſtant d'orient en occident, que tous les Navigateurs reconnoiſſent, ſur-tout dans la zone torride ; & quoique nous ayons fondé nos concluſions ſur l'action d'un cylindre tournant dans un fluide, il eſt viſible qu'une portion de ſphère telle qu'eſt la zone torride par rapport à la terre, ne ſçauroit manquer de faire à peu-près le même effet : mais quand nous conſidérerions la mer depuis l'équateur juſqu'aux poles, nous pourrions toujours tirer de notre théorie cette conſéquence, qu'il doit ſe former un courant d'orient en occident ; que la vîteſſe de ce courant commence au fond de la mer ; qu'elle augmente en progreſſion arithmétique depuis le fond de la mer juſqu'à la ſurface, & que c'eſt dans la ſurface que le courant doit être plus rapide : cependant tout cela ſuppoſe encore toute la terre inondée à la même hauteur.

XVIII.

On voit bien à préſent que cette cauſe générale & permanente, que nous avons expliquée, peut être diverſifiée d'une infinité de manières par l'irrégularité de la terre ſolide. Ici les calculs ne trouvent ſans doute plus lieu ; mais je fais ſouvent plus de cas de l'eſtime naturelle d'un homme verſé dans la méchanique & dans l'hydrodynamique, que des plus ſublimes calculs, toujours fondés ſur des hypothèſes, qui ne ſont jamais exactement vraies, qu'on perd de vûe auſſitôt pour ſe jetter tout entier dans l'analyſe ſans aucun examen ultérieur de la violence qu'on leur fait, de ſorte qu'on tombe à la fin dans des réſultats tout-à-fait ridicules, pendant qu'une bonne eſtime nous approche toujours du vrai : Mais pour former une telle eſtime, il faut avoir toujours devant les yeux la cauſe & la nature des courans ſuivant la théorie

que nous avons expoſée, & tous les obſtacles qui s'y oppoſent juſqu'à une très-grande étendue; il faut ſur tout joindre à la théorie une connoiſſance de toutes les expériences phyſiques qu'on a faites ſur de pareilles matières. On voit en général, ſans autre examen, que les eaux changeront de direction lorſqu'elles trouvent de côté des paſſages plus libres & plus ouverts; que leur vîteſſe augmentera lorſqu'elles enfilent des paſſages qui vont en ſe rétreciſſant, comme il arrive, par exemple, au détroit de Magellan; c'eſt par la même raiſon que le flux & reflux, qui ſont inſenſibles dans la pleine mer méditerranée, deviennent très-ſenſibles au Golfe de Veniſe: On voit auſſi que les eaux pourront couler vers un même endroit, par des chemins oppoſés, & diminuer par-là ou détruire le courant; le courant contraire pourra même emporter le courant naturel, de ſorte que les eaux ſoient portées d'occident en orient.

XIX.

Ce n'eſt pas ſeulement la conformation des terres qu'on voit élevées au-deſſus de la mer qui dirige & change les courans; celle du fond de la mer ne ſçauroit manquer de faire ſouvent le même effet. M. de Buffon a fait la même remarque dans ſon excellente Hiſtoire naturelle, art. 13 des courans. La ſagacité de cet illuſtre ſçavant, ne me permet pas d'apporter d'autres preuves ou éclairciſſemens ſur cet effet des chaînes de montagnes & des vallées, qui forment le fond de la mer. Je ne m'arrêterai qu'à une ſeule remarque eſſentielle par l'uſage que j'en ferai pour obſerver & meſurer les courans ſur mer. C'eſt que les chaînes de montagnes, dont la direction eſt preſque perpendiculaire à celle du courant, doivent ſans doute arrêter preſque entièrement toutes les eaux qui ſont dans les vallées. Les chaînes pourront être éloignées de 10, 20, 30 dégrés ou davantage, & faire encore le même effet. Pour vérifier entièrement cette

remarque, nous aurons encore recours à notre expérience du cylindre ſolide tourné uniformément dans un vaſe cylindrique rempli de fluide ; il eſt bien clair que ſi ce cylindre étoit garni de pluſieurs aîles parallèles à ſon axe, ces aîles feroient le même effet qu'un cylindre ſolide, qui s'étendît juſqu'au bout des aîles ; il ſera facile de confirmer cet effet par des experiences : quand il n'y auroit même qu'une ſeule aîle, l'expérience ne laiſſeroit pas d'être preſque la même. Si donc le rayon du cylindre tourné eſt $=b$, la largeur des aîles $=c$, la diſtance depuis la ſurface du cylindre juſqu'aux bords du vaſe $=e$, il convient de ſuppoſer un cylindre dont le rayon ſoit $=b+c$, & de cenſer le fluide réduit à la largeur $e-c$; ce n'eſt qu'après ces changemens que l'on pourra faire une juſte application de toute la théorie que nous avons expoſée depuis le §. 8. juſqu'au §. 16.

X X.

Ce que nous venons de dire nous fait voir que les courans s'étendront rarement juſqu'au fond de la mer ; à mon avis cela ne pourra arriver que dans les mers peu profondes ; on pourra ſe trouver à pic d'une grande vallée ; les eaux y pourront avoir plus de mille toiſes de profondeur, il pourra y avoir un courant conſidérable vers la ſurface de la mer ; mais je ſuis bien éloigné de croire pour cela, que ce courant s'étende juſqu'au fond de la mer ; cela ſuppoſeroit le fond de la mer tout-à-fait uni & ſphérique ; il y a plutôt toutes les apparences qu'il n'y aura plus aucun courant ſenſible au-delà de 50, 60, ou tout au plus de cent toiſes de profondeur. Les rapports des plongeurs, & pluſieurs autres obſervations, me confirment entièrement dans cette opinion. C'eſt par cette raiſon que je diſtinguerai dans la ſuite *le fond de la mer* d'avec le *fond du courant* en entendant par ce dernier terme la région horiſontale où les courans commencent à ſe former, & au-deſſous de

laquelle les eaux ſont comme tout-à-fait calmes & ſans aucun mouvement commun avec celui du courant ; je ne prétends pourtant pas que les courans finiſſent bruſquement & perdent tout d'un coup tout ce qu'ils avoient encore de mouvement un peu au-deſſus ; les eaux pourront conſerver un petit reſte de mouvement bien plus bas, mais je ſuis perſuadé qu'il ſera toujours au deſſous de ces limites comme inſenſible par rapport au mouvement des eaux près la ſurface de la mer. Ces réflexions nous conduiſent à l'examen d'un tout autre obſtacle.

XXI.

Suppoſons maintenant une grande digue tout le long d'un méridien d'un pole à l'autre, puiſque les terres de toute l'Amérique forment preſque une telle digue ; il eſt queſtion d'examiner l'effet que ſera une telle digue ſur le courant général qui ſe fait d'orient en occident. Les eaux ne ſçauroient en ce cas faire tout le tour de la terre ; il faut cependant pour chaque endroit de la mer qu'il y arrive autant d'eau qu'il en part. Dira-t-on donc que ladite digue détruira entièrement le courant général ? On annéantiroit par-là l'effet de l'adhérence de l'air contre les eaux de la ſurface de la mer ; cette adhérence, ſi bien avérée par toutes les expériences, fait que chaque goutte d'eau à la ſurface de la mer doit être conſidérée comme animée par une petite force tangentielle d'orient en occident.

Après ces réflexions on eſt porté à croire que l'effet de ladite adhérence conſiſtera ſimplement à élever les eaux du côté oriental de la digue, & à les baiſſer du côté occidental, de manière que chaque parallèle prenne la figure d'un tour de ſpirale, & que les eaux demeurent entièment en repos ſous cette figure de la ſurface de la mer. Je crois bien que ce ſera là une partie de l'effet, mais non pas l'effet tout entier ; car les eaux, diſpoſées de cette façon, ne ſçauroient abſolument point tenir l'équi-

libre, puiſque l'adhérence qui agit de la manière que nous avons indiquée ne change en rien l'action de la peſanteur. Voici donc enfin comment je crois qu'on peut ſe débarraſſer de toutes ces difficultés & de toutes ces contradictions apparentes ; c'eſt de dire que vers la ſurface les eaux couleront continuellement depuis le côté occidental de la digue juſqu'à l'autre côté oppoſé, en faiſant tout le tour de la terre ; que les eaux s'éleveront inſenſiblement dans leur route, qu'elles ſeront les plus hautes près du côté oriental de la digue, & qu'enfin cet excès continuel de hauteur eſt employé à former au-deſſous dudit courant oriental un autre courant contraire en tout au premier. J'appellerai dans la ſuite ce ſecond courant, oppoſé à celui qui ſe fait au-deſſus, *contrecourant*.

XXII.

Voilà une circulation des eaux de la mer, à laquelle je ne ſçache pas que perſonne ait encore penſé ; elle paroîtra peut-être d'abord contraire aux loix de méchanique, & ſuppoſer un certain faux principe de mouvement perpétuel: cette idée me parut d'abord à moi-même trop hardie ; mais après y avoir murement réfléchi, j'en ai été entièrement convaincu. Je m'aviſai donc, pour m'éclaircir ſur cette conjecture, de faire l'expérience qui ſuit.

Expérience. Si on remplit d'eau un petit vaſe formé en parallèlepipéde long de 10 à 12 pouces, large & haut d'environ deux pouces ; ſi enſuite on y jette de petits brins de papier mâché, ou d'autres petits corps qui aillent légérement à fond, & qu'enfin on ſouffle pardeſſus la ſurface de l'eau d'un bout du vaſe à l'autre, on verra tous les petits corps, qui ſont au fond du vaſe, ſe mouvoir vers l'endroit d'où part le ſouffle, pendant que tout ce qui nage ſur l'eau s'en éloigne.

Cette expérience ſuffit ſeule pour éclaircir & pour prouver notre nouvelle théorie ſur les courans & les con-

trecourans. Nous aurons cependant occaſion de nous étendre ſur cette matière, & de la mettre dans tout ſon jour.

XXIII.

On voit bien que les terres de l'Amérique ne ſçauroient manquer de faire à peu-près le même effet que cette digue dont nous avons parlé; nous ſommes donc en droit de ſuppoſer un contrecourant conſtant & général d'occident en orient, au deſſous du courant général oriental. Ces contrecourans ſeront cependant de même que les courans extrêmement diverſifiés par la conformation irrégulière des terres, des côtes & du fond de la mer; ils pourront même dans quelques endroits reprendre le deſſus & reparoître ſous la forme des courans. Il paroît que cela arrive tout le long des côtes de la Guinée depuis le Cap Verd juſqu'à la Baie de Fernando-poo, où les courans vont d'occident en orient; car le grand promontoire de l'Afrique ne permet pas au courant général de ſe former tout le long deſdites côtes. Toutes ces variations ſont d'une grande reſſource pour expliquer pluſieurs phénomènes qu'on a remarqués ſur les courans. La théorie des vents & des autres changemens de notre atmoſphère dépend en grande partie du principe de la circulation des fluides, qui peut être produite de pluſieurs manières, comme nous verrons ci-deſſous.

XXIV.

J'ai dit ſur la fin du §. 21. que les eaux doivent ſe tenir plus hautes du côté oriental de la grande digue que du côté occidental; les terres de l'Amérique doivent donc encore faire le même effet: Par conſéquent le baromètre doit ſe tenir plus bas aux bords de la mer du nord qu'à ceux de la mer du ſud, & cela eſt effectivement ainſi: car M. Bouguer, dans ſon ouvrage ſur la figure de la terre, fruit précieux de la puiſſante & effi-

cace protection que le plus grand monarque de la terre accorde aux ſciences, dit expreſſément, que le mercure ſe ſoutenoit dans le vuide au bord de la mer (du ſud près l'équateur) à 28 pouces 1 ligne; il ajoûte que les plus grandes variations n'y ſont que de deux ou tout au plus de trois lignes, & il me ſemble que cet illuſtre académicien parle de ladite hauteur de 28 pouces 1 ligne, comme de la hauteur moyenne. Comparons cette obſervation avec celle d'un académicien, feu M. Richer, qui a été envoyé par ordre de Louis le Grand en l'Iſle de Cayenne, pareillement pour y faire les obſervations aſtronomiques & phyſiques les plus recherchées dans ces temps-là. Voici comme M. Richer s'exprime là-deſſus dans le recueil de ſes obſervations pag. 68. » On étoit » en peine de ſçavoir ſi vers l'équateur la hauteur du vif- » argent dans les barométres étoit la même qu'à Paris ou » non : de quoi je me ſuis éclairci par les obſervations » que j'ai faites en Cayenne pendant une année entière, » où j'ai remarqué que ſa plus grande hauteur n'a ja- » mais ſurpaſſé vingt-ſept pouces 1 ligne dans un lieu » qui n'étoit élevé au-deſſus de la ſuperficie de la mer » que de vingt-cinq à trente pieds ». Comme le lieu de l'obſervation a été d'un côté un peu élevé par-deſſus la ſurface de la mer, & que de l'autre la hauteur de 27 pouces 1 ligne eſt annoncée comme la plus grande qui ait été obſervée, nous ſommes encore fondés à prendre cette hauteur pour moyenne dans un lieu où les variations ſont preſque nulles. En comparant donc l'obſervation de M. Richer avec celle de M. Bouguer, nous voyons que le barométre ſe tient d'un pouce entier plus bas près de l'Iſle de Cayenne que vis-à-vis au bord de la mer du ſud. Si on vouloit attribuer cette différence des hauteurs barométriques toute entière à une élévation actuelle des eaux près de l'Iſle de Cayenne, nous trouverions par la règle de M. Bouguer, que les eaux de la mer ſont ſous l'équateur de 152 toiſes plus hautes près des côtes

orientales de l'Amérique que près des côtes occidentales. Si cette élévation des eaux paroiſſoit exceſſive, il faudroit tâcher de trouver encore une autre raiſon de la petite hauteur barométrique en l'Iſle de Cayenne; mais quelle que ſoit l'élévation des eaux près des côtes orientales de l'Amérique, elle diminueroit uniformément ſous l'équateur d'occident en orient, ſi tout le reſte du noyau de la terre étoit inondé, & les eaux de la mer auroient tout le long de l'équateur une petite pente égale vers l'orient, & cette pente ſeroit d'environ une ſeconde & demie, ſi l'élévation des eaux près de l'iſle de Cayenne étoit de 152 toiſes. Ainſi l'adhérence de l'air entraîne les eaux près la ſurface de la mer à contre-mont de ladite pente. Mais ſi la grande hauteur du baromètre ſous l'équateur eſt de 28 pouces 1 ligne, & la petite de 27 pouces 1 ligne, la hauteur moyenne ſera de 27 pouces 7 lignes, & je préſume qu'elle ſera à peu près telle ſous l'équateur autour de la longitude des Philippines. Les côtes orientales de l'Afrique pourroient bien faire en partie le même effet, & élever les eaux de la mer rouge pardeſſus celles de la mer méditerranée les plus proches, conformément à l'opinion de pluſieurs auteurs. J'ai cependant appris de bonne main que la hauteur barométrique eſt à peu près égale des deux côtés de l'Iſthme de Panama; mais auſſi les courans y ſont-ils bien différens du courant général d'eſt. Je ne ſçai pas non plus ſi M. Richer aura pris toutes les meſures qu'on doit prendre pour pouvoir bien juger des hauteurs abſolues des baromètres; mais ce ſeroit outrer infiniment la choſe, que de préſumer dans ſes obſervations des erreurs d'un pouce. Nous ne pouvons donc nous diſpenſer d'adopter les faits tels que nous les avons indiqués, quoiqu'ils ſoient peut-être moins ſenſibles. Il ſeroit fort à ſouhaiter qu'on fît dans tous les cours de navigation des journaux exacts des hauteurs barométriques; la phyſique en général & notre queſtion en particulier, en pourroient retirer de très-

très-grands avantages, & on peut preſque toujours ſaiſir un moment favorable pour faire ces obſervations, quand même la mer eſt aſſez agitée. Mais comme ces ſortes d'obſervations demandent qu'on ſoit bien informé de toutes les circonſtances qui peuvent faire varier les hauteurs abſolues des baromètres, j'ajouterai ici une remarque ſingulière que j'ai faite ſur cette matière; ſi cette petite digreſſion paroiſſoit à quelques-uns trop étrangère à notre queſtion, je les prie de paſſer l'article qui ſuit.

XXV.

On ſçait qu'il eſt rare que les hauteurs abſolues de différens baromètres s'accordent parfaitement entre elles: pluſieurs cauſes peuvent concourir à produire ces petites inégalités. Une petite inégalité entre les peſanteurs ſpécifiques de différentes ſortes de mercure, les différens dégrés de chaleur, qui changent un peu la peſanteur ſpécifique d'un même mercure, la nature des tuyaux capillaires, dans leſquelles le mercure monte moins haut que dans des tuyaux plus larges, & enfin l'imperfection du vuide, ſont les cauſes qu'on allégue ordinairement; mais il y en a encore une autre qu'on n'a pas remarquée juſqu'ici, que je ſçache. Elle conſiſte en ce que tous les fluides forment autour d'eux dans le vuide une atmoſphère ou une vapeur élaſtique; & ces vapeurs ont des propriétés ſingulières. Pluſieurs expériences que j'ai faites, avec une excellente pompe pneumatique, m'ont fait d'abord remarquer l'activité de ces vapeurs: j'obſervois que le mercure dans l'*index* appliqué à la pompe ne montoit jamais ſi haut, qu'il ſe tenoit dans un bon baromètre; ce défaut étoit ordinairement de 4 à 5 lignes, & quand il faiſoit bien chaud il alloit juſqu'à 8 lignes. La pompe étoit cependant parfaitement bonne, & le vuide s'y conſervoit pendant pluſieurs jours de ſuite. Je reconnus donc qu'une certaine vapeur élaſtique, qui ſe formoit toujours à meſure qu'on la pompoit, en étoit la

véritable cauſe. La plus petite humidité ſuffit pour fournir une quantité immenſe de ces vapeurs. C'eſt cette vapeur élaſtique, qui fut ſans doute la cauſe d'un phénomène que je me ſouviens d'avoir lû dans les Mémoires de l'Académie; c'eſt que des tuyaux barométriques ayant été lavés avec de l'eſprit de vin en dedans, & puis remplis de mercure, celui-ci s'y eſt tenu conſtamment de 7, 8 à 9 lignes, ſi je me ſouviens bien, plus bas que dans les autres barométres. Voici à préſent quelques propriétés ſur ces vapeurs élaſtiques; mais que je ne fais encore que préſumer. 1°. Il m'a paru que l'activité de ces vapeurs n'eſt pas augmentée en les reſſerrant dans un plus petit eſpace; c'eſt qu'à meſure qu'on reſſerre les vapeurs, les parties ſe réuniſſent & reprennent la forme du fluide primitif. 2°. L'activité de ces vapeurs eſt augmentée par une plus grande chaleur, & diminuée par un plus grand froid. 3°. Il m'a paru que ces vapeurs demandent un certain dégré de chaleur déterminé pour ſe former, & qu'au-deſſous de ce dégré elles ne ſe forment point du tout; voici ce qui m'a induit à former cette hypothèſe. J'avois un baromètre à double branche, l'une remplie de mercure & l'autre d'huile de tartre, qui étoit fort bien fait, & qui ne me paroiſſoit aucunement ſuſceptible aux changemens du froid & du chaud; ayant une fois couché ce baromètre ſur la table & puis relevé, je fus fort ſurpris de voir cet inſtrument changé en thermomètre extrêmement ſenſible; cependant il ne s'étoit abſolument point gliſſé d'air dans la boule d'en-haut, & d'ailleurs les changemens thermométriques étoient de beaucoup trop grands pour être attribués à cette cauſe; je reconnus enfin qu'il s'étoit gliſſé une petite quantité, preſque imperceptible, d'huile de tartre au deſſus de la ſurface du mercure dans la boule d'en-haut, laquelle par l'élaſticité de ſa vapeur produiſoit le phénomème en queſtion; je fis longtemps des obſervations avec cet inſtrument, & l'ayant une fois expoſé à un grand froid d'environ onze dégrés au-deſſous de zéro du thermomètre de M. Reaumur, je remarquai

qu'il ne varioit plus ſenſiblement, quoique le thermomètre ſimple mis à côté eut encore baiſſé de trois dégrés, & que le baromètre n'eut point changé pendant cette augmentation du froid. 4°. Tous les fluides fourniſſent une telle vapeur; mais l'élaſticité reſpective pour un même dégré de chaleur n'eſt pas la même: le mercure n'en eſt pas exempt; mais s'il eſt tout-à-fait bien purifié, l'activité de ſa vapeur eſt preſque inſenſible. J'ai approché la flamme d'une bougie de l'extrêmité du mercure d'un baromètre lumineux juſqu'à faire bouillonner le mercure, il ne deſcendoit que de quelques lignes, pendant que dans d'autres baromètres, dont le vuide étoit également parfait, mais dont le mercure n'étoit pas purifié, j'ai pu faire deſcendre le mercure d'autant de pouces qu'il y avoit de lignes dans le premier; peut-être auſſi que les tuyaux des autres baromètres renfermoient une petite humidité. Je conclus de ces remarques que, pour obvier à l'inconvénient deſdites vapeurs élaſtiques, il faut ſe ſervir de tuyaux parfaitement ſecs & les remplir d'un mercure bien purifié, & enfin examiner les baromètres ainſi conſtruits par la flamme d'une bougie de la façon que je viens de le dire. Pour faire voir que ces précautions ne ſont pas inutiles, je citerai les obſervations barométriques qui ont été faites en l'iſle de Gorée par Meſſieurs Varin, des Hayes & de Glos; la plus grande hauteur depuis le 31 mars 1682 juſques au 4 juillet de la même année y a été obſervée de 27 pouces 9 lignes & $\frac{1}{2}$, & la plus petite de 27 pouces 3 lignes & $\frac{1}{2}$; à quoi il eſt ajouté: » On a obſervé qu'ordinairement à la Gorée » le baromètre étoit plus bas quand le thermomètre étoit » plus haut; & généralement le baromètre étoit plus » haut la nuit que le jour de deux, trois ou quatre li» gnes, & il faiſoit plus de changement du matin juſqu'au » ſoir, que du ſoir juſqu'au matin «. Je m'aſſure que tout cela n'étoit qu'un effet de la vapeur élaſtique dont je viens de parler, & qui jette tout d'un coup un doute de

4 lignes ſur les hauteurs abſolues du baromètre obſervé en l'iſle de Gorée près du Cap-verd.

XXVI.

Les remarques que je viens de faire, pourroient bien nous laiſſer douter de l'obſervation de M. Richer pour 3 ou 4 lignes ; mais je ne crois pas qu'il faille pouſſer ſes doutes plus loin. M. de la Condamine, qui a fait les mêmes obſervations, à en juger par ſa relation du voyage depuis la côte de la mer du ſud juſqu'aux cotes du Breſil & de la Guyane, & à qui rien n'a pu échapper de ce qui a pu rendre toutes ſes obſervations plus ſûres & plus exactes, en pourra décider : mais je n'ai rien trouvé dans ſadite relation qui en décide abſolument, quoique j'y aie trouvé pluſieurs circonſtances qui me confirment dans l'opinion que la mer eſt réellement plus haute ſur les côtes du Bréſil, qu'au bord de la mer du ſud ſous les mêmes paralleles. Meſſieurs Bouguer & de la Condamine font auſſi fort mention d'une petite variation journalière du baromètre, obſervée par M. Godin, que j'attribue de même à l'activité de la vapeur élaſtique du baromètre ; ſurquoi je m'en rapporte au jugement de ces Meſſieurs qui auront fait les obſervations thermomètriques correſpondantes. Mais en voilà aſſez, peut-être trop, ſur la cauſe & la nature du courant général & conſtant d'orient en occident. Je ne ferai donc plus qu'examiner en deux mots ſi ce courant peut être conſidéré comme une ſuite du flux & reflux de la mer.

XXVII.

Il eſt d'abord certain qu'on n'a rien remarqué dans ce courant général qui ait le moindre rapport avec la lune, qui eſt pour la plus grande partie la cauſe du flux & reflux. On ſçait auſſi que l'action de la lune conſiſte à allonger un peu le diamètre de la terre, dont la direction paſſe par la lune : cette action jointe au mouvement jour-

nalier de la terre, fait toute la cauſe du flux & reflux de la mer en tant qu'il eſt produit par la lune. Suppoſons à préſent que la lune réponde au point *A* (*fig.* 2.), & que l'ellipſe preſque circulaire *AECFBGDHA*, repréſente la ſurface de la mer, *AB* étant le diamètre un peu allongé de la terre. Si un moment après la lune répond au point *a*, il faut que les eaux prennent la figure *aeCfbgDha*, qui ne diffère en rien de la figure précédente, excepté la poſition : ce changement de poſition ne ſçauroit ſe faire ſans que les deux ménifques *AHDhA* & *BFCfB* ſe vuident pour emplir les deux autres ménifques *AECeA*, & *BGDgB*. Il n'eſt donc plus queſtion que d'examiner par quel mouvement des eaux ſe forme cette transfuſion continuelle. On voit d'abord que pour la plus grande partie ce mouvement conſiſtera en ce que les eaux baiſſent verticalement dans les deux premiers ménifques & montent dans les deux autres ; mais il eſt clair auſſi que les eaux prendront en même temps un mouvement horiſontal, & il n'eſt queſtion que de ce ſeul mouvement. Si on diſoit que toutes les eaux du ménifque *AHDhA* iront emplir le ménifque *DGBgD*, & que ce ſera la même choſe des deux ménifques ſuivans, ce ſeroit là le courant général oriental ; mais il n'y a abſolument aucune raiſon qui puiſſe nous empêcher de renverſer l'ordre de ce mouvement, & de dire, que les eaux *AHDhA*, ſeront tranſportées en *AECeA*, & ainſi des deux ménifques ſuivans, ce qui formeroit un courant général occidental. On n'eſt donc pas plus fondé à tirer de cette cauſe un courant oriental qu'un autre tout-à-fait contraire. Pour déterminer le vrai mouvement horiſontal des eaux, nous partagerons les quatre ménifques en deux parties égales par les petites verticales *Hh*, *Gg*, *Ff* & *Ee*. Alors on voit que les eaux des deux demi-ménifques *AHhA* & *CFfC*, ont une pente tout-à-fait égale pour aller remplir le ménifque *AECeA*, ou plutôt les deux demi-ménifques contigus *AEeA*,

& $CEeC$, & que de la même façon les deux demi-ménisques $BGgB$ & $DGgD$ seront emplis par les eaux des deux autres demi ménisques $FBfF$ & $HDbH$. C'est là visiblement le vrai mouvement ; aussi est-il entièrement conforme aux observations qu'on a faites sur le flux & reflux. Suivant cette explication, le mouvement se fera d'occident en orient depuis H jusqu'en E, de même que depuis I jusqu'en G, & il y aura un mouvement d'orient en occident depuis F jusqu'en E, & depuis H jusqu'en G. Ces mouvemens forment un flux & reflux sans produire jamais un mouvement progressif continuel. On remarquera qu'aux points cardinaux A, B, C & D, la vîtesse des eaux est la plus grande, & qu'elle est nulle aux points intermédiaires E, G, F & f. Cependant la chose ne sera entièrement telle que dans les mers profondes à une grande étendue, & elle peut être extrêmement changée par la configuration particulière des côtes & d'un grand nombre d'autres circonstances. A mon avis, il faudroit recourir à une structure toute particulière du noyau solide de la terre, qui donnât plus de facilité à se mouvoir d'orient en occident que d'occident en orient, pour pouvoir déduire le courant oriental général de l'action de la lune ; mais ce seroit là multiplier les hypothèses sans aucune nécessité ; après tout je ne rejette pas cette opinion comme entièrement absurde, mais comme peu naturelle & ne pouvant subsister qu'avec les secours d'autres hypothèses entièrement précaires : Je suis même porté à croire que certains courans particuliers peuvent réellement être une suite du flux & reflux.

XXVIII.

Je viens maintenant aux courans qui changent de direction de six en six mois, & qui reprennent assez régulièrement leur état au bout de chaque année. On sçait qu'il y a de tels courans périodiques. Messieurs de Buffon, Varenne, Dampier & d'autres auteurs en citent un

grand nombre d'exemples. Ces courans ne peuvent être une ſuite du courant général ni du flux & reflux, ni être cauſés par la ſtructure de la terre ; il faut néceſſairement les déduire de l'action du ſoleil, puiſque leur état, tant en direction qu'en force, dépend uniquement des ſaiſons & de la poſition du ſoleil. Il eſt clair auſſi que le ſoleil ne peut pas former ces courans réciproques de ſix en ſix mois par le principe de ſon attraction, par lequel il concourt avec la lune à former le flux & reflux de la mer ; car comme l'action de la lune prédomine beaucoup à cet égard ſur celle du ſoleil, la période de ces courans ſeroit plutôt de mois en mois que d'année en année. Tâchons donc de développer la vraie manière de laquelle le ſoleil peut former ces courans en queſtion ; nous en connoîtrons beaucoup mieux leur nature : ces recherches nous mèneront à de nouvelles réflexions fort intéreſſantes. Nous commencerons cet examen en ſuppoſant d'abord toute la terre inondée & en faiſant premièrement abſtraction de l'inclinaiſon de l'écliptique, c'eſt-à-dire, en ſuppoſant un équinoxe perpétuel & univerſel.

XXIX.

Il eſt clair que les eaux ſous l'équateur ſeront beaucoup plus échauffées par le ſoleil que vers les poles, elles y ſeront donc encore, comme on ſçait, plus dilatées & perdront par-là une petite partie de leur peſanteur ſpécifique ; ainſi la peſanteur ſpécifique des eaux ſera à cet égard d'autant plus grande qu'elles ſeront plus proches des poles. Le Père Feuillée a obſervé aſſidument les variations des peſanteurs ſpécifiques des eaux de la mer ; il a trouvé huit grains de diminution ſur deux onces trois dragmes cinquante-ſept grains depuis la hauteur de Gibraltar juſqu'à l'équateur, ce qui donne les péſanteurs ſpécifiques de ces deux eaux en raiſon de 1197 à 1180. Le principe de l'équilibre demande donc que les eaux s'élévent un peu ſous l'équateur & ſe baiſſent vers les po-

les ; tout cela découle immédiatement des premiers élémens de la phyſique & de l'hydroſtatique. Suppoſons, par exemple, la peſanteur ſpécifique moyenne des eaux ſous l'équateur à celle qui répond à la latitude de 60 dégrés, comme 120 à 121, & donnons 1200 toiſes de profondeur à la mer ; en ce cas, la mer ſera de dix toiſes plus haute ſous l'équateur que ſous le parallèle qui en eſt éloigné de 60 dégrés ; mais, par-là même, la ſurface de la mer prendra une petite pente depuis l'équateur vers les poles, de ſorte qu'elles ne ſeront plus tout-à-fait de niveau : cette pente ſera que les eaux coulent continuellement depuis l'équateur vers les deux poles ; mais par-là la mer deviendroit bientôt plus haute vers les poles, pendant qu'elle y doit néceſſairement être un peu plus baſſe : Que doit on répondre à cette contradiction apparente ? Il n'y a abſolument aucun autre moyen que celui de dire qu'il y aura une circulation continuelle. Voici comment ſe formera cette circulation. Je dis que les eaux au lieu de s'élever de dix toiſes ſous l'équateur ne s'y éleveront que d'environ cinq toiſes ; il arrivera par-là que, d'un côté, les eaux de la mer vers la ſurface deſcendront depuis l'équateur vers les poles à cauſe de la petite pente, & que de l'autre les eaux retournent par le bas des poles vers l'équateur étant ſollicitées à ce mouvement par l'excès du poids des colonnes d'eau qui ſont par cette diſtribution plus peſantes près des poles que ſous l'équateur. Voilà une légère ébauche d'une nouvelle circulation des eaux de la mer, qui forme un courant & un coutrecourant continuel de l'équateur vers les poles, & des poles vers l'équateur. Mais avant que d'entrer dans un plus grand détail ſur ces courans, je tâcherai de diſſiper les doutes qu'on pourroit ſe former contre le principe qui en fait la baſe.

XXX.

C'eſt ici ſurtout que les loix ordinaires de la méchanique

nique ſemblent entièrement renverſées. On voit un certain mouvement perpétuel ſans voir diſtinctement aucune force qui l'entretienne. Avec tout cela, la nature eſt extrêmement fertile à produire une infinité de mouvemens perpétuels phyſiques plus ou moins réguliers ſuivant les circonſtances. C'eſt que dans la théorie de la méchanique, on ſuppoſe qu'un corps eſt toujours animé également vers un centre de force quelconque, s'il en eſt également éloigné ; tout le principe de la conſervation des forces vives eſt uniquement fondée ſur cette ſuppoſition : on peut même en ce cas donner une étendue infiniment plus grande à ce principe, qu'on n'a encore remarqué : Voici ce principe dans toute ſon étendue. » Qu'on s'imagine un tel nombre de points qu'on » voudra, comme autant de centres de forces, que ces » points ſoient tous matériels ou en partie immatériels, » qu'ils décrivent des courbes quelconques, qu'on leur » ſuppoſe une loi d'attraction ou de gravitation telle qu'on »voudra ; il n'y a qu'à combiner chaque point avec cha- » que point, examiner enſuite pour chaque combinaiſon, » quelle ſeroit la force vive, ſi un des deux points étant » immobile, l'autre s'en étoit approché en ligne droite » de la même quantité, que ces deux points ſe ſont ap- » prochés dans le ſyſtême; & la ſomme de toutes ces for- « ces vives donnera conſtamment la force vive de tout » le ſyſtême «.

La généralité de ce théorème nous fait voir d'abord l'impoſſibilité de ce qu'on appelle mouvement perpétuel purement méchanique ; mais le méchaniſme ſuivant lequel nous avons expliqué au précédent article notre nouvelle circulation des eaux de la mer, n'eſt pas compris dans le cas de ce théorème général ſur la conſervation des forces vives, puiſque chaque goute d'eau change de nature en changeant continuellement ſon volume, ſa denſité & ſa peſanteur ſpécifique : ainſi ces ſortes de circulations perpétuelles peuvent fort bien ſubſiſter avec

les principes de mécanique généralement reconnus. J'établirai notre théorie par des raiſons & expériences phyſiques d'une manière à n'en pas douter, après que nous aurons examiné l'effet que les différentes chaleurs doivent produire dans l'air.

XXXI.

Notre queſtion ſur les courans eſt tellement liée avec celle des vents réguliers, que je ne ſaurois me diſpenſer d'en faire preſque un ſeul & même ſujet : Nous avons vû ci-deſſus, que l'adhérence des fluides, qui eſt la cauſe du courant général oriental, doit produire en même-temps un vent oriental conſtant & d'autant plus ſenſible, que l'air eſt plus élevé par-deſſus la ſurface de la mer : nous allons voir que c'eſt tout le contraire dans le cas dont il s'agit ici.

La dilatation qu'un certain degré de chaleur produit dans l'air eſt beaucoup plus grande, que dans l'eau : j'ai trouvé par des expériences, que les dilatations des eaux pour des variations égales dans les thermomètres faits d'eſprit-de-vin, ſont fort inégales; elles ſont imperceptibles dans les eaux, qui ſont peu éloignées du point de la congellation; enſuite ces variations augmentent dans les eaux moins froides & deviennent enfin preſque uniformes. Il paroît que c'eſt là une propriété commune à tous les fluides; ſi on compare les variations d'un thermomètre à eſprit-de-vin avec celles d'un thermomètre à mercure, on voit que dans les froids exceſſifs prêts à geler l'eſprit de-vin, le premier thermomètre ne montre plus que des variations très-petites pendant que l'autre fait des variations très-ſenſibles : je ne doute pas qu'un thermomètre à mercure comparé avec un thermomètre à air ne montre de pareilles diminutions dans les froids exceſſifs; &, par les diminutions de la marche du mercure, on pourroit juger à peu près, à quel degré de froid le mercure ſe gèleroit. On voit donc que les eaux

de la mer ne ſouffriront plus aucun changement ſenſible vers les équinoxes au-delà de 50 ou 60 dégrés de latitude, pendant que la denſité de l'air augmentera juſqu'aux poles. On a éprouvé des froids à Kamtſchatka, à Tornao, à Kola, &c. qui augmentent preſque de la moitié la denſité d'un air tel que celui de nos etés, de ſorte que les denſités de ces deux ſortes d'air peuvent être cenſées être en raiſon de 3 à 2. Mais cette grande inégalité ne trouve lieu que bien près de la terre, y ayant toutes les apparences, que toute la maſſe d'air prend la même temperature au-deſſus d'une certaine hauteur. C'eſt là la raiſon pourquoi dans la zone torride le froid augmente à meſure qu'on s'éleve par-deſſus la ſurface de la mer. M. Bouguer a fait là deſſus d'excellentes remarques : Mais en paſſant dans les ſaiſons moyennes les alpes de la Suiſſe, on ne ſent pas à beaucoup près ces grandes augmentations de froid ; & je ne doute pas que près des poles on ne ſentît un air d'autant plus chaud, qu'on s'éleveroit davantage, ſi on pouvoit faire ces obſervations. Je ſuis fort porté à croire qu'à la hauteur verticale d'environ 300 toiſes l'air commence à prendre ſa température uniforme ; mais j'entends des élévations qui ſeroient priſes en plein air & dans les lieux où il n'y auroit point de montagnes. Si je ne me trompe, dans cette conjecture, la preſſion de l'air doit élever le mercure dans le baromètre d'environ ſix lignes plus haut vers les poles que vers l'équateur, & cela s'accorde fort bien avec ce que j'ai dit au § 24 fondé ſur l'obſervation de M. Richer, que j'ai comparée avec celle de M. Bouguer ; de laquelle comparaiſon il réſulte que la hauteur moyenne du baromètre ſous l'équateur n'eſt que de 27 pieds 7 lignes, ſi cependant, ce que je répéte, l'obſervation de M. Richer eſt tout à fait ſure. C'eſt ſans doute cette uniformité de chaleur dans les régions hautes de l'air, qui fait que les hauteurs barométriques différent ſi peu vers les poles & près de l'équateur. On voit

auſſi pourquoi, dans les pays ſeptentrionaux, une élévation de 65 pieds ſuffit pour faire baiſſer le mercure d'une ligne, pendant que, ſelon M. Bouguer, dont je reſpecte toujours l'autorité, il faut s'élever de 90 pieds près de l'équateur pour la premiere ligne de deſcente du baromètre.

XXXII.

Examinons maintenant l'effet que doit produire cette inégalité dans les preſſions des colonnes d'air. Il eſt clair que ſon premier effet ſera d'applatir tant ſoit peu la ſurface de la mer vers les poles & d'élever les eaux vers l'équateur : la pente de la ſurface de la mer depuis l'équateur vers les poles, dont nous avons déja parlé au § 29, en ſera un peu augmentée, mais ce ne ſera que d'environ un demi pied ſur tout le quart du méridien : ce premier effet ſera donc comme inſenſible. Mais le ſecond effet ſera de produire une circulation perpétuelle d'air ; cette circulation ſe fera depuis les poles vers l'équateur près la ſurface de la mer, pendant qu'une quantité d'air égale retourne de l'équateur vers les poles dans une plus haute région de l'atmoſphère. Ce n'eſt ici qu'une eſquiſſe de notre ſyſtême ſur les courans & ſur les vents réguliers ; nous entrerons dans un plus grand détail ci-deſſous.

XXXIII.

Je crains toujours, malgré tout ce que je viens dire, que ces circulations d'eau & d'air ne paroiſſent trop paradoxes pour pouvoir être admiſes. Je ne me ferai donc point de peine de les établir davantage par des expériences phyſiques.

1. *Experience.* Qu'on échauffe bien une chambre à fourneau, pendant que l'anti-chambre demeure froide ; qu'on ouvre enſuite la porte entre les deux chambres & qu'on y tienne deux bougies allumées, l'une tout au bas & l'autre tout au haut, on verra que la flamme de la

première ſera fort ſenſiblement dirigée vers la chambre échauffée & celle de l'autre vers l'anti-chambre froide. Si on tient la bougie à la mi-hauteur de la porte, la flamme n'en eſt point agitée du tout. Cette expérience ſuffit ſans doute toute ſeule pour établir la circulation de l'air, que j'ai indiquée.

Explication. La raiſon de cette circulation d'air conſiſte en ce que le poids d'une colonne d'air dans la chambre chaude eſt plus petit que celui d'une colonne tout-a-fait ſemblable dans la chambre froide: ainſi l'air d'en bas coulera continuellement de la chambre froide dans la chambre chaude: &, comme l'élaſticité de l'air doit demeurer la même dans les deux chambres, il faut que la chambre chaude ſe vuide continuellement d'autant d'air qu'elle en reçoit, ce qui ne ſçauroit ſe faire que par la partie ſupérieure de la porte, parce que la différence entre les poids des colonnes d'air, doit néceſſairement produire cette circulation continuelle. Il n'eſt preſque pas poſſible, que d'autres n'aient fait cette obſervation avant moi.

2. *Expérience.* Dans les mines profondes, où il règne ſouvent un air extrêmement échauffé par les exhalaiſons, on peut rafraîchir l'air & le faire circuler continuellement par le moyen d'un long tuyau, qui depuis l'air libre deſcend juſqu'au fond de la mine: l'air entre continuellement dans le tuyau par l'ouverture d'en-haut & la circulation ſe fait d'autant plus vîte que l'air de dehors eſt plus froid. Cette expérience a été faite en Suéde & elle eſt rapportée dans les tranſactions Philoſophiques de Londres.

Explication. L'air extérieur étant plus froid que celui des mines en queſtion, on n'a qu'à ſuppoſer la circulation commencée pour voir qu'elle doit continuer ſans fin, puiſque l'air frais étant entré dans le tuyau ne ſçauroit prendre dans l'inſtant la température des mines & doit par conſéquent demeurer plus peſant que celui des mines; mais l'air qui ſort par l'ouverture inférieure du

tuyau entre dans un grand eſpace, où il a tout le tems pour s'échauffer, ſans cependant refroidir ſenſiblement celui des mines par ſon mélange. Ainſi la circulation continuera toujours. Cela étant ainſi, il eſt facile de voir que la moindre choſe, qui ne ſçauroit jamais manquer d'arriver d'elle-même, ſuffit pour commencer & pour former une circulation, qui s'augmente d'abord & puis ſe continue par ſes propres forces.

Quant à la circulation des fluides, on n'a qu'à mettre une grande marmite remplie d'eau à côté du feu pour voir une circulation tout-à-fait ſemblable à celle que nous avons ſuppoſée : la nature ſe plaît à former ces ſortes de circulation juſques dans les matières ſubtiles : celles de la matière magnètique ſont aſſez connues ; cependant celles-ci ſe forment par un tout autre principe. Les expériences ſur l'électricité montrent de même manifeſtement une circulation de la matière électrique : on peut même, par le moyen de cette matière, produire dans les corps ſolides des mouvemens réguliers, qui durent tant que l'électricité ſubſiſte : on ſçait que de petites boules d'yvoire ſuſpendues près d'un corps électriſé s'en approchent & s'en éloignent alternativement par des balancemens réguliers. La raiſon de ces balancemens perpétuels doit être tirée de notre §. 30. c'eſt que la boule d'yvoire eſt plus fortement attirée par le corps électriſé en s'en approchant, qu'elle ne l'eſt en s'en éloignant, les diſtances étant égales. On ne doutera pas de cette raiſon, quand on conſidère que la force attirante devient même répulſive, ſi on donne aſſez de tems à ce changement. J'ajouterai ici deux expériences ſur cette matière, tant parce qu'elles conſirment nos principes, que parce que ce mémoire s'adreſſe à une Société, qui reçoit toujours avec bonté toutes les nouvelles obſervations & expériences faites ſur des matières auſſi intéreſſantes, que l'eſt aujourd'hui l'électricité.

3. *Experience.* Si on met une aiguille *a c* (*fig.* 3.) de

fer ou de bois auprès d'un globe de fer fortement électrisé par communication *A B*, & que l'aiguille soit librement mobile au point *b*; cette aiguille sera d'abord irrégulièrement agitée : mais bientôt elle s'élancera jusqu'à faire le tour & alors elle continuera à tourner toujours dans le sens qu'elle à commencé sa première révolution & quelquefois avec une rapidité étonnante. J'ai diversifié ces expériences de plusieurs façons, que je passe sous silence, mon dessein n'étant que de confirmer notre principe; car considérant le centre *C* du globe *A B* comme un centre de forces, & prenant dans l'orbite de l'extrêmité de l'aiguille deux points *d* & *e* également éloignés du centre *C*, il semble que l'extrêmité de l'aiguille est attirée plus fortement au point *d* qu'au point *e*, si elle tourne dans le sens *d a e c d*; & plus fortement au point *e* qu'au point *d*, si elle tourne dans le sens contraire : & cette raison explique parfaitement ces expériences.

Voici à présent une autre expérience, qui montre la façon de circuler de la matière électrique & que cette matière est sujette aux loix hydrodynamiques comme les fluides ordinaires, de laquelle j'ai prévû le succès avant que de la faire : je l'imaginois d'abord dans le dessein de produire des tournoyemens toujours dans le même sens.

4. *Expérience.* Soit *a b* (*fig.* 4.) une verge de fer fichée verticalement dans un gâteau de résine & électrisée par communication; qu'on fasse ensuite une aiguille de fer telle que *c c d f* recourbée à angle droit par les deux bouts *c e* & *d f*, chacun dans le plan horizontal & à contre-sens; que les extrêmités *e f* soient pointues; qu'on mette cette aiguille sur la pointe de la verge *a b* de manière à se tenir horizontalement & à tourner librement, on verra que l'aiguille commencera peu-à-peu à tourner & toujours dans le sens *e c f d*; Si on donne à l'aiguille une impression contraire, son mouvement sera peu-à-peu retardé pour faire ensuite ses tournoyemens naturels &

avec beaucoup de vîteſſe. De nuit le cercle *e c f d* paroît lumineux. Cette expérience prouve clairement, que la matière électrique paſſe continuellement de la verge dans l'aiguille au point *b* & que là elle ſe diviſe en deux torrens oppoſés pour ſortir par les deux pointes *e* & *f*, & enfin que la réaction de ce fluide, forcé à changer de direction dans les coudes *c* & *d*, fait tourner l'aiguille dans le ſens *e c f d*.

XXXIV.

Je me flatte après toutes ces raiſons tant phyſiques que méchaniques, qu'on n'aura plus aucune peine à admettre les circulations des eaux de la mer & de l'air telles que je les ai expliquées aux §. §. 29. & 32. & cela d'autant moins qu'elles ſont très conformes aux phénomènes qu'on a remarqués ſur les mouſſons & ſur les courans périodiques anniverſaires. Examinons donc à préſent de plus près la nature de ces circulations ſans ſortir encore de notre hypothèſe de l'inondation entière de la terre & de la coincidence de l'écliptique avec l'équateur.

J'ai allégué vers le milieu du §. 31. une raiſon phyſique, qui me fait croire, que cette circulation des eaux ne s'étend pas au-delà du 50e dégré de latitude; je regarde donc la vîteſſe horizontale des eaux comme nulle tant près de l'équateur, où les eaux ne font que monter du fond de la mer vers la ſurface, que près deſdites latitudes, où les eaux deſcendent de la ſurface vers le fond. Je préſume auſſi que le courant ſera le plus ſenſible autour du 25e dégré de latitude, qu'il ſera dirigé vers le nord dans les pays ſeptentrionaux & vers le ſud dans les pays méridionaux, pendant que les contre-courans auront une direction contraire de part & d'autre, & cette double circulation des eaux ſe feroit uniformément pendant tout le cours de l'année, ſi le Soleil décrivoit conſtamment l'équinoctial.

XXXV.

XXXV.

Il eſt facile à préſent de voir les changemens périodiques qui doivent arriver par l'obliquité de l'écliptique; ſuppoſons, par exemple, que le ſoleil décrive le tropique du Cancer: ce ne ſera, ſans doute, plus l'équateur qui partagera les deux circulations & où la viteſſe horiſontale des Eaux ſera nulle; ce ſera plutôt un parallèle ſeptentrional qui ne ſçauroit être fort éloigné du tropique du Cancer. Il ſuit de là que, ſous l'équateur, il doit ſe former un courant dirigé vers le nord depuis l'équinoxe du printems juſqu'à l'équinoxe d'automne & un courant tout contraire pendant les autres ſix mois. Si on conſidère un parallèle entre l'équateur & le tropique du Cancer, il pourra arriver que le courant dirigé vers le nord ne dure que deux ou trois mois d'été ſuivant la latitude du lieu, & que pendant tout le reſte de l'année on ſente un courant contraire. Ces exemples ſuffiſent pour voir ce qui doit arriver dans tous les parallèles & pendant toute l'année, tant que l'on ſuppoſe toute la terre inondée. On remarquera cependant que les changemens ſe feront toujours un peu plus tard, parce que l'effet du ſoleil eſt toujours poſtérieur à ſa poſition. Mais ces courans périodiques ſeront extrêmement changés par les terres fermes, par la configuration des côtes, par les Iſles, par la conformation du fond de la mer & par un grand nombre d'autres circonſtances. Je ſuis cependant perſuadé qu'en combinant cette théorie avec celle que nous avons donnée ſur le courant général d'eſt, la ſimple inſpection d'une grande mappe-monde ſuffira pour voir l'origine de tous les courans réguliers tels qu'on les remarque.

XXXVI.

L'explication que je viens de donner des courans périodiques anniverſaires nous fait voir en meme-tems la

ſource des vents périodiques & leur nature; il n'y a qu'à appliquer le précédent article au §. 32. pour comprendre tous les changemens deſdits vents pendant le cours de l'année. Je pourrois faire voir ici une conformité frappante entre notre théorie & les obſervations conſtatées ſur les vents, ſi cet examen appartenoit immédiatement à notre ſujet. D'autres ont conſidéré à la vérité avant moi la raréfaction de l'air cauſée par la chaleur du Soleil pour en déduire une théorie ſur les vents; comme ils n'ont pas fait attention aux circulations, que je crois d'avoir ſi bien établies, & qu'on voit très-ſouvent aux yeux par le mouvement contraire des nuages des régions baſſes & des régions hautes de l'air, cette hypothèſe n'a pas dû les mener bien loin. Ce que j'ai dit au §. 27. montre auſſi à mon avis l'inſuffiſance de ce principe pour en déduire le vent général d'eſt. Il me ſemble toujours que les variations de la chaleur du jour à la nuit ne ſçauroient produire qu'une eſpèce de flux & reflux de l'air alternativement d'orient en occident, & d'occident en orient, que l'expérience même confirme aſſez, & qu'il n'y a pas plus de raiſon d'en déduire un vent oriental permanent que d'en déduire un vent occidental conſtant. Je ne me laſſe point d'admirer les ſublimes calculs, que M. d'Alembert a ſçu employer pour expliquer le vent oriental; mais comme ces ſortes de calculs ſont fondées ſur la conception qu'on ſe forme de la manière dont les fluides reprennent leur état d'équilibre, c'eſt à celle-ci que ſe réduit toute la queſtion, & il me ſemble que la nôtre du §. 27. eſt plus naturelle & qu'elle répond à tous les phénomènes; je la croirois entièrement ſure, ſi je n'avois pas Meſſieurs de Buffon & d'Alembert contre moi, ou pour mieux dire, ſi ces illuſtres ſçavans autoriſoient notre théorie, car enfin leur ſentiment n'eſt pas contradictoire à notre théorie. Si nous combinons le mouvement de l'air, qui près la ſurface de la mer ſe fait depuis les deux poles vers l'équateur,

nous trouvons la raiſon, pourquoi généralement parlant le vent aliſé eſt nord-eſt dans l'hémiſphère ſeptentrional & ſud-eſt dans l'hémiſphère méridional, & notre théorie bien entendue nous fournit une explication très-ample & très-naturelle de toutes les variations anniverſaires de ces vents aliſés. Remarquons auſſi, que le même mouvement de l'air depuis les poles vers l'équateur dans la région baſſe de l'atmoſphère, fournit une nouvelle ſource du vent général d'eſt dans la zone torride : car cet air continuellement tranſporté dans un plus grand parallèle, doit auſſi continuellement augmenter ſa vîteſſe d'occident en orient pour ſuivre le mouvement journalier de la terre ; &, comme il n'y a aucune force qui lui imprime cette augmentation de vîteſſe d'occident en orient, excepté l'adhérence des fluides qui ne ſçauroit la produire toute entière, il faut néceſſairement qu'il en provienne un mouvement d'air relatif d'orient en occident. C'eſt apparemment de cette façon qu'il arrive que généralement parlant les vents d'eſt ſont plus froids que les vents d'oueſt : car un vent qui part dans ſon origine des régions polaires vers l'équateur, & qui doit être bien froid, ſe tournera à l'eſt à meſure qu'il avance ; & au contraire un vent qui va d'abord directement de l'équateur vers les poles, & qui doit naturellement être chaud, ſe tournera à l'oueſt. On pourroit appliquer ce raiſonnement aux courans, & dire que les eaux qui partent d'abord directement de l'équateur vers les poles par la ſurface de la mer, prennent peu-à-peu une direction de l'oueſt à l'eſt : mais je ne crois pas ces changemens de direction dans les courans en queſtion bien ſenſibles ; parce que l'adhérence mutuelle eſt beaucoup plus grande dans l'eau que dans l'air, que les grands continens forcent l'eau à ſuivre le mouvement journalier de la terre, & enfin parce que le mouvement des courans d'eau eſt plus lent que celui des courans d'air.

XXXVII.

On aura remarqué que, ſuivant notre théorie, les mouvemens des eaux & de l'air ſont préciſément oppoſés entre eux près la ſurface de la mer. Cette circonſtance ne ſçauroit manquer de changer un peu la choſe à cauſe de cette adhérence des fluides, dont nous avons ſi ſouvent parlé, & qui eſt la cauſe que tous les vents de durée produiſent des courans du même côté : il ſe pourra donc faire que tout près la ſurface de mer les courans en queſtion ſoient tout-à-fait inſenſibles, ou peut-être même qu'ils prennent une direction contraire à leur direction naturelle ; mais je ſuis perſuadé qu'ils ſeront tels que je les ai décrits, pour peu que les eaux ſoient profondes : c'eſt ainſi que les vents arrêtent ſouvent les eaux d'une rivière vers la ſurface à ſon embouchure, & qu'elle ne laiſſe pas de jetter la même quantité d'eau dans la mer. Qu'on me permette d'alléguer ici deux obſervations faites par Dampier, qui éclairciſſent toute notre théorie, & qui prouvent que dans de très petites profondeurs les courans peuvent être entièrement oppoſés. Ce célèbre voyageur dit dans le ſecond tome de ſon *Voyage autour du Monde*, *p.* 387, édition de Rouen, de 1715. » Ce » n'eſt pas une choſe extraordinaire de voir deux cou- » rans oppoſés en même-temps & en même lieu, la ſur- » face de l'eau courant d'un côté, & le reſte du côté » contraire ; j'ai vû moi-même étant à l'ancre, le cable » emporté par deux courans contraires, le bas du cable » tors d'un côté, & le haut d'un autre. « Nous voyons notre théorie ſur les courans & contre-courans & ſur la circulation des eaux de la mer, confirmée par cet exemple. En voici un autre qui prouve que les courans peuvent être oppoſés dans de très-petites profondeurs. Le même auteur dit au même endroit *que les courans repouſſent quelquefois le navire, la poupe avant contre-vent & marée* ; c'eſt là un effet qu'un courant ſimple ne ſçauroit jamais produire, & il faut que le navire nage entre-

deux eaux, qui aient un mouvement contraire pour être ſujet à un tel accident. Il arrive auſſi ſouvent que le vaiſſeau obéit peu ou point du tout au gouvernail ſans qu'on en voie aucune raiſon; cela ne ſçauroit arriver à mon avis que lorſque le vaiſſeau ſe trouve dans un double courant: ce double courant tend à mettre le vaiſſeau dans une certaine poſition déterminée dont il eſt difficile de le détourner. Nous voyons donc qu'il peut y avoir des courans à moins de 16 pieds de profondeur & entièrement oppoſés à ceux de la ſurface. Cette remarque eſt très-eſſentielle à notre ſujet. Il pourroit y avoir à la ſurface de la mer un courant du nord au midi : je ſuppoſe qu'on ſoit à même d'obſerver parfaitement ce courant, il ne faudroit pas d'abord conclure de cette obſervation que le vaiſſeau ſera porté vers le Sud, puiſqu'il pourroit par un contre-courant plus fort dériver vers le nord.

XXXVIII.

La circulation de l'air qui ſe fait, dans chaque hémiſphère, nous fournit encore une explication aſſez naturelle des ſaiſons sèches & humides. Je préſume que cette région verticale d'air, qui ſépare les deux tourbillons, qui dans le temps des équinoxes eſt à l'équateur, qui s'approche alternativement des deux tropiques, eſt toujours plus ſujette aux pluies que les autres régions. La deſcription qu'on nous fait des ſaiſons sèches & humides me paroît fort conforme à cette conjecture. M. Dampier dit, par exemple, au tome 2. *page* 358. *en general les pays ou les parages qui ſont ſous la ligne ou auprès ont le plus fort des pluies aux mois de mars & de ſeptembre :* mais je ne m'arrêterai pas à cette remarque, ne l'ayant faite que pour confirmer notre ſyſtème en général.

XXXIX.

Voilà les deux grandes cauſes primitives des courans, l'une conſtante & l'autre périodique anniverſaire. Je fe-

rai encore mention d'une troiſième, différente de la ſeconde, ſi on l'examine de près. Il eſt clair que notre hémiſphère ſeptentrional doit être plus chargé d'eau pendant les ſix mois d'hiver, que pendant le reſte de l'année ; il faut donc qu'une certaine quantité d'eau aille & revienne de ſix en ſix mois d'un hémiſphère en l'autre ; le paſſage des eaux ſe fera ſous la forme d'un courant ſimple ſans produire aucun contre-courant par le fond. Je ne m'arrêterai pas à ces courans, parce qu'ils ne ſçauroient qu'être extrêmement petits. Je remarquerai plutôt que ce flux & reflux annuel d'un hémiſphère à l'autre, quoique fort petit, par rapport à la maſſe de la terre, ne ſçauroit cependant manquer de cauſer une petite nutation annuelle de l'axe de la terre.

X L.

Les courans périodiques Lunaires ne peuvent être que des ſuites du flux & reflux de la mer : l'irrégularité de la terre diverſifie le mouvement des marées à l'infini ; elle leur donne quelquefois le mouvement des courans, en ce que les eaux ſont portées d'un même côté, pendant quelques jours de ſuite ; on pourroit même concevoir une telle ſtructure, comme j'ai déjà inſinué ci-deſſus, qui fit que les eaux coulaſſent conſtamment d'un même coté dans certains endroits particuliers ; les marées deviendroient de vrais courans, & ces courans ne manqueroient pas d'avoir des inégalités périodiques Lunaires, mais comme toute cette matière a déjà été traitée par d'autres avec toute l'exactitude poſſible, je ne m'y arrêterai pas.

X L.

Ces variations de chaleur du jour à la nuit pourroient bien encore produire quelque mouvement dans les eaux de la mer, ſous la forme de marées de douze en douze heures ſolaires. Mais ce mouvement ſera peut-être imper-

ceptible, parce qu'un temps de 24 heures ne ſuffit pas pour changer conſidérablement, & à de grandes profondeurs, la chaleur & la denſité des eaux. Il ſeroit à ſouhaiter que nous euſſions un grand nombre d'obſervations ſur le degré de chaleur des eaux de la mer, faites en différentes heures du jour, en différentes ſaiſons, en différentes hauteurs, & à pluſieurs différentes profondeurs: la phyſique en général, & notre ſujet en particulier, en tireroient de grandes lumières, tout comme des obſervations barométriques. M. de Buffon dit dans ſon hiſtoire naturelle, *tom.* 1. *pag.* 440, que les plongeurs aſſurent qu'il fait fort froid dans les vallées de la mer: cette circonſtance me confirme dans ma conjecture (§ 20) que les montagnes du fond de la mer, ſur tout celles qui ſont perpendiculaires à la direction des courans, les arrêtent; car ſi les eaux des vallées de la mer avoient un mouvement ſenſible, elles ne pourroient avoir une température fort différente de celle des autres eaux, tant parce que les eaux ſe mêleroient trop, que parce qu'étant continuellement tranſportées d'un endroit à l'autre, elles ne pourroient changer aſſez tôt leur degré de chaleur.

L'air recevra une beaucoup plus grande impreſſion des changemens journaliers du chaud & du froid que les eaux: auſſi ſuis-je perſuadé que ces changemens cauſent, pendant les 24 heures, alternativement un petit vent oriental & occidental. Les vents de terre & les vents de mer, dont Dampier donne une deſcription fort exacte, & qui proviennent ſans doute des variations du chaud & du froid, pendant le jour & la nuit, prouvent aſſez que leſdits changemens ſuffiſent pour produire ces allées & venues réciproques de l'air. Voici comme il me ſemble qu'on doit expliquer les vents de terre & les vents de mer. Les rayons du ſoleil échauffent l'air beaucoup plus par reverbération, qu'ils ne le font immédiatement; c'eſt-là la raiſon pourquoi l'air de la Zone-Torride devient d'autant plus froid qu'il eſt d'autant plus élevé par-deſſus la

ſurface de la mer ; cela étant, le ſoleil échauffera moins l'air de mer que l'air de terre, parce que les eaux ſont tranſparentes, & moins propres à la reverbération que la terre : d'où je conclus que pendant le jour l'air de terre eſt plus chaud que l'air de mer ; & que pendant la nuit c'eſt le contraire, parce que la chaleur moyenne doit être de part & d'autre égale ; d'autres cauſes peuvent concourir à produire le même effet : ainſi on voit, par la premiere expérience du § 33, que pendant le jour l'air de mer ſera porté vers la terre, & qu'il reviendra vers la mer par la haute région ; cette circulation augmentera juſqu'à midi, après quoi elle diminuera ; après le coucher du ſoleil elle commencera à ſe faire en ſens contraire ; elle ſe renforcera juſqu'à minuit, & finira au lever du ſoleil, pour recommencer peu après la premiere circulation : tout cela eſt conforme à l'expérience. Ce qui confirme notre explication, eſt que, dans les ſaiſons humides pendant leſquelles les variations journalieres de la chaleur ſont extrêmement petites, ces vents alternatifs s'évanouiſſent preſque entierement.

Ces vents de terre & vents de mer ſont très propres pour confirmer les circulations telles que nous les avons décrites : car ſi on vouloit ſuppoſer que tout l'air apporté par le vent de mer dans l'iſle y ſoit retenu pendant tout le jour, les petites iſles ſeroient bientôt ſurchargées d'air. Suppoſons, par exemple, une petite iſle ronde, de 44000 pieds de circonférence, elle ſera aſſez grande, ſuivant les obſervations de Dampier, pour former leſdits vents. Je ne donnerai au vent de mer qu'une vîteſſe moyenne de cinq pieds par ſeconde, & il faudroit au bout des 12 heures, que l'air de l'iſle fût deux fois plus denſe qu'il n'eût été au commencement du vent de mer. Il eſt cependant sûr que les denſités de l'air y reſtent à peu près les mêmes, il faut donc que l'air s'échappe par la haute région à meſure qu'il arrive près la ſurface de la mer.

XLII.

XLII.

Voilà ce que j'avois à dire de principal ſur les courans réguliers, ſoit conſtans ſoit périodiques. Je paſſe donc aux courans variables irréguliers, & en quelque façon accidentels. C'eſt une choſe également conforme à la théorie & à l'expérience, que les vents frais pouſſent devant ſoi les eaux de la pleine mer, & forment des courans du même côté, qui durent auſſi longtemps que les vents. Ces courans ne ſont d'abord qu'un effet de l'adhérence mutuelle de l'air & de l'eau : ces premieres eaux entraînées, rencontrent des eaux calmes, ce qui fait qu'elles ſe lévent un peu, & commencent à former des ondes, qui augmentant peu à peu, forment enfin de groſſes lames ; celles-ci ſont enſuite directement expoſées au vent : ce n'eſt plus alors la ſimple adhérence qui entraîne les eaux, c'eſt, en même temps, une impulſion du vent très-forte ; cette double action peut cauſer des courans aſſez rapides. Ces courans primitifs, formés en pleine mer, pourront encore être changés, d'une infinité de façons, par les terres voiſines, par la différente configuration des côtes, par la conformation du fond d'une mer peu profonde, &c. ; ils pourront cauſer des inondations, d'autant plus grandes, que les courans ont plus d'étendue & qu'ils ſont arrêtés plus bruſquement. Si ce que j'ai dit au § 24, fondé ſur l'obſervation barométrique de M. Richer, eſt vrai, nous voyons que le courant général d'eſt, arrêté par les terres de l'Amérique, élève les eaux autour de l'iſle de Cayenne de 552 toiſes, il s'enſuit qu'un courant de la même force, & de dix dégrés d'étendue, pourra élever les eaux de plus de quatre toiſes. Il eſt clair auſſi, que les eaux entraînées doivent être remplacées, & ce remplacement pourra cauſer, par un ſecond effet, d'autres courans accidentels, qui ne doivent pas être conſidérés comme produits immédiatement par les vents, puiſque ces ſeconds courans peuvent être hors

des limites des vents. Dans les endroits d'où partent les vents, les eaux pourront baiſſer conſidérablement, ſurtout lorſque d'autres eaux ne peuvent pas remplacer librement celles qui ſont entraînées, tout comme il arrive aux bords de la mer du Sud ; ces baiſſemens ſont quelquefois aſſez conſidérables, & durent aſſez longtemps pour détruire les effets du flux de la mer, de maniere qu'il paroiſſe y avoir un reflux continuel de pluſieurs jours de ſuite.

XLIII.

Les grandes variations barométriques peuvent encore cauſer des courans accidentels : cette cauſe accompagne le plus ſouvent celle que nous venons d'expoſer ; mais elle agit par un autre principe. Si le baromètre vient tout d'un coup à baiſſer conſidérablement, il faut que la mer s'éléve au même endroit ; & ſi nous conſidérons que les mêmes variations barométriques s'étendent ordinairement fort loin, nous voyons que les eaux doivent couler en grande quantité vers le milieu de tout cet eſpace, qui peut être de 30 ou 40 dégrés à la ronde.

LXIV.

Il me ſemble encore que dans la Zone Torride, la quantité des abondantes pluies, pendant la ſaiſon humide, peut tellement ſurpaſſer l'évaporation des eaux, & au contraire que dans la bande, où il règne au même temps la ſaiſon ſéche, l'évaporation peut tellement prédominer, que l'équilibre entre les eaux des deux bandes en ſoit ſenſiblement dérangé, & que ce défaut d'équilibre occaſionne des courans. A ces cauſes, on pourroit en ajouter pluſieurs autres ; les ſimples rivières peuvent cauſer des courans ſenſibles juſqu'à de grandes diſtances ; les moindres forces ſuffiſent pour entretenir des courans circulaires ſuperficiels, ſur-tout dans les golphes : quelques-uns prétendent qu'il y a un tel courant

tout le long des côtes de la mer Méditerranée, & que les eaux circulent continuellement tout le long des côtes Européennes jusqu'au détroit de Gibraltar ; & que de-là elles s'en retournent tout le long des côtes Africaines. En examinant ces causes, on se souviendra toujours qu'un très petit défaut d'équilibre est capable de produire des courans sensibles. C'est une vérité que tous les phénomènes du flux & reflux prouvent absolument.

XLV.

Je finirai cette premiere partie par une réflexion générale sur la nature des courans, qui servira de base à notre seconde partie. Nous avons démontré, par rapport au courant simple général d'est, causé par l'adhérence des fluides, que la vîtesse doit diminuer uniformément depuis la surface jusqu'au fond de la mer, en supposant un fond de niveau & tout uni ; c'est une vérité que toutes les expériences physiques confirment : mais quand même on substitueroit une autre cause, elle ne laisseroit pas de faire à peu près le même effet dans les courans simples, l'adhérence des eaux contre le fond sera toujours assez forte pour que les eaux y soient comme entierement arrêtées ; & comme, depuis la surface jusqu'au fond, chaque lit d'eau d'une même épaisseur, doit produire une même diminution de vîtesse, il faut que les vîtesses diminuent uniformément. Je me souviens qu'en me promenant un jour tout le long d'un canal droit, large d'environ 16 pieds, & profond de trois pieds, dont les eaux couloient tout doucement, & qui charioit par hasard des feuilles d'arbre, les unes vers la surface, d'autres vers le milieu, & d'autres enfin plus bas jusqu'à toucher le fond ; je vis toujours les feuilles supérieures devancer les inférieures assez uniformément, & que celles du fond furent presque sans aucun mouvement. J'ai expliqué ensuite aux §§ 19 & 20, comment les énormes inégalités du fond de la mer diminuent ex-

trêmement les profondeurs des courans : c'eſt ce qui m'a engagé à conſidérer au milieu des eaux, un fond des courans, qui peut être beaucoup au-deſſus du fond de la mer. J'enviſagerai de la même manière les courans doubles ou plus compoſés, parce que la même raiſon y ſubſiſte. Cette ſuppoſition ſi naturelle m'a toujours paru conforme aux rélations des plongeurs, & aux obſervations faites avec la ſonde. D'ailleurs quand même il y auroit en pleine mer des endroits où le fond des courans fût extrêmement profond, ces courans ne pourroient être que très-foibles, & preſque ſans aucune conſéquence, à cauſe de la quantité d'eau déterminée qu'ils amènent.

SECONDE PARTIE.

Sur la meilleure manière d'observer & de déterminer les courans.

I.

Il s'agit à présent d'examiner si l'on pourra toujours connoître les courans, & en déterminer la direction & la vîtesse ; c'étoit d'abord l'unique question de l'Académie. Il faudroit être bien peu versé dans l'histoire de la navigation, pour ignorer d'un côté son importance, & de l'autre le peu de progrès qu'on y a encore fait. Il n'y a aucun doute que les plus grands génies, préférant toujours l'utile au brillant, n'en aient déjà fait l'objet de leurs recherches. Comme je n'ai rien trouvé de satisfaisant, sur cette matière, dans aucun auteur, je me serois taxé moi-même d'une trop grande témérité de l'entreprendre, si je n'avois fait réflexion que l'illustre Académie a trop de pénétration pour ne rien proposer d'impossible par sa nature ; & en même temps trop d'équité pour rejetter des idées qui, quoiqu'imparfaites, ne laissent pas d'être utiles, & peut-être les meilleures ; & qu'une bonne logique est souvent plus capable de nous conduire à de pareilles idées, qu'une grande fertilité d'esprit.

II.

Commençons par les réflexions les plus générales. Dans toutes les questions de pratique, il faut d'abord chercher dans la théorie, les principes sur lesquels on prétend fonder les moyens que la pratique doit fournir. Tant qu'on ne voit aucun de ces principes, on n'avancera pas plus que si on cherchoit un mouvement perpé-

tuel purement méchanique, auquel bien des gens qui ne manquoient ni de bon ſens ni de talens, ne ſe ſeroient jamais appliqués, s'ils avoient ſuivi ce précepte. Or, ſi un obſervateur ſe trouve dans un ſyſtème, dont toutes les parties ſe meuvent uniformément & dans une direction parallèle, ſans avoir aucune communication ni directe ni indirecte avec aucun objet pris hors du ſyſtème, il lui eſt tout-à-fait impoſſible de s'appercevoir de ce mouvement.

III.

La réflexion que nous venons de faire nous mène d'abord à cette concluſion indubitable, ſçavoir, que ſi on ſuppoſe toutes les eaux d'un courant, mues avec une vîteſſe uniforme, parallèle & conſtante, depuis la ſurface juſqu'au fond de la mer, & qu'un navire nage au milieu de ces eaux, il ſera entièrement impoſſible de s'appercevoir de ce courant, tant qu'on n'aura aucune communication ou relation avec rien qui ſoit hors du ſyſtème commun du courant & du vaiſſeau, puiſque le navire aura toujours le même mouvement que le courant, s'il n'eſt pouſſé par aucune force, & que le ſillage du vaiſſeau ſera le même que s'il n'y avoit aucun courant. Ainſi pour déterminer ces ſortes de courans, il faut recourir à quelque principe indépendant du courant; & il eſt facile de faire une énumération parfaite de tous les principes poſſibles pour examiner enſuite l'uſage qu'on en peut faire. Ces principes ne ſçauroient être que les aſtres, ou l'air, ou quelque terre voiſine, ou enfin le fond de la mer. J'examinerai en peu de mots l'uſage qu'on peut faire de chacun de ces quatre principes, en faiſant d'abord abſtraction du ſillage du vaiſſeau, qui n'eſt que le mouvement relatif du vaiſſeau & du courant, qu'on peut & qu'on doit toujours déterminer à part, pour réduire la queſtion au cas le plus ſimple, qui eſt de ſuppoſer le vaiſſeau ſimplement emporté par le courant, ſans

avoir aucun mouvement relatif avec le courant.

IV.

Quant aux aſtres, ils ne pourront être d'aucun uſage qu'au bout d'un grand intervalle de temps, en cherchant le plus ſouvent, & le mieux qu'on peut, les variations en longitude & en latitude. C'eſt effectivement par ce ſeul principe qu'on a reconnu l'exiſtence des courans en pleine mer ; mais comme les courans ſont fort variables d'un endroit à l'autre, il eſt impoſſible de tirer aucun fruit de ce principe pour déterminer les courans en tout temps & en tout lieu. On voit auſſi que l'air ne peut ſervir, tout au plus, que pour déterminer le mouvement relatif des eaux & de l'air; de ſorte qu'il n'y a rien à eſpérer non plus de ce côté-là. Si l'on ſe trouve dans le voiſinage de quelque terre, ou côte, ou iſle, la ſimple géométrie enſeigne tout ce qu'on peut faire pour voir le chemin du vaiſſeau, en tant qu'il eſt emporté par le courant: ce cas eſt trop facile & trop rare pour que je m'y arrête. Quant au fond de la mer, ſuppoſé qu'on puiſſe l'atteindre, toutes les opérations qu'on peut faire pour déterminer les courans par ſon moyen, ſe réduiront au principe de l'ancrage. J'examinerai ce cas ci-deſſous, & je ne fais ces remarques préliminaires, que pour ne point ſortir de la ſeule route qui peut conduire, en quelque façon, à tous les moyens poſſibles de déterminer les courans, & nous mettre en état d'en choiſir les meilleurs.

V.

Nous voyons donc qu'en ſuppoſant toutes les eaux, qui forment un certain courant, mues d'une vîteſſe & direction commune depuis la ſurface juſqu'au fond de la mer, il n'y a aucun autre moyen de ſatisfaire à notre queſtion, que celui de rapporter le mouvement des eaux au fond de la mer : ce moyen eſt à la vérité le plus ſûr & le plus exact, mais il eſt fort rare de ſe trouver dans

les circonſtances qu'il demande ; & hors de ces circonſtances, nous ſommes réduits à ne rien eſpérer davantage. Voilà ſans doute la raiſon du peu de progrès qu'on a fait juſqu'ici ſur notre queſtion : c'eſt qu'on n'a pas enviſagé les courans comme ils doivent l'être.

J'aurois moi-même renoncé à toute eſpérance d'aller plus loin, ſi je n'avois examiné ſcrupuleuſement les cauſes & la nature des courans avant que de penſer aux moyens de pouvoir les déterminer. Nous avons vû, dans notre première Partie, que les courans, bien loin d'être les mêmes pour toute la profondeur de la mer, ſont néceſſairement fort inégaux, & que les eaux ne ſçauroient qu'être comme entièrement calmes au-deſſous d'une certaine profondeur. Cette heureuſe propriété nous fournit un principe tout nouveau pour déterminer les courans; c'eſt celui de rapporter le mouvement des eaux qui ſont vers la ſurface, aux eaux qui ſont au-deſſous du *fond des courans*. Ce dernier principe nous ſeroit devenu abſolument inutile, ſi toute la maſſe d'eau n'avoit qu'un ſeul & même mouvement depuis la ſurface juſqu'au fond de la mer.

V I.

Il eſt évident que nous avons fait juſqu'ici une énumération parfaite de tous les principes, & qu'ainſi nous ne pouvons encore nous être écartés du chemin de parvenir à la meilleure ſolution de notre problême ; Nous voyons donc qu'excepté le cas de quelque terre voiſine & viſible, qui ne mérite pas que nous nous y arrêtions davantage, nous n'aurons plus aucun autre principe à conſidérer que celui du fond de la mer, & celui du fond du courant : cette conſidération m'engage à diviſer notre queſtion en deux cas. Le premier ſera celui où l'on pourra atteindre le fond de la mer; & le ſecond, quand on pourra avoir quelque communication avec la région des eaux calmes, qui ſont au-deſſous du fond du courant;

courant ; hors de ces deux cas, j'oſe avancer poſitivement qu'il eſt tout à-fait impoſſible de déterminer les courans en pleine mer ; car enfin quel autre point pourroit-on conſidérer, qui fût ou fixe, ou dont le mouvement fût connu, pour y rapporter le mouvement des eaux? J'avouerai même que le premier cas ne ſçauroit être bien fréquent en pleine mer ; mais je crois par-contre, qu'il ſera fort rare qu'on ne ſe trouve dans le ſecond cas ; & pour peu qu'on veuille ſe relâcher de l'exactitude entière, je ſuis perſuadé qu'on s'y trouvera toujours : je me flatte que ceux qui auront daigné lire avec attention notre première partie en conviendront avec moi. Ainſi le principe le plus général & le plus utile ſera celui de rapporter le mouvement des courans aux eaux calmes, qui ſont au deſſous du fond des courans. C'eſt cependant un principe auquel perſonne n'a encore penſé, que je ſçache. J'aurai d'autant plus de ſoin à l'examiner & à le mettre à profit.

VII.

Avant que de m'engager dans ces recherches de pratique, il ſera bon de remarquer encore que les changemens du mouvement des eaux d'un ſeul & même courant par rapport à leurs différentes profondeurs, peuvent ſe faire aſſez bruſquement ; c'eſt ce que nous avons encore établi dans notre première partie, tant par des raiſons ſolides que par des obſervations faites par Dampier : ainſi, pour déterminer entièrement les courans, il ne ſuffira pas de rechercher le mouvement des eaux à la ſurface de la mer ; il faudra trouver encore une manière d'en déterminer le mouvement depuis la ſurface de la mer, juſqu'au fond du courant : cela nous ſervira non-ſeulement à connoître plus diſtinctement la nature des courans par obſervations, mais il en réſultera encore une beaucoup plus grande utilité pour la navigation ; les courans pourront ſouffrir des changemens ſenſibles de-

puis la surface de la mer jusqu'à la profondeur qui répond à la quille du vaisseau, & en ce cas on jugera mieux de la dérive par le mouvement des eaux qui auroient 6 ou 7 pieds de profondeur, que par celui qu'il y auroit tout près de la surface. Tâchons à présent de tirer le plus d'utilité qu'il nous sera possible, des deux principes que j'ai exposés au §. 6. les seuls qu'on peut employer.

VIII.

On profitera du fond de la mer, en jettant l'ancre; le vaisseau étant amarré, c'est sans doute une chose très-facile d'observer le courant, s'il y en a un, & d'en déterminer la vîtesse & la direction. Si on veut se contenter de connoître le mouvement des eaux à la surface, on pourra se servir de cet instrument qu'on emploie pour trouver le sillage du vaisseau; c'est un morceau de bois fait en forme de navette garni par le bas d'un morceau de plomb & attaché à une ficelle, qui est roulée sur un espèce de devidoir, & distinguée de distance en distance par des nœuds : on jettera la navette dans la mer, qui sera aussitôt emportée par le courant; on comptera le nombre des nœuds qui se dévident dans un temps donné, & par-là on sçaura aussitôt la vitesse du courant, près la surface de la mer; on remarquera aussi la direction de la ficelle, qui sera la même que celle du courant; cette manœuvre est trop connue pour que je m'arrête à la décrire avec un plus grand détail, & à marquer les précautions qu'il faut prendre pour la faire avec plus d'exactitude.

IX.

La méthode précédente ne pouvant servir qu'à déterminer le mouvement des eaux à la surface de la mer, il faudra recourir à une autre méthode pour déterminer le mouvement des eaux à telle profondeur, qu'on voudra.

A cet effet il n'y a qu'un ſeul moyen, ou s'il n'eſt pas le ſeul, du moins ſera-t-il viſiblement le meilleur; il conſiſte à attacher une boule d'un diamètre & d'une péſanteur ſpécifique donnée à une longue ficelle, à deſcendre cette boule dans les eaux de la mer à telle profondeur qu'on voudra, à obſerver l'inclinaiſon de la ficelle, & la direction de ſon plan vertical : on ſçait qu'on peut connoître exactement la viteſſe des eaux qui pouſſent la boule par l'inclinaiſon de la ficelle ; & la direction du plan vertical de la ficelle, marquera immédiatement celle des eaux. J'ai penſé à cette méthode, & j'en ai même fait pluſieurs eſſais ſur mer, avec beaucoup de ſuccès l'année 1733, & par conſéquent longtemps avant que l'Académie ait fait imprimer une piéce de M. Poléni, qu'elle avoit couronnée, & dans laquelle l'auteur indique cette même méthode ; au reſte elle exige beaucoup de diſcuſſions géométriques, que je réſerve pour la fin de ce mémoire, pour n'en point interrompre le fil. C'eſt une matière que j'ai examinée avec d'autant plus de ſoin, qu'elle doit ſervir de baſe à preſque tout ce que nous avons à propoſer ſur notre ſujet.

On pourra donc reconnoître les courans de toiſe en toiſe de hauteur verticale, & on jugera de cette hauteur verticale par la longueur de la ficelle mouillée, multipliée par le coſinus de ſon inclinaiſon. On ſçaura par là toutes les variations des courans ; & quand la ficelle ne marquera plus aucune variation ni inclinaiſon ſenſible, ce ſera une marque que la boule attachée à la ficelle ſera parvenue dans la région des eaux calmes. Nous ſerions bien plus en état de raiſonner ſur la nature des courans, & de perfectionner nos méthodes, ſi nous trouvions dans les auteurs un grand nombre de ces ſortes d'obſervations ſi faciles à faire, quand le vaiſſeau eſt à l'ancre : il eſt fâcheux que nous n'en trouvions aucune. On ſera auſſi attentif que le vaiſſeau ſoit bien amarré dans le temps qu'on fait les obſervations ; car ſi le vaiſſeau chaſ-

ſoit ſur l'ancre, la détermination des courans ne ſeroit pas juſte.

X.

J'eſtime à la vérité le mouillage comme le moyen le plus exact de déterminer les courans ; mais il faut avouer auſſi, d'un autre côté, que c'eſt un moyen incommode, s'il faut jetter l'ancre uniquement dans cette vûe, & que d'ailleurs il eſt rare que la mer ne ſoit trop profonde pour mouiller l'ancre, la plus grande profondeur des mouillages n'étant que de 40 ou 50 braſſes. J'ai cependant fait réflexion, à l'égard de cette difficulté, qu'on pourroit bien employer le même principe pour des profondeurs beaucoup plus grandes: on donne aux cordeaux des ſondes juſqu'à 200 braſſes de longueur ; on pourroit donc attacher à ces cordeaux de petites ancres qui n'auroient pas plus de 18 à 20 livres de poids, qui eſt eſt celui qu'on donne aux corps des ſondes : cette petite ancre ne ſeroit deſtinée qu'à amarrer une petite bouée ou un morceau de liege, qui flotteroit ſur l'eau ; moyennant ce petit morceau de liége arrêté à la ſurface de la mer, il ſeroit facile de déterminer le courant, ſurtout ſi on vouloit ſe contenter de le connoître tel qu'il eſt a la ſurface ; on n'auroit qu'à attacher au morceau de liége cette ficelle, dont j'ai parlé au §. 8. & à faire enſuite la même opération, qu'on fait pour trouver le ſillage. Il eſt aiſé à comprendre que tout cela ſera fort facile à exécuter ſur la chaloupe, dont je prévois que le ſecours ſera fort ſouvent néceſſaire pour la ſolution de notre queſtion : mais ſi l'on vouloit déterminer le courant dans toute ſa profondeur de la manière que j'ai expoſée au §. 9. je trouve que le meilleur moyen en ſera de retenir la chaloupe, moyennant la rame, toujours près du morceau de liége, & de faire cependant ſur la chaloupe les mêmes obſervations, que j'ai propoſées de faire audit §. 9. ſur le vaiſſeau amarré.

XI.

Voilà tout ce que j'ai pu imaginer pour mettre à profit notre premier principe, qui eſt de ſe ſervir du fond de la mer : on voit même aſſez clairement que c'eſt tout ce qu'on peut faire. Voyons à préſent quels moyens nous reſtent lorſqu'on ne trouve point de fond avec la ſonde. S'il y a de tels moyens, ils ne peuvent abſolument être fondés que ſur le ſeul principe qui nous reſte, & qui conſiſte à rapporter le mouvement des lits d'eau de différentes profondeurs, aux eaux calmes, qui ſont au-deſſous du fond des courans. Nous ſommes donc réduits à ſuppoſer qu'on puiſſe atteindre le fond des courans, ou du moins une région vers le fond, où les eaux n'aient plus qu'un mouvement inſenſible. Sans une ſemblable ſuppoſition nous aurions actuellement épuiſé toute cette matière ; mais les raiſons que nous avons expoſées dans notre première partie pour l'établir, me ſemblent ſi convaincantes, & cette hypothèſe me paroit ſi conforme aux obſervations & aux expériences, qui ont quelque rapport avec cette matière, que je croirois avoir grand tort, ſi je n'en faiſois pas notre reſſource principale. Je n'héſiterois pas même d'adopter cette hypothèſe, quand toute notre théorie ſur les cauſes des courans ſeroit fauſſe ; car enfin quelles que puiſſent être les cauſes des courans, elles ne ſçauroient être qu'extrêmement petites vers le fond de la mer, & les moindres obſtacles ſeront capable d'en prévenir tout l'effet : à mon avis, une chaîne de montagnes pourra arrêter les courans juſqu'à des diſtances énormes, de ſorte que les courans paſſent par deſſus les montagnes du fond de la mer, ſans ſe mêler preſque avec les eaux plus baſſes ; c'eſt de cette manière que ſe forme la région des eaux calmes ; c'eſt ainſi que le vent général d'eſt eſt arrêté par les terres de l'Amérique, & qu'on ne le trouve dans la mer du ſud, qu'à une très-grande diſtance des côtes ; la même choſe arrivera

à bien plus forte raiſon aux eaux de la mer, & cela d'autant plus, qu'il n'y a nul doute que de pareils obſtacles ne reviennent de diſtance en diſtance, & que tout le fond de la mer entière n'en ſoit couvert. Je prie le lecteur de ſe rappeller tout ce que j'ai dit ſur cette matière dans notre première partie : cette hypotèſe doit d'ailleurs nous faire d'autant moins de peine, que les courans ſont néceſſairement d'autant plus foibles par eux-mêmes, qu'ils ſont plus profonds. J'avoue que les profondeurs des courans ſenſibles pourront être inégales ; il y aura peut-être des courans, qui ne ſeront ſenſibles que juſqu'à la profondeur de 8 ou 10 braſſes, d'autres juſqu'à 20 ou 30 : apparemment il ſera rare d'en trouver de plus profonds, & il ſe peut qu'il n'y en ait aucun qui ait plus de 50 braſſes de profondeur : moins les courans ſeront profonds, plus on pourra les déterminer exactement ; & j'ai trouvé qu'on peut les déterminer avec aſſez d'exactitude juſqu'à cent braſſes de profondeur : au-delà de cette profondeur, on commence à rencontrer des obſtacles que nous verrons cependant n'être qu'accidentels, qui peu-à-peu augmentent juſqu'à devenir enfin inſurmontables.

XII.

Suppoſons à la place du vaiſſeau un ſimple radeau, qui flotte ſur les eaux de la mer ; ce radeau aura tout-à-fait le même mouvement que le courant près de la ſurface. S'il ſe trouve ſur ce radeau un obſervateur muni d'un globe attaché à un long cordeau qu'il faſſe deſcendre dans les eaux de la mer, à pluſieurs différentes profondeurs, il arrivera ou que le cordeau conſerve ſa direction verticale, & en ce cas l'obſervateur pourra être aſſuré qu'il n'y a point de courant, ou bien que le cordeau prenne ſucceſſivement de différentes inclinaiſons, ce qui marquera auſſitot qu'on ſe trouve dans un courant. Je ſuppoſe que moyennant ces inclinaiſons

observées on puisse déterminer exactement les vîtesses des différens lits d'eau, relativement à celle du radeau, & c'est-là un article que je traiterai ci-dessous, avec toute l'attention qu'il mérite ; si l'on se trouve dans un courant simple, le cordeau sera incliné de plus en plus, à mesure qu'on le file, & les vîtesses relatives qui répondront à toutes ces inclinaisons augmenteront suivant notre théorie à peu près en même raison que les profondeurs verticales ; mais il arrivera bientôt que cette loi soit visiblement interrompue, & que le cordeau commence à n'augmenter que très-peu son inclinaison, c'est alors une marque que la boule attachée au cordeau s'approche du fond du courant. Enfin, la boule pourra être censée avoir atteint la région des eaux calmes, quand le cordeau ne montrera plus de variations sensibles, quoiqu'on en file encore plusieurs brasses. Alors la dernière inclinaison du cordeau donnera à connoître la vîtesse absolue du courant à la surface de la mer, & par les vîtesses relatives qu'on a observées précédemment, on pourra déterminer aussi les vîtesses absolues de chaque lit d'eau, à telle profondeur qu'on voudra : si on se trouve dans un double courant, ou dans un autre courant composé, la méthode sera entièrement la même. Je remarquerai seulement que les vîtesses relatives n'iront pas en augmentant depuis la surface jusqu'au fond du courant ; elles n'augmenteront que jusqu'à une certaine profondeur, & puis elles décroîtront ; les vîtesses relatives formeront donc à une certaine profondeur ce qu'on appelle *maximum*, & la boule étant parvenue dans cette région, le cordeau ne montrera aucune variation sensible pendant quelque temps ; on pourroit croire d'avoir actuellement atteint la région des eaux calmes pendant qu'on en seroit encore fort éloigné ; il ne faudra donc pas s'arrêter à ces premières apparences, & filer encore plusieurs brasses de cordeau ; si après cela le cordeau se rapproche de la verticale, il faudra continuer l'opération jusqu'à ce qu'on

ſoit ſûr d'avoir atteint la région des eaux calmes. Voilà une petite ébauche de notre nouvelle méthode, fondée ſur le ſeul principe qui nous reſtoit, qui a ce grand avantage, qu'on peut la ſuivre en tout temps, & en tout lieu. Mais cette première idée que nous venons de donner de notre méthode, demande pluſieurs éclairciſſemens & corrections.

XIII.

Si nous conſidérons maintenant un vaiſſeau à la place du radeau, il pourra arriver que le vaiſſeau flotte, (car je fais encore abſtraction de ſon ſillage) dans un courant aſſez variable pour avoir des inégalités depuis la ſurface de la mer, juſqu'à la profondeur de la quille : en ce cas il y aura quelque inégalité entre la vîteſſe abſolue du vaiſſeau & celle de la ſurface du courant. On obſervera donc alors que le cordeau s'incline ſenſiblement auſſitôt que la boule eſt plongée dans l'eau ; la quantité de cette première inclinaiſon & la poſition du plan vertical qui paſſe par le cordeau donneront à connoître le mouvement relatif des eaux de la ſurface, & celui du vaiſſeau : les obſervations ſuivantes doivent être rapportées pareillement au mouvement du vaiſſeau ; & enfin la dernière obſervation montrera le mouvement abſolu du vaiſſeau, qui fait ſa vraie dérive en tant qu'elle eſt produite par les courans : ce n'eſt que celle-ci qui intéreſſe la navigation ; mais ſçachant le mouvement abſolu du vaiſſeau, & connoiſſant en même-temps par toutes les obſervations réunies le mouvement relatif de chaque lit d'eau, avec celui du vaiſſeau, on en pourra déterminer le mouvement abſolu de chaque lit d'eau, & toutes les inégalités du courant, tant en direction qu'en force : ainſi les obſervations intermédiaires ne ſont tournées que du côté de la phyſique. Ce que j'ai dit au §. 37. de la première partie, fait aſſez voir que cette réflexion n'eſt pas à négliger.

XIV.

XIV.

Nous avons ſuppoſé encore que le vaiſſeau flotte ſimplement dans les eaux de la mer, ſans ſouffrir aucune autre impreſſion que celle du courant; il faut tâcher de ſe mettre autant qu'il eſt poſſible dans le cas de cette ſuppoſition; les mariniers ſçauront mieux que moi ce qu'il convient de faire pour cet effet; s'il faut amener toutes les voiles, ou s'il convient mieux d'en iſſer d'autres qui arrêtent le vaiſſeau, de façon qu'on ne remarque plus aucun ſillage: peut-être que le meilleur expédient ſera de faire les obſervations ſur la chaloupe, qu'on abandonneroit à elle même, ſans employer ni rame ni voile; encore conviendroit-il d'examiner ſi le vent ne fait pas cheminer la chaloupe par l'effort qu'il exerce contre les bords: en ce cas quelques legers coups de rame pourront prévenir le petit ſillage. Je conſeillerois de jetter à la mer un corps flottant d'une peſanteur ſpécifique preſque égale à celle des eaux de la mer; il ſera facile aux rameurs de gouverner la chaloupe de manière qu'elle n'ait pas le moindre mouvement ſenſible relativement au corps flottant. En général les calmes & une mer unie ſont extrêmement favorables pour la détermination des courans: les tempêtes & une mer fort agitée rendront toutes ces obſervations fort difficiles & douteuſes. Ce ſont-là des inconvéniens qu'aucune induſtrie humaine ne pourra éviter; dans la mer Pacifique, on ſera toujours à même d'obſerver les courans avec beaucoup d'exactitude.

XV.

La mauvaiſe humeur & le peu de complaiſance des Capitaines de vaiſſeau ſont ſouvent le plus grand obſtacle aux obſervations qu'on pourroit faire; la plûpart des Phyſiciens & aſtronomes, qui ſe ſont trouvés ſur mer, s'en ſont plaint: Ceux qui commandent le vaiſſeau pour-

roient bien ſe refuſer aux conſeils que je viens de donner, & prétendre qu'on obſerve le courant ſur le vaiſſeau, au milieu du cinglage : notre méthode s'étend à la vérité juſques-là ; mais il eſt à remarquer que la détermination des courans eſt d'une nature à faire craindre preſque toujours quelque petite erreur, qui par elle-même ſeroit de très peu de conſéquence, mais qui doit devenir d'autant plus grande que le ſillage eſt plus rapide. Il conviendra donc de ne pas aller à pleines voiles, pendant qu'on fait les obſervations ; après avoir ferlé ou du moins cargué les voiles, on attendra quelques momens que le vaiſſeau ait pris ſon ſillage uniforme. M. Bouguer, à qui les mathématiques, la phyſique & la navigation ſont redevables de tant d'importantes découvertes, a démontré dans ſon excellent mémoire inſéré aux mémoires de l'Académie de l'année 1745, page 314, que, dans un vaiſſeau du premier rang, une ou deux minutes de temps ſuffiſent pour cenſer tel le ſillage. Cette uniformité du ſillage durant les obſervations eſt très-eſſentielle ; c'eſt pourquoi il faut ne rien changer, ni aux voiles, ni au gouvernail pendant tout ce temps. Enſuite on plongera d'abord la boule dans l'eau tout près de la ſurface, pour connoître le mouvement relatif du vaiſſeau, par rapport aux eaux de la ſurface ; c'eſt ce mouvement apparent qu'on prend pour le ſillage. J'exprimerai la direction & la force de ce mouvement, obſervé par AB (*fig.* 5.) ; après cela on deſcendra la boule juſques dans la région des eaux calmes, & l'on reconnoîtra toujours d'avoir atteint cette région quand le cordeau ne varie plus, ni en direction, ni en inclinaiſon ſur pluſieurs braſſes de deſcente de la boule : obſervant alors de rechef l'inclinaiſon du cordeau, & la direction de ſon plan vertical, on en pourra déduire le mouvement du vaiſſeau relativement aux eaux calmes, c'eſt-à-dire, le mouvement vrai du vaiſſeau. J'exprimerai la direction & la force de ce mouvement par AC ; ſi on tire enſuite la droite

B C, celle-ci marquera la direction & la force du courant tel qu'il eſt près de la ſurface de la mer. Cette méthode demande quelques éclairciſſemens & réflexions.

XVI.

(*a*) Comme la poſition & la grandeur de la ligne *B C* dépend de la juſte détermination des lignes *A B* & *A C*, il peut arriver que de petites erreurs dans la détermination de ces deux lignes jettent une erreur beaucoup plus grande ſur la ligne *B C*, qu'elle n'eut été, ſi l'on eût ſuivi la méthode expoſée aux §. §. 13 & 14.

(*b*) On remarquera toujours que *A C* marque le vrai mouvement du vaiſſeau, pendant que *A B* exprime ſon mouvement relatif, par rapport aux eaux de la ſurface de la mer; ainſi la ligne *B C* exprimera la direction & la force du courant près de la ſurface de la mer. Mais les obſervations intermédiaires qu'on aura faites ſur l'inclinaiſon du cordeau, & ſur la direction de ſon plan vertical, détermineront entièrement le courant pour telle profondeur qu'on voudra; car ſi l'on faiſoit, par exemple, une obſervation à la profondeur de dix braſſes, & qu'on trouvât le mouvement relatif du vaiſſeau avec les eaux de dix braſſes de profondeur répondre à la ligne *A D*, la droite *D C* exprimeroit le courant pour la profondeur de dix braſſes.

(*c*) Si le courant conſerve la même direction dans toute ſa profondeur, chaque point *D* ſe trouvera dans la droite *B C*; mais ſi les eaux du courant changent de direction dans leurs différentes profondeurs, ces points intermédiaires tels que *D* pourront s'écarter de la ligne *B C*.

(*d*) La dérive du vaiſſeau cauſée par le courant peut être exprimée en un certain ſens par la même droite *B C*; mais je trouve qu'on n'attache pas à ce mot de *dérive* un ſens aſſez précis : ce n'eſt cependant que pour connoître en tout temps la dérive, qu'on ſouhaite ſi fort

de pouvoir déterminer les courans. Je ferai donc un article à part ſur cette importante matière.

XVII.

On appelle communément dérive, la différence entre la vraie route du vaiſſeau, & ſa route eſtimée : il faut donc pour attacher un même ſens au mot de *dérive*, convenir ſur la façon d'eſtimer la route du vaiſſeau, & par conſéquent ſur la manière d'eſtimer ſa viteſſe & ſa direction. Nous avons ſuppoſé qu'on eſtime la viteſſe, ſoit par la navette qu'on jette dans l'eau, ſoit par l'inclinaiſon du cordeau en plongeant la boule tout près de la ſurface de la mer, ces deux manières reviennent au même; & on voit que la viteſſe du vaiſſeau eſtimée de l'une ou de l'autre manière, n'eſt proprement que la viteſſe relative du vaiſſeau, par rapport aux eaux de la ſurface de la mer ; En ce ſens donc la dérive du vaiſſeau doit être réellement exprimée par *BC*. Mais je ne ſçais s'il n'y a pas quelque équivoque ſur l'eſtime de la direction du vaiſſeau : ſi on veut que la ligne *BC* marque la dérive du vaiſſeau, il faut eſtimer la direction du vaiſſeau, par celle du plan vertical du cordeau, en plongeant la boule près de la ſurface de la mer, & il eſt à remarquer que cette direction n'eſt pas préciſément celle de la quille, qu'on prend, ſi je ne me trompe, pour la direction de la route du vaiſſeau. Il eſt vrai que l'une & l'autre manière d'eſtimer la direction de la route du vaiſſeau reviendroient encore au même, ſi le vaiſſeau ne dérivoit que par l'action d'un courant, qui ne ſouffrît aucune variation depuis la ſurface de la mer, juſqu'à la profondeur de la quille: mais ſi le courant eſt ſenſiblement variable tout près de la ſurface, & ſurtout ſi un vent de coté fait dériver en même-temps le vaiſſeau, il eſt ſûr que la direction de la quille n'eſt plus la même, avec celle du plan vertical du cordeau ; en tenant la boule plongée un peu au-deſſous de la ſurface de la mer, l'an-

gle compris entre ces deux directions donnera principalement l'eſtime de la dérive du vaiſſeau, en tant qu'elle eſt produite par le vent ; mais ſi l'on ſuit les régles que nous avons données pour la conſtruction des lignes AB & AC, alors la ligne BC marquera la vraie dérive, ſur laquelle la dérive cauſée par le vent n'aura aucune influence, & le point C marquera le vrai lieu du vaiſſeau. On voit bien au reſte que dans toutes ces opérations il n'y a point de diſtinction à faire entre les courans & les marées, les uns & les autres faiſant la même impreſſion ſur le vaiſſeau. Cependant un phyſicien les reconnoîtra facilement par les variations, qu'il obſervera aux mouvemens des eaux, en réitérant les mêmes obſervations de trois en trois heures.

XVIII.

Je n'ai mis le précédent article que pour me conformer aux principes ordinaires de la Navigation, car en adoptant nos principes, on eſt en état de déterminer immédiatement la ligne AC & le point C, qui marquent la vraie route & le vrai lieu du vaiſſeau, ſans qu'on ait beſoin de s'embarraſſer en aucune façon des courans, des marées ou des vents de côté, ni des dérives qu'ils cauſent. En tenant la boule plongée dans la région des eaux calmes, l'inclinaiſon du cordeau & la direction de ſon plan vertical marqueront à chaque moment le vrai ſillage, & la vraie route du vaiſſeau. Il n'y aura alors plus d'autre dérive ou erreur à craindre, que celle qui pourroit provenir d'une variation inconnue de la déclinaiſon de l'aiguille aimantée : l'expérience pourra décider, ſi un journal dreſſé conformément à notre principe, ne ſera pas plus exact qu'un autre qu'on formeroit ſelon les principes ordinaires, ſurtout ſi on prend ſoin de vérifier ſouvent par des obſervations aſtronomiques la déclinaiſon de l'aiguille. Il n'y a en ce cas plus rien à craindre, que les fautes d'obſervations qui ne ſçau-

roient être de grande conſéquence, comme devant naturellement ſe redreſſer d'elles-mêmes par leur grand nombre, puiſqu'il n'y a point de raiſon pour les trouver plutôt trop grandes, que trop petites, ou pour s'écarter de la vraie direction, plutôt d'un côté que de l'autre : il n'eſt pas de ces erreurs comme de celles que les courans jettent ſur l'eſtime ordinaire de la route, parce que les courans peuvent porter le vaiſſeau d'un même côté pendant une longue navigation.

XIX.

La grande utilité & l'excellence de nos méthodes & de nos principes, doit nous faire redoubler notre attention pour tout ce qui peut contribuer à la juſteſſe des obſervations. Pour meſurer l'angle d'inclinaiſon du cordeau, on ſe ſervira d'un quart de cercle, dont l'alidade mobile ſoit garnie de deux petits anneaux, l'un placé préciſément au centre du quart de cercle, & l'autre à l'extrémité de l'alidade, & on fera paſſer le cordeau par ces deux anneaux : cette alidade ſera librement mobile, & ſon centre de gravité placé au centre du quart de cercle : de cette manière on pourra filer le cordeau à travers les deux anneaux, ſans que l'alidade en ſoit dérangée. Quant à la meilleur manière de s'aſſurer ſur mer de la poſition horizontale de l'alidade immobile, c'eſt un article qui a déjà été examiné ſouvent, & avec tout le ſuccès qu'on pouvoit eſpérer : je ne m'arrêterai donc pas à cette recherche, non plus qu'à celle de la meilleure manière d'obſerver la direction du plan vertical du quart de cercle, qui doit être le même que celui du cordeau prolongé, à quoi on ſera attentif. Ce n'eſt pas dans ces recherches que l'Académie fera conſiſter ce que notre pratique peut avoir d'eſſentiel, ſurtout dans une queſtion de cette nature. La ſeule difficulté qui me fait de la peine, conſiſte dans l'action des eaux contre le cordeau, qui tient la boule ſuſpendue ; Dans les courans qui n'au-

roient qu'une vingtaine de toiſes de profondeur, cette difficulté ne ſera d'aucune importance : mais elle augmentera à meſure que les courans ſeront plus profonds, & ſi l'on vouloit ſuppoſer des courans dont le mouvement fût ſenſible à plus de cent toiſes de profondeur, ce ne ſeroit plus qu'aſſez imparfaitement qu'on pourroit déterminer ces courans : mais je ſuis fort trompé, ſi de tels courans exiſtent ; quoiqu'il en ſoit, notre méthode étant l'unique, il ne s'agit que de lui donner toute la perfection dont elle eſt ſuſceptible, & de remédier autant qu'il eſt poſſible aux inconvéniens qui ſe préſentent. Cette nouvelle tâche nous fournira en même-temps quelques réflexions particulieres pour la détermination des courans. Nous ne pouvons plus nous diſpenſer dans ces recherches du ſecours de l'analyſe.

X X.

Propoſition 1. Si on nomme Z la hauteur verticale de laquelle un corps tombant librement acquière la vîteſſe relative du courant & de la boule, l'effort horizontal du courant contre la boule eſt égal au poids d'un cylindre d'eau, dont la baſe eſt le grand cercle de la boule & la hauteur $\frac{1}{4}Z$.

On a fait, & ſurtout M. Newton, un grand nombre d'expériences, qui confirment cette propoſition avec une exactitude ſurprenante : il eſt vrai cependant que, dans les mouvemens extrêmement lents, les expériences s'écartent un peu de la propoſition. M. Robins a démontré par d'autres expériences que les mouvemens extrêmement rapides s'en éloignent beaucoup d'avantage; mais pour les mouvemens moyens, tels que ceux des courans ſenſibles, cette régle ſatisfera toujours avec toute l'exactitude imaginable : avec tout cela je ne la traite que comme une vérité phyſique, quoique je n'ignore pas les théories qu'on emploie pour la demontrer ; car ces mêmes théories ne ſatisfont pas à beaucoup près avec autant d'exactitude aux expériences, quand les corps

préſentent aux fluides une autre ſurface qu'une ſurface ſphérique. Il en eſt tout autrement de l'action d'un filet ou d'une veine d'eau, qui donne perpendiculairement contre une ſurface plane. Cette action peut-être déterminée par les vraies loix de la méchanique, parce qu'on voit clairement la façon d'agir. Les expériences bien imaginées & exécutées en confirment exactement la théorie, de même que celle de la réaction ; & cependant depuis les temps de Mariote, qui a été trompé par de fauſſes expériences, la plupart des phyſiciens & des mathématiciens la ſuppoſent encore de la moitié plus petite qu'elle n'eſt.

XXI.

Propoſition 2. L'effort horiſontal d'un courant contre la ſurface d'un cylindre vertical, eſt égal au poids d'un priſme d'eau, dont la baſe eſt la ſection du cylindre par l'axe & la hauteur $\frac{2}{3} Z$.

Cette propoſition eſt fondée ſur la théorie ordinaire qu'on ſe forme dans ces ſortes de queſtions: je doute cependant ſi elle ſatisfait aux expériences avec autant de préciſion que la précédente ; quoiqu'il en ſoit, elle ſera toujours aſſez exactement vraie pour l'uſage que nous en ferons.

XXII.

Coroll. Si l'on ſuppoſe les peſanteurs ſpécifiques de l'eau & de la boule ou du cylindre, comme g & γ, & ſi le diamètre de la boule, ou celui de la baſe du cylindre eſt $= d$, on trouve que le rapport du poids de la boule plongée, à l'effort horiſontal du courant contre la boule, eſt comme $\frac{1}{3} . \overline{\gamma - g} . d$ à $\frac{1}{4} g Z$, & que le rapport du poids du cylindre plongé, à l'effort du courant contre le cylindre vertical, eſt comme $\overline{\gamma - g} . d$ à $\frac{8}{31} g Z$, en ſuppoſant la proportion d'Archimède entre la circonférence & le diamètre d'un cercle.

XXIII.

XXIII.

Problème. La boule, ou le cylindre, étant ſuſpendu par un fil & plongé dans un courant, déterminer la relation qu'il y a entre la viteſſe du courant & l'inclinaiſon du fil, en faiſant abſtraction de l'effort du courant contre le fil.

Solution. Soit le ſinus total $= 1$, le ſinus de l'angle d'inclinaiſon du fil, c'eſt-à-dire, de l'angle que le fil fait avec la verticale $= m$; on ſçait, par les élémens de la mécanique, que le poids du corps plongé eſt généralement à l'effort du courant contre le corps comme $\sqrt{1-mm}$ à m : cette analogie donne pour la boule $Z = \frac{4}{3} \cdot \frac{\gamma - g}{g} \cdot \frac{m}{\sqrt{1-mm}} \cdot d$ & pour le cylindre vertical, $Z = \frac{33}{28} \cdot \frac{\gamma - g}{g} \cdot \frac{m}{\sqrt{1-mm}} \cdot d$. ſi on exprime les quantités d & Z par pouces, alors la quantité $2\sqrt{181 \cdot Z}$, marque le nombre de pouces que le courant fait dans une ſeconde de temps, que j'appellerai N; ſubſtituant donc pour Z, la valeur trouvée, nous aurons pour la boule

$$N = 2\sqrt{181\, Z} = 4\sqrt{\frac{181}{3} \cdot \frac{\gamma - g}{g} \cdot \frac{m}{\sqrt{1-mm}} \cdot d}$$

& pour le cylindre vertical

$$N = \sqrt{\frac{5973}{7} \cdot \frac{\gamma - g}{g} \cdot \frac{m}{\sqrt{1-mm}} \cdot d}$$

ſoit, par exemple, $d = 12$ pouces; $\gamma = \frac{5}{4} g$, l'inclinaiſon du fil de 45 dégrés, on trouve en ce cas, $N = 53,8$ pour la boule, & $N = 50,5$ pour le cylindre, & ces nombres marquent autant de pouces que le courant fait dans une ſeconde de temps.

XXIV.

Scholie 1. Toutes ces propoſitions ſuppoſent que le fil ne ſouffre aucun effort par l'action du courant; mais ſi cet effort eſt ſenſible, par rapport à celui du corps ſuſpendu, le fil en ſera courbé, & l'angle d'inclinaiſon changé. On pourroit, à la vérité, déterminer ces changemens par le calcul, ſi les vîteſſes relatives du courant étoient entièrement connues; mais comme une telle correction eſt en quelque façon douteuſe, il faut faire tout ce qui eſt poſſible pour diminuer l'action du courant contre le cordeau auquel le corps plongé eſt attaché; & il n'y a d'autre reméde à cela, que celui de ſe ſervir de cordeaux les plus forts que l'induſtrie humaine puiſſe imaginer, ſans augmenter leur épaiſſeur: c'eſt-là un article ſi eſſentiel, que je demande qu'on n'y épargne ni ſoin ni frais. Je ne ſçais quelle ſorte de matière, ni quel tiſſu il faudra donner à ces cordeaux pour les rendre les plus forts; mais quelques expériences me font croire qu'il peut être permis de ſuppoſer des cordeaux d'un quart de ligne de diamètre, qui puiſſent ſoutenir 20 liv. de poids ſans ſe rompre: peut-être en pourra-t-on faire de cette épaiſſeur, qui puiſſent ſoutenir un plus grand poids: ſi je me trompe beaucoup dans cette eſtime, il ſera facile d'imiter nos calculs pour telle autre ſuppoſition qu'on voudra faire à cet égard. Si les cordeaux étoient d'un tiſſu & d'une matière à ſe gonfler ſenſiblement ſous l'eau, il faudroit y faire attention, & meſurer toujours leur épaiſſeur lorſqu'ils ſont mouillés.

XXV.

Scholie 2. Pour avoir quelque idée de l'effort que le courant peut faire contre le cordeau de la boule, & pour voir ſi on peut négliger cet effort, par rapport à celui que ſoutient immédiatement la boule, je ne conſidererai ici que le cas le plus ſimple. Soit la longueur du cordeau $= l$,

ſon diamétre $= \delta$; & ſuppoſons que le cordeau ſoit arrêté dans ſa ſituation verticale, pendant que le même courant, porté avec une vîteſſe uniforme, donne contre le cordeau & la boule. En ce cas, nous voyons par les §§ 20 & 21, que l'effort du courant contre la boule ſera à celui du même courant contre le cordeau comme $\frac{1}{2} \cdot \frac{11}{14} \cdot dd$ eſt à $\frac{1}{3} l\delta$, ou comme 1 à $\frac{56}{33} \cdot \frac{l\delta}{d}$. Ainſi, ſi la boule n'avoit qu'un pied de diamétre, & que la longueur du cordeau fût de 600 pieds, & le diamétre du cordeau de $\frac{1}{4}$ ligne, les deux efforts en queſtion ſeroient comme 369 à 700; & par conſéquent, le cordeau ſoutiendroit un effort preſque double de celui que la boule ſouffre par le même courant. Il eſt vrai qu'il y a pluſieurs autres circonſtances à conſidérer, qui rendent cet effort, contre le cordeau, conſidérablement plus petit. Mais après avoir examiné toutes ces circonſtances, j'ai trouvé que l'effort de la boule ſera, pour notre exemple, tout au plus le double de celui du cordeau. J'avoue que c'eſt ici un grand inconvénient: faudra-t-il donc ſe contenter d'employer notre méthode pour les courans beaucoup moins profonds? Je ne crois pas qu'il faille venir à une telle extrémité; tâchons plutôt de remédier à cet inconvénient, autant qu'il eſt poſſible. Quand une méthode eſt bonne par ſon eſſence, il eſt rare qu'on ne puiſſe remédier aux inconvéniens phyſiques qu'on y rencontre. Du moins trouverons nous tous les ſecours que nous pouvons ſouhaiter dans la géométrie, pourvu qu'on veuille ſe donner aſſez de peine pour faire toutes les obſervations que les méthodes géométriques demandent.

XXVI.

Scholie 3. On peut changer d'une infinité de façons le volume & la pélanteur ſpécifique des corps à plonger, & donner par-là une proportion quelconque du poids qu'ils ont ſous l'eau, à l'effort du courant d'une certaine

vîteſſe contre les mêmes corps. On pourroit rendre la réſiſtance du cordeau inſenſible, par rapport à celle du corps plongé, en augmentant le volume de ce corps & en diminuant ſon poids ſous l'eau. Mais on tombe par-là dans d'autres inconvéniens : car l'inclinaiſon du cordeau deviendroit trop grande, & ſes variations, relativement à celles du courant, trop petites. Je crois, après avoir bien conſidéré toutes les circonſtances, qu'il convient de faire toujours que la plus grande inclinaiſon du cordeau ſoit d'environ 45 dégrés. Je vais donc donner toutes les meſures, en quantité abſolue, pour ce cas.

1. Si l'on exprime, pour la boule, le diamétre d par des pouces, ſon poids ſous l'eau ſera en livres $= 0,0218. \frac{\gamma - g}{g} . d^3$, & l'effort du courant contre la boule, ſera de même égal à ce poids.

2. Si on plonge un cylindre, dont le diamétre $= d$, & la hauteur $= a$ en pouces, ſon poids ſera $= 0,0327. \frac{\gamma - g}{g} . a d d$, & cette quantité exprimera auſſi ſa réſiſtance.

3. Si on multiplie ces poids marqués par $\sqrt{2}$, on aura la tenſion du cordeau pour la boule $= 0,0308 . \frac{\gamma - g}{g} . d^3$, & pour le cylindre

$$= 0,0462 . \frac{\gamma - g}{g} . a d d .$$

4. La force du cordeau doit être proportionelle à ſa tenſion, & comme il faut ménager autant qu'il eſt poſſible l'épaiſſeur du cordeau, il me ſemble qu'il ſuffira de multiplier la tenſion par $\frac{1}{2}$, & de rendre la force du cordeau égale au produit. Je ſuppoſerai ici que les forces des cordeaux ſont en raiſon quarrée de leurs diamétres, quoique cette régle ne réponde pas avec une préciſion entiere aux expériences. Si donc un cordeau d'un quart de ligne de diamétre, peut ſoutenir 20 livres (§. 24.); on aura la

force d'un cordeau, dont le diamétre eſt δ, $= 320\,\delta\delta$, en exprimant δ par lignes ; & ſi nous faiſons les deux tiers de cette force égaux à la tenſion du cordeau, nous aurons pour la boule $\delta = 0,0120\,d\sqrt{\frac{\gamma - g}{g}}\,d$, & pour le cylindre $\delta = 0,0147\,d\sqrt{\frac{\gamma - g}{g}}\,a$

Dans ces deux équations, on ſe ſouviendra d'exprimer les quantités a & d par pouces, & qu'alors le diamétre δ, ſera exprimé par lignes. S'il s'agiſſoit de rapporter toutes ces grandeurs à une même meſure, il n'y auroit qu'à diviſer leſdites quantités par 12, pour avoir la valeur de δ, exprimées par parties de pouces. Les deux équations que nous venons de donner, marquent généralement le plus petit diamétre qu'il ſoit permis de donner à cordeau. On ne ſçauroit donc diminuer l'action du courant contre le cordeau au-delà de ce terme.

5. En ſuppoſant au cordeau le plus petit diamétre, tel que nous venons de le déterminer, il eſt facile de déterminer généralement la proportion qu'il y a entre l'action du courant contre la boule, ou le cylindre, & celle du même courant & uniforme contre le cordeau, comme nous avons fait dans un cas particulier, au §. 25, où nous avons vu que l'action contre la boule, eſt à l'action contre le cordeau, ſuppoſé vertical, comme 1 à $\frac{56}{33} \cdot \frac{l\,\delta}{d\,d}$. cette proportion deviendra donc, en donnant au cordeau le plus petit diamétre poſſible, comme 1 à $\frac{56}{33} \times \frac{l}{d} \times 0,0010\sqrt{\frac{\gamma - g}{g}}\,d$, ou comme 1 à $\frac{l}{d} \times 0,0017\sqrt{\frac{\gamma - g}{g}}\,d$; & on remarquera toujours que dans le facteur $\sqrt{\frac{\gamma - g}{g}}\,d$, on doit exprimer la quantité d par pouces. Si le corps

plongé eſt cylindrique, l'action du courant contre le cylindre eſt à l'action contre le cordeau vertical, comme $a\ d$, eſt à $l\ \delta$, ou comme 1 eſt à $\frac{a}{l} \times \frac{\delta}{d}$, & ſubſtituant pour δ ſa plus petite valeur en pouces, cette raiſon ſera comme 1 à $\frac{a}{l} \times 0,0012 \sqrt{\frac{\gamma - g}{g}}\ a$, & il faudra encore ici ſe ſervir de pouces dans le facteur

$$\sqrt{\frac{\gamma - g}{g}}\ a.$$

Si l'on conſidére à préſent, l'inclinaiſon du cordeau, l'action contre le cordeau ſera diminuée dans l'un & l'autre corps, en raiſon de 1 à $1 - m\ m$, tant à cauſe de l'obliquité, que parce que la profondeur du courant n'eſt plus que $l \times \sqrt{1 - m\ m}$, & faiſant $m\ m = \frac{1}{2}$, les efforts du courant contre la boule & ſon cordeau, ſeront en raiſon de 1 à $\frac{l}{d} \times 0,00085 \sqrt{\frac{\gamma - g}{g}}\ d$, & les mêmes efforts contre le cylindre & ſon cordeau, ſeront en raiſon de 1 à $\frac{l}{a} \times 0006 \sqrt{\frac{\gamma - g}{g}}\ a$.

XXVII.

Scholie 4. Examinons à préſent ce qu'il convient d'obſerver à l'égard des peſanteurs ſpécifiques, & des dimenſions des corps à plonger. Dans cet examen, il faut reprendre les équations du §. 23, qui marquent une relation entre les vîteſſes des courans, les peſanteurs ſpécifiques & les dimenſions des corps; en ſorte que la vîteſſe du courant étant donnée, il faut ſatisfaire, avant toute choſe, à ces équations, en ſuppoſant $m = \sqrt{1 - m\ m}$, puiſque nous voulons que le cordeau meſure le courant ſous un angle d'environ 45 dégrés. Nous avons donc pour la

boule $N = 4\sqrt{\frac{181}{3}} \cdot \frac{\gamma - g}{g} \cdot d$, & pour le cylindre

$$N = \sqrt{\frac{5973}{7}} \cdot \frac{\gamma - g}{g} \cdot d$$

ce qui donne pour la boule $\sqrt{\frac{\gamma - g}{g}} = \frac{N}{4}\sqrt{\frac{3}{181 d}}$, & pour le cylindre $\sqrt{\frac{\gamma - g}{g}} = N\sqrt{\frac{7}{5973 d}}$

Ces équations déterminent les pesanteurs spécifiques des corps à plonger pour des courans considerés comme déterminés ; elles nous apprennent qu'il faut pour les mêmes dimensions des corps à plonger, faire la différence des pesanteurs spécifiques proportionelle au quarré de la vîtesse du courant.

Il ne nous reste plus à déterminer, que les dimensions des corps à plonger ; or nous avons trouvé dans la 5e. note du paragraphe 26. que les actions du courant contre la boule, & contre le cordeau sont comme 1 à $\frac{l}{d} \times 0,00085\sqrt{\frac{\gamma - g}{g}} d$: Si nous mettons donc à la place de $\sqrt{\frac{\gamma - g}{g}}$ sa valeur $\frac{N}{4}\sqrt{\frac{3}{181 d}}$, ce rapport sera comme 1 à $\frac{l}{d} \times 0,00085 \times \frac{N}{4}\sqrt{\frac{3}{181}}$, ou comme 1 à $0,0000273\, N. \frac{l}{d}$. Un calcul pareil nous donne ce rapport pour le cylindre comme 1 à $0,0000205\, N. \frac{l}{\sqrt{ad}}$. On se souviendra que N marque le nombre de pouces que le courant fait dans une seconde de temps, que l marque la longueur du cordeau mouillé, & incliné sous un angle de 45 degrés, de sorte qu'il faut supposer la profondeur verticale de la boule ou du cylindre $= l\sqrt{\frac{1}{2}}$. Nous avons au reste supposé que les eaux heurtent avec la même vîtesse contre le corps plongé, & contre le cordeau mouillé, tout comme si le vaisseau ne faisoit que filler dans

des eaux calmes. Nous ne pouvions nous diſpenſer de faire une pareille hypothèſe, parce que les inégalités des vîteſſes relatives, ſont inconnues dans les courans; & quand même on les connoîtroit, les régles pour le choix le plus avantageux des choſes arbitraires deviendroient trop compliquées, ſi on vouloit les perfectionner d'avantage, en conſidérant encore les inégalités du mouvement des eaux contre les parties du ſyſtême. Il ne s'agit pas non plus d'obſerver exactement ces régles, mais ſeulement de s'y conformer à peu près.

Les expreſſions que nous avons données pour le rapport des actions du fluide, contre le corps plongé, & contre le cordeau, nous apprennent qu'il faut généralement prendre une boule auſſi grande que les autres circonſtances pourront le permettre, puiſque la première action eſt à la ſeconde, tout le reſte étant égal, comme d à une conſtante : Il faut par la même raiſon ſe ſervir d'un cylindre auſſi large & auſſi haut qu'on pourra, ſans tomber dans d'autres inconvéniens conſidérables, & il eſt à remarquer qu'on profite autant à augmenter la hauteur a qu'à augmenter en même raiſon le diamètre d, quoique la ſolidité augmente en raiſon quarrée de d & en raiſon ſimple de a. On voit auſſi qu'un corps cylindrique répond mieux à nos vues, qu'une boule; car faiſant ces corps d'une réſiſtance égale, les efforts du courant contre la boule & contre le cylindre ſeront comme 547 à 411, & par conſéquent cet effort ſera plus petit pour le cylindre que pour la boule : Mais ſi on vouloit ſe ſervir d'un corps cylindrique, il ſeroit bon de le charger de plomb par ſa baſe, afin qu'il conſerve mieux ſa poſition verticale ſous les eaux; on pourroit même l'attacher au cordeau par le milieu de ſa hauteur au lieu de l'attacher par le centre de l'une des ſurfaces planes.

XXVIII.

Concluſion. Tout ce que nous avons dit depuis le §. 20. concerne

concerne la configuration des corps à plonger, leur grandeur & leur pesanteur spécifique les plus avantageuses pour diminuer l'action du courant contre les cordeaux, auxquels ils sont attachés, & nous apprend quelle épaisseur il faudra donner aux cordeaux. Nous avons vû qu'un corps cylindrique est préférable en quelque façon à un corps sphérique, & qu'il faut donner généralement aux corps à plonger le plus de volume qu'on peut, sans tomber dans des inconvéniens qui ne regardent pas notre sujet en lui-même. On commencera l'observation par la boule, ou par le cylindre le plus pesant, garni d'un cordeau suffisamment gros pour résister au poids du corps & à l'effort du courant ; ces premières observations serviront à reconnoître à peu près la vîtesse relative du vaisseau ou de la chaloupe, par rapport au fond du courant, & la profondeur du courant, & par-là on sçaura à peu près la valeur des lettres N & l : après cela les équations du §. 27. donneront à connoître quelle pésanteur spécifique il faut donner au corps à plonger, & enfin les équations de la note 4 du §. 26. marquent le diamètre des cordeaux correspondans. La régle générale est de faire la différence des pesanteurs spécifiques exprimée $\frac{\gamma - g}{g}$ proportionelle aux quarrés de la vîtesse N & le diamètre du cordeau proportionel à la simple vîtesse pour les corps d'un même volume : connoissant toutes lesdites valeurs, le §. 27. nous apprendra aussi le rapport entre la résistance du corps plongé, & celle du cordeau, & cette dernière connoissance nous mettra enfin en état de calculer assez justement la correction qu'il faudra employer pour chaque observation. J'éclaircirai ces régles par l'exemple suivant.

Exemple. Supposons que les eaux puissent être censées n'avoir plus de mouvement à la profondeur de 100 pieds, c'est-à-dire, donnons au courant sensible une profondeur de 100 pieds : si le cordeau doit incliner de

45 degrés, il faut ſuppoſer $l = 141$ pieds : donnons à la boule deux pieds de diamètre de même qu'au cylindre, auquel nous donnerons auſſi deux pieds de hauteur, & nous aurons $d = e = 2$ pieds ou $= 24$ pouces : Suppoſons enfin que la viteſſe abſolue du vaiſſeau, ou de la chaloupe, ſoit de 3 pieds ou de 36 pouces par ſeconde, cela donnera $N = 36$. Nous aurons en ce cas pour la boule (§. 27.) $\sqrt{\frac{\gamma - g}{g}} = \frac{36}{4}\sqrt{\frac{3}{141.24}}$ ou $\frac{\gamma - g}{g} = \frac{81.3}{141.2}$, ce qui fait à peu près $\frac{1}{15}$: c'eſt-à-dire, qu'il faudroit faire les peſanteurs ſpécifiques de la boule & des eaux de la mer, en raiſon de 19 à 18 ; après cela la note 4 du §. 26. nous dit de faire $d = 0,0120\, d\sqrt{\frac{\gamma - g}{g}}\, d$, ce qui fait pour notre cas 0, 34 parties d'une ligne qu'il faudroit donner au diamètre du cordeau. Un tel cordeau peut ſoutenir un effort de 37 livres avant que de rompre ; le poids de la boule ſous l'eau, ſera d'environ 17 livres, mais hors de l'eau elle aura environ 319 livres de poids. Je remarquerai donc ici en paſſant, qu'on ne doit point roidir le cordeau avant que la boule ſoit entièrement plongée. Enfin l'effort du courant contre la boule ſera à celui que le cordeau incliné de 45 degrés, ſouffre perpendiculairement par le même mouvement relatif des eaux en vertu du §. 27. comme 1 à 0, 069. Nous voyons donc que nous ſommes parvenus à rendre l'action contre la boule 14½ fois plus grande que celle qui ſe fait contre le cordeau, quoique nous aions ſuppoſé que les eaux heurtent contre toute la longueur du cordeau avec la même viteſſe que contre la boule : cependant cette ſuppoſition augmente de beaucoup l'action des eaux contre le cordeau, lorſqu'on ne prétend pas d'obſerver le courant au milieu du ſillage, & qu'on veut bien laiſſer ſimplement flotter le vaiſſeau ou la chaloupe pendant toutes les obſervations, ſuivant la méthode que j'ai indiquée au §. 14,

car en ce cas les eaux n'ont point de mouvement relatif avec le cordeau près de la ſurface de la mer ; & ſi ces vîteſſes relatives vont en progreſſion arithmétique depuis la ſurface de la mer juſqu'à la boule, il faudra retrancher les deux tiers de l'action des eaux contre le cordeau, de ſorte que leur action ſera environ 43 ou 44 fois plus grande contre la boule, que contre le cordeau: cette dernière action pourroit donc déjà être négligée ſans peine ; mais ſi le mouvement relatif des eaux étoit plus rapide, ſi la profondeur du courant étoit plus grande, s'il étoit impoſſible de rendre les cordeaux auſſi forts que nous l'avons ſuppoſé, & enfin s'il falloit mettre une plus grande proportion entre la force du cordeau & ſa tenſion, que celle de 3 à 2, pour prévenir avec d'autant plus de ſureté tous les accidens, l'action des eaux contre le cordeau en deviendroit plus grande ; c'eſt pourquoi je ne laiſſerai pas de montrer ci-deſſous la correction qu'il faudra employer pour déterminer les courans, par l'inclinaiſon du cordeau. Voilà ce qui concerne la boule, & on ſuivra la même route pour trouver les réſultats du cylindre : on trouvera donc $\frac{\gamma - \zeta}{g} = \frac{10}{158}$ ou à peu près $= \frac{1}{16}$, c'eſt-à-dire, qu'il faudra faire ſa peſanteur ſpécifique par rapport à celle des eaux de la mer en raiſon de 17 à 16 : après cela on aura $a = 0,433$ parties de ligne : un cordeau d'un tel diamètre peut ſoutenir un poids de 60 livres : le poids du cylindre ſera d'environ 481 livres, mais ſous l'eau il n'aura qu'un poids d'environ 28 livres. Enfin ſi le cordeau & le cylindre attaché ſont conſidérés comme entraînés avec la même vîteſſe contre les eaux, l'action des eaux ſera environ 19 fois plus grande contre le cylindre que contre le cordeau ; mais ſi on fait les obſervations ſans aucun ſillage, l'action des eaux contre le cordeau en deviendra beaucoup plus petite, & ne ſera plus qu'environ la $\frac{1}{17}$ partie de celle qui ſe fait contre le cylindre. Voici encore quelques remarques.

1. Comme nous avons ſuffiſamment diminué le rapport de l'action des eaux contre le cordeau à celle qui ſe fait contre le corps plongé, il ne ſera pas néceſſaire de ſuivre nos regles pour les courans, qui ſeroient moins que trois pieds par ſeconde, car les peſanteurs ſpécifiques du corps à plonger & des eaux de la mer deviendroient trop égales, & on tomberoit par là dans de nouveaux inconveniens : mais on ſera attentif à ſuivre ces règles quand les courans ou plutôt quand le vaiſſeau a un mouvement abſolu de plus de trois pieds ou 36 pouces par ſeconde. Si cependant ces courans étoient en même temps extrêmement profonds, on ne ſera pas mal de donner plus d'étendue à nos règles.

2. On ſera les différences entre les peſanteurs ſpécifiques, proportionnelles aux quarrés des viteſſes abſolues du vaiſſeau : ainſi les poids des corps d'un même volume ſous l'eau, ſeront pareillement proportionels aux quarrés de ces viteſſes. Si nous ſuppoſons donc la plus grande viteſſe abſolue du vaiſſeau de cinq pieds par ſeconde, la plus grande quantité $\frac{\gamma - \beta}{g}$ deviendroit $= \frac{25}{9} \times \frac{1}{18} =$ à peu près $\frac{2}{13}$ pour la boule de deux pieds de diamètre, & la même quantité deviendra $= \frac{25}{9} \times \frac{1}{16}$ = à peu près $\frac{1}{23}$ pour un cylindre de deux pieds de diamètre & d'autant de hauteur : ainſi les peſanteurs ſpécifiques de la boule & des eaux de la mer ſeront comme 15 à 13, & celles du cylindre & des eaux de la mer ſeront comme 27 à 23.

3. Les diamètres des cordeaux ſuivent la proportion des viteſſes abſolues du vaiſſeau ; nous aurons donc pour la boule le plus grand diamètre du cordeau $= \frac{5}{3} \times 0,34 = 0,57$ & pour le cylindre $= 0,72$. ces déterminations ne dépendent point de la profondeur des courans.

4. Le rapport entre les actions des eaux contre les corps plongés & contre leurs cordeaux, ſuit encore la proportion des viteſſes abſolues du vaiſſeau, indiquées par N, pourvu que les courans aient la même profondeur ; il ſuit delà, qu'en obſervant les courans, ſuivant la méthode du §. 14, l'action des eaux contre la boule ſera au moins 26 fois plus grande que contre ſon cordeau, & au moins 34 fois plus grande contre le cylindre que contre ſon cordeau.

5. Le même rapport ſuit la raiſon réciproque des profondeurs des courans ; ainſi, ſi nous voulions prendre toutes les choſes au pis & donner 600 pieds de profondeur au courant, l'action des eaux contre la boule ne ſeroit plus que $4 - $ fois plus grande que celle qui ſe feroit contre ſon cordeau, & $5 \frac{1}{3}$ fois pour le cylindre. Ce ne ſera donc que pour les courans énormément profonds, qu'on doit ſe mettre en peine des corrections que nous donnerons ci-deſſous.

6. L'action des eaux contre le cordeau du cylindre eſt par elle-même plus grande que celui de la boule ; mais cette action, relative à celle qui ſe fait contre le corps attaché, eſt plus petite pour le cylindre que pour la boule ; le cylindre a encore cet autre avantage, que ſa peſanteur ſpécifique n'approche pas ſi fort de celle des eaux comme dans la boule. Un troiſième avantage eſt qu'on peut augmenter la hauteur du cylindre, ſans en diminuer davantage la peſanteur ſpécifique, & augmenter par-là le rapport entre les actions des eaux contre le cylindre & ſon cordeau ; au lieu qu'en augmentant d'avantage le volume de la boule, il faut toujours approcher d'avantage la peſanteur ſpécifique de la boule à celle des eaux (§. 27.). On doit donc préférer à tous ces égards les corps cylindriques aux ſphériques. Si on ne croioit pas la relation communément adoptée entre la viteſſe des eaux & leur effort contre la ſurface cylindrique aſſez juſte, on pourroit déterminer cette

relation par des expériences préalables, faites ſur les cylindres qu'on deſtine à cet uſage.

7. L'inconvénient d'une trop grande égalité entre les peſanteurs ſpécifiques des corps à plonger & des eaux de la mer, n'eſt pas ſi conſidérable, qu'on ne puiſſe ſuivre nos règles lors même que le vaiſſeau fait moins de trois pieds par ſeconde : mais comme la peſanteur ſpécifique des eaux de la mer eſt un peu variable, il ſera bon en ce cas d'examiner chaque fois la vraie peſanteur ſpécifique des eaux, de la manière que le père Feuillée l'a fait.

8. La remarque précédente regarde les courans extrêmement profonds, les ſeuls qui nous embarraſſent encore : mais il eſt très-naturel que ces ſortes de courans ne ſçauroient qu'avoir très-peu de mouvement; de même que les eaux d'une même rivière également large perdent de leur vîteſſe dans les endroits où la rivière devient plus profonde. La quantité $N\,l$ ſera à peu près toujours la même dans toute l'étendue d'un même courant ; &, ſi cela eſt, les courans profonds pourront être obſervés auſſi exactement que les autres, pourvu qu'on ſoit ſur ſes gardes, par rapport à la vraie valeur de la quantité $\frac{\gamma - g}{g}$. Mais quand je ſuppoſe la vîteſſe N d'autant plus petite que le courant eſt plus profond, je conſidere le vaiſſeau ou la chaloupe n'avoir d'autre vîteſſe abſolue, que celle des eaux près de la ſurface de la mer : ce qui eſt toujours en notre pouvoir de faire. Ce ſera toujours une choſe extrêmement difficile, que d'obſerver les courans avec une préciſion entière, ſans vouloir arrêter le ſillage, lors même que tous les obſtacles accidentels concourent à rendre ces obſervations plus difficiles & moins ſures.

9. Si j'ai dit qu'on peut diminuer l'action des eaux contre le cordeau, par rapport à celle qui ſe fait contre le corps plongé, en augmentant le volume des

corps plongés, il eſt à remarquer à cet égard, qu'on pourroit tellement augmenter le volume & la réſiſtance de ces corps, qu'elle devînt ſenſible par rapport à celle de la chaloupe, & peut-être même à celle du vaiſſeau. M. Bouguer réduit la ſurface de la proue d'un vaiſſeau du premier rang à 150 pieds quarrés; & la ſurface d'un cylindre de deux pieds de diamètre & d'autant de hauteur ſe réduit à 2 $\frac{1}{2}$ pieds quarrés pour la réſiſtance: ainſi la réſiſtance d'un tel vaiſſeau par ſa proue eſt environ 56 fois plus grande que celle d'un cylindre, tel que nous avons choiſi pour exemple. Mais un vaiſſeau qui ſeroit 8 fois plus petit, ſeroit ſa réſiſtance par la proue quatre fois plus petite, & ſa ſurface ſe réduiroit à 37 $\frac{1}{2}$ pieds quarrés, qui ne ſeroit plus que 18 fois plus grande que celle dudit cylindre. En général ſi on nomme n le nombre des tonneaux que le vaiſſeau péſe, la quantité $\left(\frac{n}{3300}\right)^{\frac{2}{3}} \times 150$, marquera en pieds quarrés la ſurface plane équivalente à la proue pour la réſiſtance; car M. Bouguer donne 3300 tonneaux au vaiſſeau dont il parle, & on peut ſuppoſer ici les vaiſſeaux être des corps ſemblables. La ſurface plane, dont la réſiſtance ſeroit égale à celle de la proue d'une chaloupe, ne ſçauroit manquer d'être aſſez petite. Comme j'ignore les dimenſions des chaloupes, je me ſuis aviſé d'une autre manière pour trouver à peu près cette ſurface. J'eſtime que deux rameurs, en ramant aſſez vigoureuſement, peuvent donner à la chaloupe une viteſſe de 4 pieds par ſeconde; & je ſçai, par des expériences très ingénieuſes & d'une grande utilité pour pluſieurs points qui concernent la navigation, qu'un de mes amis, & grand Géomètre, a bien voulu faire ſur ma priere, qu'un rameur, ramant ſur un bâteau qui fait 4 $\frac{1}{2}$ pieds par ſeconde, fait autant qu'un poids de 7 livres qui tirent continuellement le bâteau. La force d'un rameur, réduite en poids, devient enſuite d'autant

plus petite, que le bâteau va plus vîte : on peut donc ſuppoſer que les deux rameurs de la chaloupe font autant qu'un poids de 14 livres ; ainſi la réſiſtance des eaux contre la proue de la chaloupe, qui fait $4\frac{1}{2}$ pieds par ſeconde, doit être égale à 14 livres, ce qui donne la ſurface plane, dont la réſiſtance ſoit égale à celle de la proue de la chaloupe, égale à environ $\frac{1}{25}$ d'un pied quarré, & par conſéquent quatre à cinq fois plus petite que celle de notre cylindre équivalente à $2\frac{1}{2}$ pieds quarrés : cela ſuffit pour voir que l'action du corps, plongé contre la chaloupe, doit être très-grande & qu'elle peut en quelque façon être ſenſible contre un vaiſſeau. J'examinerai dans l'article ſuivant quelle influence cette action pourroit avoir ſur nos obſervations, & comment il faudra ſe précautionner contre les erreurs qui pourroient en réſulter.

10. Comme les corps à plonger ſont très-peſants hors de l'eau, & que les cordeaux ſeroient de beaucoup trop foibles pour les ſoutenir, j'ai déja dit qu'il ne faut pas roidir les cordeaux avant que les corps ſoient entièrement ſous l'eau ; il faudra donc s'aviſer d'une manière de deſcendre les corps dans les eaux de la mer ; & de les en tirer ſans employer le cordeau : & cela peut ſe faire très-facilement : je dirai ſeulement qu'il n'y auroit pas grand mal d'attacher le corps par un bout de corde aſſez forte pour le ſuſpendre en l'air, & qui n'auroit pas plus de longueur qu'il en faut pour deſcendre le corps dans la mer : mais ſi on craignoit la petite erreur qui en réſulteroit ſur nos obſervations, on pourra s'y prendre de la façon qu'on jugera la plus commode. Voilà les remarques que j'ai cru néceſſaires pour mieux éclaircir nos méthodes, & pour mieux en perfectionner l'uſage.

XXIX.

Avant que de venir à l'analyſe de l'action des eaux contre

contre les cordeaux, de la courbure de ces cordeaux qu'elle cauſe, & de la correction de leurs inclinaiſons qu'elle demande, je dirai encore quelques mots ſur la 9e. remarque du précédent article. Nous avons dit dans cette remarque, que l'action des corps plongés eſt très grande contre les chaloupes, & qu'elle peut être ſenſible contre un vaiſſeau. Il paroît d'abord que cette action doit jetter de grandes erreurs ſur nos manières d'obſerver les courans: mais, ſi on y réfléchit bien, on voit qu'elle ne peut rien déroger ni à leur bonté, ni à leur juſteſſe. Il n'y aura qu'à plonger deux corps en même-temps, l'un juſques dans la région des eaux calmes, & l'autre à telle profondeur qu'on voudra: l'inclinaiſon du cordeau du premier montrera exactement la viteſſe abſolue du ſyſtême, & celle de l'autre cordeau indiquera le mouvement relatif des eaux de la même profondeur par rapport au mouvement du ſyſtême; lequel étant déjà connu, on en déduira le mouvement abſolu des eaux, c'eſt-à-dire, le courant pour telle profondeur qu'on voudra, tout comme nous avons dit au §. 15. Effectivement le mouvement de la chaloupe ou du navire changé par l'action, ou plutôt par la réaction des corps plongés eſt compris dans le cas du ſillage, que nous avons démontré audit article pouvoir être déterminé en même temps que le courant: on remarquera ſeulement que ce n'eſt pas un ſillage entièrement uniforme tant que les corps plongés changent de poſition; ainſi il faudra toujours avant que d'examiner l'inclinaiſon des cordeaux laiſſer écouler environ une demi-minute de temps pour mettre le ſyſtême dans le cas de l'uniformité. Il eſt donc vrai, que l'action des corps plongés contre la chaloupe ou contre le vaiſſeau, n'apporte jamais aucun obſtacle à notre manière de déterminer les courans depuis leur ſurface juſqu'au fond: je trouve cependant que notre article 18e. en ſouffre quelque petit changement. J'ai démontré dans cet article une manière facile

de déterminer la vraie route & le mouvement réel du vaiſſeau, ſans ſe mettre aucunement en peine des dérives, de quelques cauſes qu'elles proviennent : mais, comme cette manière demande qu'on plonge un corps juſques dans la région des eaux calmes ou cenſées telles, il eſt clair que le vaiſſeau en ſera un peu retardé, de ſorte que le vrai ſillage durant les obſervations ſera un peu plus lent, que lorſque le corps n'eſt pas plongé dans les eaux : cette conſidération demande donc une petite correction. Pour trouver cette correction déjà fort petite en elle même, nous pourrons ſuppoſer que le vaiſſeau ſille ſimplement, & oppoſe directement la proue aux eaux par ſon mouvement réel & abſolu tout comme s'il n'y avoit ni courant ni aucune dérive, & il faudra faire attention, que la force du vent demeure la même pendant ce petit intervalle : ſoit à préſent Q le nombre des pieds quarrés, auquel ſe réduit la proue, & q celui pour le corps plongé ; qu'on nomme c la viteſſe abſolue du vaiſſeau du temps de l'obſervation, je dis que la viteſſe abſolue du même vaiſſeau après avoir retiré le corps deviendra preſqu'auſſitôt $= c \sqrt{\frac{Q \times q}{Q}}$, ou à peu près $= c \times \frac{q}{2Q} c$, de ſorte que la petite quantité $\frac{q}{2Q} c$ marque la correction à faire pour avoir la vraie viteſſe abſolue du vaiſſeau, hors le temps des obſervations. Si donc n marque encore le nombre des tonneaux que le vaiſſeau pèſe, nous aurons, en vertu de la remarque 9e. du §. 28., $Q = \left(\frac{n}{3300}\right)^{\frac{2}{3}} \times 150$; & ſi le corps plongé eſt un cylindre de deux pieds de hauteur & de diamétre, il faudra faire $q = \frac{8}{3}$, & la quantité $\frac{q}{2Q}$ deviendra $= \frac{4}{3} \cdot \frac{c}{150}$.

$\left(\frac{3300}{n}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1,971}{\sqrt[3]{n\,n}}c$. Ainſi, ſi le vaiſſeau eſt de 1000 tonneaux, on trouve la différence des deux vîteſſes = 0, 0197 c, ou environ $\frac{1}{50}c$, & les deux vîteſſes ſeront comme 50 à 51. La différence eſt donc très-petite; mais, comme elle ſubſiſte toujours pendant tout le cours d'une longue navigation dans un même ſens, il ne faut pas la négliger.

La correction que nous venons de donner pour connoître le vrai mouvement abſolu du vaiſſeau, par le corps plongé juſques dans les eaux calmes, ſuppoſe que le vaiſſeau donne contre les eaux avec toute la vîteſſe abſolue, tout comme le corps plongé; mais ſi le courant, près de la ſurface de la mer eſt ſenſible par rapport au ſillage, on voit que ladite ſuppoſition n'a plus lieu, parce que le vaiſſeau & le corps plongé donnent contre les eaux avec des vîteſſes inégales. On peut encore trouver en ce cas, combien le mouvement du vaiſſeau eſt changé par l'immerſion du corps; mais il faut préalablement déterminer le ſillage ou le mouvement relatif du vaiſſeau par rapport aux eaux près de la ſurface de la mer, ce qui ſe fait en ne plongeant le corps qu'à la profondeur de 7 à 8 pieds.

Je ne m'arrêterai pas à donner toutes ces corrections, on les trouvera ſans peine par la ſimple conſidération que la force du vent, qui fait ſiller le vaiſſeau, eſt ſuppoſée la même; d'où l'on déduit facilement combien ce ſillage & le mouvement abſolu ſont changés en retirant les corps des eaux. Dans ces recherches, il faut examiner ſi le courant eſt contraire ou favorable, ou s'il ſe fait de côté; & lorſqu'il eſt contraire, il faut encore diſtinguer les deux cas, s'il eſt plus ou moins rapide que le ſillage, parce qu'il dépend de-là de ſçavoir ſi l'action des eaux, contre le corps plongé, doit être ſuppoſée affirmative ou négative. Il y a des cas où ces corrections ne laiſſent pas d'être aſſez douteuſes; ce ſont ceux où la

force du vent eſt très-petite, car alors il peut arriver que le corps plongé tire le vaiſſeau contre les eaux par la poupe; mais une telle action ſera toujours très-petite. Au reſte, toutes ces recherches ne regardent pas les courans, que j'ai déjà dit pouvoir être également déterminés, quelque grande qu'on ſuppoſe l'action des eaux contre les corps plongés; elles ne tendent qu'à rectifier l'eſtime du ſillage abſolu, en tant que celui-ci eſt tant ſoit peu dérangé par l'immerſion des corps, lorſque ces corps ſont grands & que les navires ſont petits.

XXX.

Je viens enfin à notre dernier point, qui eſt celui de trouver par le calcul, l'action des eaux contre les cordeaux, la courbure de ces cordeaux qui en réſulte, & le changement de leur inclinaiſon. J'ai indiqué, fort au long, toutes les meſures qu'il eſt poſſible de prendre pour diminuer cette action, par rapport à celle qui ſe fait contre les corps plongés; je ſuis sûr que ces meſures ſuffiront pour pouvoir négliger l'effort des eaux contre les cordeaux, lorſqu'on ne plonge pas les corps au-delà d'environ vingt braſſes de profondeur; mais on auroit tort de le négliger entierement, quand on les plonge beaucoup plus profondément. C'eſt ici le ſeul inconvénient qui me fait encore de la peine dans tout mon ſyſtème, puiſque ſans cet inconvénient il n'y auroit plus aucun empêchement de deſcendre les corps auſſi profondément qu'on voudroit, & juſques à ce que le cordeau ne montrât plus abſolument aucun changement. Si je prens cet inconvénient à cœur, ce n'eſt pas qu'on ne puiſſe déterminer, avec toute la préciſion néceſſaire, la correction qu'il demande; c'eſt plutôt parce que je crains que cette ſorte de correction ne devienne trop incommode, & trop peu intelligible pour les pilotes, ou de ceux qui pourroient entreprendre d'obſerver les courans. Ce que j'ai dit juſqu'ici, eſt facile à être réduit en régles; mais ce qui me

reſte à dire demandera quelque connoiſſance de géométrie dans ceux qui voudront l'appliquer à l'obſervation des courans.

XXXI.

Soit donc AB (*fig. 6.*) la figure du cordeau ſous l'eau, chargé à l'extrémité B d'un cylindre dont le diamétre eſt $= d$, & la hauteur $= a$; qu'on tire la verticale AC, & l'horiſontale BC, de même que les deux tengentes BO & AN, prolongées du côté oppoſé juſqu'en H & F avec les verticales BG, FE, & les horiſontales HG, AE; ſoit encore Z la hauteur verticale génératrice de la vîteſſe relative du point B contre les eaux, ainſi l'action des eaux contre le cylindre ſera comme $\frac{2}{3}$ à $d\,Z$, laquelle multipliée par le rapport $\frac{HB}{HG}$, donnera la force appliquée au point B dans la direction de la tengente, & cette force exprimera la renſion du cordeau qui eſt partout la même, ſi on fait abſtraction du poids du cordeau ſous l'eau; ainſi ſi on fait le ſinus total $= 1$, & le ſinus de l'angle $HBG = \mu$, on aura la tenſion du cordeau $= \frac{2}{3}\frac{a\,d\,Z}{\mu}$; prenons à préſent deux points intermédiaires infiniment proches quelconques a & b; qu'on tire les horiſontales $a\,d$ & $b\,c$, avec la petite verticale $a\,c$; ſoit $A\,d = x$, $d\,a = y$, $A\,a = s$, $a\,c = dx$, $b\,c = dy$, $a\,b = ds$, & la hauteur verticale génératrice de la vîteſſe relative de l'élément $a\,b$ contre les eaux $= \xi$; on ſçait, par les régles de la méchanique, que l'action perpendiculaire des eaux contre l'élément du cordeau $a\,b$, ſera comme $\frac{2}{3}\,d\,s \times \delta \times \xi \times \frac{dx^2}{ds^2}$, comme $\frac{2}{3}\frac{\delta\,\xi\,dx^2}{ds}$, en indiquant le diamétre du cordeau par δ: or, on démontre

dans la méchanique, que l'élément ds eſt au rayon oſculateur R, comme la force perpendiculaire appliquée à l'élément du cordeau $\frac{1}{3} \times \frac{\delta \xi dx^2}{ds}$ eſt à la tenſion du cordeau $\frac{2}{3} \times \frac{adZ}{\mu}$; cette analogie nous donnera donc pour l'équation générale de la courbe $\frac{ds}{R} = \frac{\mu \delta \xi dx^2}{adZ\,ds}$.

On peut réduire cette équation différentielle du ſecond ordre à une autre du premier ordre; car prenant l'élément ds pour conſtant, & mettant pour le rayon oſculateur ſa valeur $\frac{dx\,ds}{-ddy}$, on aura $\frac{-ddy}{dx} = \frac{\mu \delta \xi dx^2}{adZ\,ds}$, ou

$$\text{bien} - \xi\, dx = \frac{adZ\,ds\,ddy}{\mu \delta dx^2}, \text{ ou}$$

$$-\xi\, dx = \frac{adZ\,ds\,ddy}{\mu\delta(ds^2 - dy^2)};$$

L'intégrale de cette derniere équation eſt, l'élément ds étant conſtant, $\int \xi\, dx = \frac{adZ}{2\mu\delta} log. \frac{ds - dy}{ds + dy} + conſt.$

La conſtante ſe détermine par l'angle $A\,F\,E$, qui fait l'angle de l'inclinaiſon du cordeau qu'on obſerve: Si le ſinus de cet angle eſt $= m$, la conſtante en queſtion deviendra $\frac{adZ}{2\mu\delta} log. \frac{1+m}{1-m}$ & notre équation ſera

$$\int \xi\, dx = \frac{adZ}{2\mu\delta} log. \frac{(1+m).(ds - dy)}{(1-m).(ds + dy)}.$$

Ces ſortes d'équations peuvent être intégrées par les méthodes des approximations, avec autant d'exactitude qu'on juge néceſſaire; après quoi on mettra pour x toute la profondeur $A\,C$, & on trouvera une relation entre μ & m, & par conſéquent, entre l'angle $H\,B\,G$ & l'angle $A\,F\,E$. Cet angle $H\,B\,G$, fait l'angle corrigé; lequel, s'il pouvoit être remarqué immédiatement, donneroit la

quantité Z : tout comme nous avons fait voir ci-deſſus, en faiſant abſtraction de l'action des eaux contre le cordeau. Je ne dirai rien ici de la meilleure méthode d'approcher à cette équation, parce qu'il y a une autre méthode infiniment plus aiſée, & qui ſera d'une préciſion ſuffiſante que je vais expoſer.

XXXII.

Comme il s'agit de trouver le vrai angle HBG, par le moyen de l'angle AFE, ou NAC, qu'on aura obſervé, on remarquera que la différence entre les angles AFE & HBG, eſt égale à l'angle ANO, exprimé par $\int \frac{ds}{R}$: ainſi cette quantité $\int \frac{ds}{R}$ eſt préciſément la correction que nous cherchons, & qu'il faudra retrancher de l'angle obſervé NAC. Pour trouver la quantité $\int \frac{ds}{R}$ très-commodément, il n'y a qu'à ſuppoſer que la courbe AB, s'éloigne peu d'une lig. droite. Car, reprenant notre équation primitive, expoſée dans le précédent article, $\frac{ds}{R} = \frac{\mu \partial \xi dx^2}{a dZ ds}$, on pourra l'enviſager ſous cette forme $\frac{ds}{R} = \frac{\mu \partial \xi}{a dZ} dx \times \frac{dx}{ds}$ & puis ſuppoſer le facteur $\frac{dx}{ds}$ conſtant & égal à $\sqrt{1-mm}$ ou à $\sqrt{1-\mu\mu}$ ou plus exactement égal au coſinus de l'angle $\frac{1}{2} AFE + \frac{1}{2} ABG$; quelle qu'on choiſiſſe de ces quantités, je ſuppoſerai ledit facteur $\frac{dx}{ds} = M$; & nous aurons $\frac{ds}{R} = \frac{\mu M \partial \xi}{a dZ} dx$ & par conſéquent la corection cherchée ou

$$\int \frac{ds}{R} = \mu M \times \frac{\partial}{d} \times \frac{\int \xi dx}{aZ}.$$

Dans l'application on pourra ſuppoſer d'abord $\mu = m$,

& $M = \sqrt{1 - mm}$, & puis chercher, pour ces suppositions, la valeur de $\int \frac{ds}{R}$. Si on demande ensuite une plus grande justesse, il n'y a qu'à retrancher l'angle $\int \frac{ds}{R}$, déjà trouvé de l'angle observé AFE, substituer pour μ, le sinus de la différence de ces deux angles, & pour M, le cosinus de l'angle $\frac{1}{2}AFE \times \frac{1}{2}HBG$, & chercher une seconde fois le petit angle $\int \frac{ds}{R}$, qu'on pourra prendre pour la vraie correction, car une troisieme seroit tout-à-fait superflue.

Il n'y a donc plus d'autre difficulté, que d'exprimer en nombre la quantité $\frac{\int \xi dx}{aZ}$; & cela suppose qu'on connoisse, pour chaque point d, la quantité variable ξ, par rapport à la quantité constante Z, puisque la courbure du cordeau dépend des variations intermédiaires du courant. Comme il ne s'agit ici que d'une petite correction, il suffira, à la vérité, de connoître à peu près la relation entre ξ & x; mais toujours faudra-t-il la connoître, en quelque façon, sans quoi il vaudroit presque mieux de ne point employer de correction : plus on connoîtra exactement ladite relation, plus la correction désirée sera juste. Avant que de nous engager dans les discussions nécessaires sur cet article, j'indiquerai la maniere de s'y prendre du côté de l'analyse.

XXXIII.

Soit la hauteur verticale $AC = A$, & qu'on exprime la relation entre ξ & x par autant de termes qu'on voudra de l'équation indéfinie, que voici :

$$\xi = Z\left(x + \frac{\zeta x}{A} + \frac{\gamma xx}{A^2} + \frac{\delta x^3}{A^3} + \frac{\varepsilon x^4}{A^4} + \&c.\right)$$

Plus

Plus on prendra de termes, plus on obtiendra d'exactitude; mais auſſi plus on aura de peine à ſurmonter. Je ferai voir enſuite de quelle façon on pourra déterminer les coëfficiens inconnus α, ε, γ, &c. Cependant je crois que pour l'uſage que nous prétendons de faire de cette équation, les quatre premiers termes pourront ſuffire.

Si nous ſubſtituons à préſent pour z, ladite valeur, nous trouverons, après avoir intégré tous les termes, & puis ſubſtitué A à la place de x, l'angle

$$ANO = \mu M \times \frac{\delta}{d} \times \frac{A}{a} \times \left(\alpha + \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\gamma + \tfrac{1}{4}\delta + \tfrac{1}{5}\varepsilon + \&c.\right)$$

Voici à préſent quelques réflexions ſur les coëfficiens inconnus α, ε, γ, &c.

(1) Si on fait les obſervations pendant que le vaiſſeau ſille à pleines voiles, & qu'en même temps le courant ſoit peu ſenſible, il faut que z ſoit dans chaque point preſque égale à Z, parce que chaque point du cordeau eſt entraîné avec une même vîteſſe, & que le mouvement du courant, qui fait varier la viteſſe relative, eſt ſuppoſé peu ſenſible; & comme il ne s'agit pas pour la correction en queſtion, de connoître exactement la valeur de z, on pourra ſimplement ſuppoſer $\alpha = 1$, & tous les autres coëfficiens ε, γ, δ, &c, $= 0$: on aura donc, en ce cas, l'angle $A\,N\,O$, à peu près $= \mu\, M \times \frac{\delta}{d} \times \frac{A}{a}$.

Exemple. Soit le diamétre du cordeau δ, d'une demi ligne, le diamétre du cylindre d, de deux pieds, c'eſt-à-dire, $\frac{\delta}{d} = \frac{1}{576}$; qu'on ſuppoſe le corps plongé juſqu'à la profondeur verticale A, de 100 pieds, & que le cylyndre attaché au cordeau, ait la hauteur a, de deux pieds, on aura $\frac{A}{a} = 50$: ainſi l'angle $A\,N\,O$ ſera $= \frac{50}{576}\,\mu\, M$. Suppoſons enſuite qu'on ait remarqué l'angle $N\,A\,d$, préciſément de 45 dégrés, il faudra d'abord ſuppoſer, en

vertu du précédent article, $\mu = V\frac{1}{2}$, & $M = V\frac{1}{2}$; cela donnera l'angle cherché $ANO = \frac{25}{576} = 0,04330$, c'eſt-à-dire, de 2 dégrés 29′, & par conſéquent, le vrai angle HBG, de 42 dégrés 31′. Si on veut employer enſuite une ſeconde correction, il faudra faire $\mu =$ au ſinus de 42 dégrés 31′, & $M =$ au coſinus de $\frac{42^d\,31' + 45^d}{2}$ ou = au coſinus de 43 dégrés $45\frac{1}{2}'$, c'eſt-à-dire, $\mu = 0,67580$, & $M = 0,69161$; ce qui donne pour la ſeconde correction l'angle $ANO = 0,04057$, ou de 2 dégrés 19′, & par conſéquent, le vrai angle HBG, de 42 dégrés 41′. Une troiſieme correction importeroit à peine la valeur d'une minute, trop petite pour s'y arrêter. Nous voyons, par cet exemple, que l'erreur qui réſulte de la coubure du cordeau, n'eſt pas fort conſidérable; & la maniere dont nous l'avons corrigée, nous laiſſe à peine douter d'une ou de deux minutes. Nous avons cependant commencé par le cas le plus fâcheux. Mais s'il falloit deſcendre les corps à des profondeurs verticales beaucoup plus grandes, la correction augmenteroit à proportion, & elle iroit juſqu'à près de 7 dégrés, s'il falloit plonger le corps juſqu'a la profondeur de 300 pieds; de maniere que ſi le cordeau montroit une inclinaiſon de 45 dégrés, il ne faudroit plus l'eſtimer que de 38 dégrés, laquelle différence eſt très-conſidérable, pour l'uſage qu'on veut faire de l'obſervation de ces inclinaiſons. Nos corrections deviennent en même temps un peu plus douteuſes, parce que le cordeau s'écarte d'avantage de la ligne droite; mais elles ſeront toujours ſuffiſamment sûres pour notre deſſein, puiſque nous ne ſommes pas dans le cas de nous mettre en peine d'un petit nombre de minutes.

(2) Si on veut obſerver le courant ſur une chaloupe, ou ſur un vaiſſeau qui flotte avec une liberté entiere avec

le courant, tel qu'il eſt à la ſurface de la mer, & ſi on ſuppoſe, en même temps, que c'eſt un courant ſimple, qui diminue ſes vîteſſes en même raiſon que les diſtances, depuis le fond du courant; les vîteſſes relatives des eaux contre le cordeau, ſeront proportionelles aux profondeurs x, & on aura $\xi = \frac{xx}{AA} Z$, & l'angle ANO, ſera exprimé par $^{1}\mu M \times \frac{\delta}{d} \times \frac{A}{a}$.

Si nous ſuppoſons donc, par exemple, les mêmes circonſtances que dans l'exemple précédent, nous aurons pour premiere correction, l'angle ANO, de $46'$, & on pourra ſe paſſer entierement de la ſeconde correction.

(3) Si le vaiſſeau ſilloit dans un courant ſimple, dont le mouvement fût conſidérable par rapport au mouvement du ſillage, on pourroit ſe contenter de ſuppoſer $\xi = Z\left(a + \frac{\epsilon x}{A} + \frac{\gamma xx}{AA}\right)$. Dans les courans compoſés, dont on ne connoîtroit aucune loi ni variation, on pourra mettre un ou deux termes de plus, en ſuppoſant $\xi = Z\left(a + \frac{\epsilon x}{A} + \frac{\gamma xx}{AA} + \frac{\delta x^3}{A^3} + \frac{\varepsilon x^4}{A^4}\right)$: dans ces derniers cas il faut tâcher de connoître les coëfficiens α, β, &c. C'eſt ce qui nous reſte à montrer.

XXXIV.

Pour trouver la valeur deſdits coëfficiens, il n'y a qu'à plonger ſucceſſivement le corps à pluſieurs différentes profondeurs, & noter à chaque fois l'inclinaiſon du cordeau avec la profondeur correſpondante du corps, & il faudra faire autant d'obſervations, qu'il y a d'inconnues à déterminer dans l'équation ſuppoſée. Ainſi on commencera par plonger le corps tout près de la ſurface de la mer, & on remarquera l'inclinaiſon du cordeau; cette premiere obſervation donnera à connoître la vîteſſe du

vaiſſeau, relativement aux eaux de la ſurface de la mer, & puis la hauteur verticale génératrice de cette viteſſe : on comparera cette hauteur verticale avec Z, ou avec la pareille hauteur verticale répondante à la derniere obſervation ; & ſi elle en faiſoit, par exemple, la cinquiéme partie, on feroit d'abord $x = \frac{1}{5}$. On deſcendra enſuite le corps à la profondeur, par exemple, de 20 pieds, & puis de 40 pieds, &c. ; on comparera ces profondeurs avec celle de la derniere obſervation, indiquée par A, & on remarquera à chaque fois l'inclinaiſon du cordeau, par le moyen de laquelle on pourra connoître la valeur de $\frac{z}{x}$ pour telle profondeur de x qu'on voudra : ainſi on aura autant de cas connus qu'on voudra, qui devant tous être compris dans l'équation ſuppoſée, on ſera enfin en état de déterminer tous les coëfficiens inconnus α, β, γ, &c. On voit donc qu'on peut ſe ſervir des obſervations intermédiaires, pour déterminer la valeur de $\frac{z}{x}$, pour telle hauteur verticale x qu'on veut ; mais il eſt à remarquer que ſi on veut ſuivre cette méthode, avec toute l'exactitude qu'elle permet, il faudra d'abord corriger la ſeconde obſervation par la premiere, & puis la troiſieme par la premiere & la ſeconde, & ainſi de ſuite. Ce ſont là cependans des corrections du ſecond ordre, dont on pourra ſe paſſer.

Cette application ſuffira, ſans doute, pour ceux qui ont quelque connoiſſance de géométrie, & ce n'eſt qu'en faveur de ceux-ci que je me ſuis engagé dans ces dernieres diſcuſſions, pour faire voir qu'il n'y a abſolument aucun inconvénient dans nos méthodes, auquel on ne puiſſe remédier avec une préciſion ſuffiſante.

XXXV.

S'il arrivoit enfin, qu'à meſure qu'on deſcend les corps on vit le plan vertical du cordeau changer de direction, il ſera bon de rapporter tous les plans des obſervations précédentes, au plan de la derniere obſervation, & de

réduire le mouvement relatif des différens lits d'eau au mouvement pris dans la direction du dernier plan ; cette précaution n'a pas, à la vérité, toute la force de la précision de géométrie, mais elle peut suffire dans cette occasion, où il ne s'agit que d'une certaine petite correction.

XXXVI.

Il nous reste une remarque à faire, si nous voulons employer la même exactitude pour tous les points essentiels de notre méthode. Nous avons vu comment on peut déterminer les vîtesses & les directions relatives de tous les lits d'eau ; ces mouvemens relatifs deviennent des mouvemens absolus, en les rapportant aux eaux calmes, qui sont au-dessous du fond du courant ; & nous avons supposé qu'on peut plonger les corps assez profondément pour atteindre la région des eaux calmes, ou du moins celle des eaux qu'on puisse censer telles sans aucune erreur sensible. Nous avons tellement appuyé cette supposition, dans notre premiere partie, qu'on n'aura, comme j'espére, aucune peine à l'admettre. J'ai dit enfin, qu'on reconnoîtra d'avoir atteint cette région, lorsqu'on remarquera que l'inclinaison du cordeau ne varie plus ; mais c'étoit en supposant encore, que l'action des eaux contre le cordeau est nulle. On remarquera donc maintenant, que nous avons évalué cette action, que ce n'est pas l'angle AFE qui doit demeurer invariable, mais l'angle corrigé HBG ; le premier montrera des variations, quoiqu'à la vérité extrêmement petites, quand même le corps qu'on continue de descendre auroit atteint des eaux parfaitement calmes. Il faudra donc toujours corriger l'angle observé AFE, conformément au §. 33. ; & ce n'est qu'après cette correction, qu'on pourra juger si l'on aura atteint la région des eaux calmes, ou s'il faudra descendre davantage le corps pour y parvenir, en examinant si cet angle corrigé ne varie plus sensiblement, ou s'il varie encore, puisque c'est l'angle HBG qui ne varie pas dans les eaux calmes.

XXXVII.

On ſera peut-être ſurpris de me voir examiner ſi ſcrupuleuſement l'action des eaux contre le cordeau, ſans que j'aie encore fait mention du dérangement cauſé par ſon propre poids. Je n'ai pas manqué d'examiner ce ſecond point; mais le calcul m'ayant appris qu'il n'eſt preſque d'aucune importance, j'ai cru pouvoir me diſpenſer d'en parler plutôt. Voici, à préſent, ce qui en eſt. Si le cordeau AB eſt d'une peſanteur ſpécifique, plus grande que celle des eaux de la mer, l'inclinaiſon du cordeau en ſera diminuée au point A, & augmentée au point B: nous conſidérerons ce changement à part, en faiſant abſtraction de l'impulſion des eaux contre le cordeau; il faudra après cela, ſuppoſer deux forces au point A, l'horiſontale AE, & la verticale AL, de même qu'au point B la force horiſontale BD, & la verticale BG, dont la premiere eſt égale à l'action des eaux contre le corps plongé, & la ſeconde, égale au poids que le corps a ſous l'eau. Soit, à préſent, le ſinus de l'angle $HBG = \mu$, celui de l'angle $AFE = m$, le poids que le corps a ſous l'eau $= P$; on aura $BG = P$; $BD = \frac{\mu P}{\sqrt{1-\mu\mu}}$. Or on démontre, dans la méchanique, que la force AE eſt égale à la force BD; nous avons donc $AE = \frac{\mu P}{\sqrt{1-\mu\mu}}$: Soit enfin, le poids que le cordeau a ſous l'eau $= \pi$; on démontre encore, dans la méchanique, que la force AL eſt $= P + \pi$; ſi nous faiſons donc cette analogie $AE : AL :: m : \sqrt{1-mm}$; nous aurons par-là, cette équation

$$\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu\mu}} = \frac{m}{\sqrt{1-mm}} \times \frac{P+\pi}{P}$$

qui détermine l'angle corrigé HBG, quelque grande que ſoit la courbure cauſée par le poids du cordeau. Cette équation devient beau-

coup plus ſimple en ſuppoſant le cordeau ſous l'eau preſque droit, & la différence entre les angles HBG & AFE, très-petites ; ſuppoſition qu'on peut faire ſans la moindre erreur ſenſible, comme nous verrons par un exemple : on trouve en ce cas l'angle HBG, moins l'angle AFE, indiqué par $-\int\frac{ds}{R} = m\sqrt{1-mm}\times\frac{\pi}{P}$. Voici à préſent un exemple conforme à notre théorie, qui nous confirmera dans la ſuppoſition, que nous avons faite, que cette correction ſera ordinairement fort petite.

Exemple. Faiſons les mêmes poſitions que nous avons faites dans l'exemple de la premiere note du §. 33, & ſuppoſons, outre cela, que la peſanteur ſpécifique du corps plongé, ſoit à celle de l'eau, comme 17 à 16 ; & celle du cordeau à celle de l'eau, comme 7 à 5 ; c'eſt la proportion que j'ai trouvée, à peu près, aux cordes de chanvre. Si donc le corps eſt plongé juſqu'à la profondeur de 100 pieds, & que l'angle d'inclinaiſon ſoit de 45 dégrés, la longueur du cordeau ſera d'environ 142 pieds, & nous aurons

$$\frac{\pi}{P} = \frac{142}{2}\times\frac{1}{(4.12.12)^2}\times\frac{2}{5}\times\frac{16}{1} = 0,00137 \text{ \& } m\sqrt{1-mm}\times\frac{\pi}{P} = 0,00068,$$

ce qui ne fait qu'un angle d'environ 2 min. & un tiers. Cette correction eſt donc très-petite, quoiqu'elle ne ſoit jamais plus grande que pour un angle de 45 dég. On pourroit plonger le corps juſqu'à la profondeur de 600 pieds, & l'angle de correction ne ſeroit encore que de 14′. Mais ſi l'expérience faiſoit voir qu'on fût obligé de ſe ſervir de cordeaux beaucoup plus épais & plus forts que nous n'avons ſuppoſé, il ne faudroit pas négliger la correction que nous venons de marquer. Ayant égard à cette correction de deux minutes & un tiers, il faudra la retrancher de la premiere du §. 33, que nous avons trouvée pour les mêmes ſuppoſitions de 2 dé-

grés 19′, & nous aurons pour correction entiere 2 dégrés 16′ $\frac{2}{3}$, & l'angle corrigé HBG, de 42 dégrés 43′ 20″.

XXXVIII.

Je ferai encore une petite réflexion sur la maniere de connoître les hauteurs verticales, depuis la surface de la mer, jusqu'au corps attaché au cordeau. Si on nomme l la longueur du cordeau mouillé, qu'il faut toujours observer, on voit d'abord que la profondeur verticale du corps plongé sera à peu près égale à $l\sqrt{1-mm}$, puisque le cordeau fait presque une ligne droite, sous un angle d'inclinaison dont le cosinus est exprimé par $\sqrt{1-mm}$. Il faut cependant remarquer que la vraie profondeur verticale sera le plus souvent un peu plus grande que $l\sqrt{1-mm}$. J'ai trouvé par le moyen de notre équation générale du §. 31, dont j'ai fait l'analyse suivant toutes les régles d'approximation, en supposant d'abord $dy = m\,ds - d\varepsilon$, & en traitant $d\varepsilon$ de fort petite, par rapport à dy, j'ai trouvé, dis-je, $d\varepsilon = \frac{m\sqrt{1-mm}.\delta.dx\int\xi\,dx}{a\,dZ}$ ou bien $\varepsilon = \frac{m\sqrt{1-mm}.\delta.\int dx\int\xi\,dx}{a\,dZ}$ & puis $x = s\sqrt{1-mm} \mp \frac{m\,m\,\delta\int dx\int\xi\,dx}{a\,dZ}$, & par conséquent, toute la profondeur verticale $AC = l\sqrt{1-mm} + \frac{m\,m\,\delta\int dx\int\xi\,dx}{a\,dZ}$

Dans cette correction, j'ai négligé la courbure qui résulte par le poids que le cordeau retient sous l'eau, comme étant beaucoup plus petite que celle qui provient de l'action des eaux contre le cordeau. Je n'étalerai pas ici tous les détours que j'ai pris pour arriver à cette correction, parce que je crois qu'on peut s'en passer dans l'exécution de nos méthodes, qui ne demandent pas une exacte détermination des profondeurs verticales du corps plongé.

plongé. J'éclaircirai pourtant l'application de notre formule par un exemple, afin qu'on voie jusqu'où peut aller la correction dont nous parlons.

Exemple. Soit l'inclinaison du cordeau de 45 dégrés, la longueur du cordeau mouillé AB ou $l = 141\frac{1}{2}$ pieds; nous aurions sans la correction la profondeur verticale $AC = 100$ pieds : pour trouver la correction indiquée par $\frac{mm\delta\int dx\int\xi dx}{adZ}$, il faut connoître les variations ξ que j'ai fait voir ci-dessus pouvoir se déterminer à l'aide des observations précédentes. Soit $\xi = Z$; nous aurons $\int\xi dx = Zx$ & $\int dx\int\xi dx = \frac{1}{2}Zxx$ pour un point quelconque d & $= \frac{1}{2}ZAC'$ pour le point C ; supposons après cela $\delta = \frac{1}{2}$ ligne, $d = a = 2$ *pieds* & nous aurons la correction $\frac{mm\delta\int dx\int\xi dx}{adZ} = \frac{1}{400}AC$, c'est-à-dire que la hauteur verticale AC devient après la correction égale à 102 pieds 2 pouces, au lieu de 100 pieds qu'on trouve sans la correction : cette correction servira pour les foibles courans qu'on voudra observer pendant que le vaisseau file à pleines voiles. Si le vaisseau est simplement emporté par le courant, on pourra supposer $\xi = \frac{xx}{AC^2} \times Z$ & on aura $\int dx\int\xi dx = \frac{1}{12}\cdot\frac{x^4Z}{AC^2}$ & en particulier, pour le point $C = \frac{1}{12}Z \times AC^2$, de sorte que la correction devient six fois plus petite que dans l'hypothèse précédente & qu'elle ne sera plus que de $4\frac{1}{3}$ pouces.

XXXIX.

Nous voyons, après toutes ces discussions & corrections, que la géométrie nous fournit de suffisans remèdes contre toutes les difficultés qui pourront se rencontrer ; ceux qui auront bien voulu approfondir nos méthodes,

ſeront certainement en état de déterminer, aſſez exactement, les courans, non ſeulement près de la ſurface de la mer, mais dans toute leur profondeur, quand même on voudroit ſuppoſer aux eaux un mouvement ſenſible juſqu'à la profondeur de 600 pieds. Mais quant à ceux qui ne trouveront pas toutes ces reſſources en eux-mêmes, je leur conſeillerois d'obſerver ſimplement les courans de dix en dix pieds de profondeur verticale, juſqu'à la profondeur de cent pieds, ſans employer aucune correction, pour peu qu'ils héſitent ſur la maniere de la faire. Mais s'il arrivoit après cela, que l'inclinaiſon du cordeau eût encore des variations ſenſibles, depuis la profondeur de 90 pieds juſqu'à celle de cent pieds, je préſume qu'une bonne induction, fondée ſur toutes les obſervations réunies ſous un même point de vue, ſuffira le plus ſouvent, pour juger de l'inclinaiſon que prendroit le cordeau s'il étoit plongé juſques dans les les eaux parfaitement calmes. Au reſte je prévois ſans peine, que le dernier dégré de perfection dépendra, pour la plus grande partie, d'une longue expérience & habitude, qu'on aura priſes dans l'obſervation des courans, ſuivant les régles que nous en avons données. Si on avoit fait actuellement un certain nombre de ces ſortes d'obſervations, quelqu'en eût été le réſultat, j'en aurois pu tirer un très-grand fruit, & je me ſerois trouvé en état de parler avec aſſurance ſur pluſieurs points que je n'ai oſé traiter qu'hypothétiquement & par des conjectures, quoique toujours appuyées par des connoiſſances phyſiques bien avérées.

XL.

Je finirai enfin ce long Mémoire par un eſſai de machine, par le moyen de laquelle on puiſſe obſerver les courans à telle profondeur qu'on voudra, ſans tomber dans les inconvéniens que nous avons pris tant de ſoin à éviter & à corriger. On pourroit faire une lentille *P Q R S*

(*fig.* 7) telle qu'on emploie pour les pendules, d'un pied ou de deux pieds de diamétre. Je ſuppoſe cette figure, afin que le corps offre toujours le tranchant au mouvement relatif des eaux ; on chargera cette lentille, entre les deux plaques, avec du plomb fondu, par exemple, juſqu'à la hauteur du demi rayon *B S*, de maniere qu'étant ſuſpendue par les deux extrémités de l'axe qui paſſe par le centre *B*, & plongée ſous l'eau, la ligne *B S* garde toujours ſa ſituation verticale : il eſt clair que la lentille conſervera cette poſition malgré le mouvement relatif des eaux, parce que les eaux agiſſent également ſur la partie ſupérieure de la lentille, & ſur ſa partie inférieue. On fera en ſorte que la lentille tourne librement ſur ſon axe, entre deux piéces de métal, par leſquelles elle eſt ſuſpendue & qui les réuniſſent ; la tête de cette double piéce de métal ſera enfin attachée à un très-long cordeau ; le même axe de la lentille ſoutiendra, de la même façon, une boule *G*, d'un diamétre d'environ 3 pouces, & d'une peſanteur ſpécifique plus grande que l'eau ; cette boule *G*, ſera miſe dans la ſituation *H*, par l'action des eaux, ſans que la poſition de la lentille en ſoit dérangée, & l'angle *H B G* montrera la vîteſſe relative des eaux & de la boule. On pourroit donc conſtruire, au dedans de la lentille, quelques piéces d'horlogerie, qui au bout d'un certain temps, comme par exemple 4′, arrêtaſſent la boule dans ſa poſition ; l'uſage d'un tel inſtrument conſiſteroit à le plonger aſſez profondément pour être entierement sûr qu'il ait atteint la région des eaux calmes ; mais il faudroit que cela ſe fît en moins de 4′, & à le retirer après les 4′ écoulées, pour pouvoir obſerver l'angle *H B G* : par cette obſervation on ſçaura la vraie vîteſſe abſolue du vaiſſeau. Quant à la direction du mouvement abſolu du vaiſſeau, on peut ſuppoſer qu'elle eſt la même que celle du plan vertical qui paſſe par le cordeau. Si cependant cette ſuppoſition faiſoit de la peine, il faudroit recourir à une éguille aimantée, ajoutée à l'inſtrument

dont je viens de faire une légére ébauche, & qui fût affermie, dans ſa poſition, au même inſtant que la boule eſt arrêtée.

Si j'ai fait mention d'une telle machine, ce n'eſt pas que je la croie aſſez parfaite pour en faire uſage ; toute mon intention n'a été que d'indiquer les principes qu'il faudroit obſerver dans la conſtruction d'un ſemblable machine.

FIN.

RECHERCHES

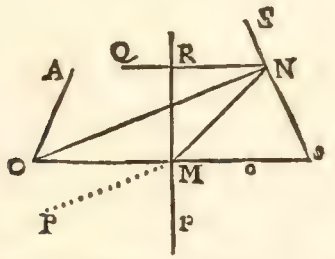
SUR

LES INÉGALITÉS

DE JUPITER ET DE SATURNE.

Par M. Leonard Euler,

De l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celles de Londres, de Petersbourg, de Berlin, &c.



Cette Figure se rapporte à la page 6 de ce Mémoire.

A PARIS,

Chez Pancroucke, rue & à côté de la Comédie Françoise.

M. DCC. LXIX.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

RECHERCHES
SUR
LES IRRÉGULARITÉS
DU MOUVEMENT
DE JUPITER ET DE SATURNE.

Piéce qui a remporté le Prix proposé par l'Académie Royale des Sciences, pour l'année 1752.

Par M. Leonard Euler, *Associé Etranger de l'Académie Royale des Sciences, & Membre de celles de Petersbourg, de Berlin, de Londres, &c.*

RECHERCHES

SUR LES IRRÉGULARITÉS

DU MOUVEMENT

DE JUPITER ET DE SATURNE.

Nihil eſt enim, quod aut natura extremum invenerit, aut doctrina primum. *Ad* HERENN. *Lib. III.*

§. I.

Sur la cauſe des irrégularités du mouvement de Jupiter & de Saturne.

LES obſervations aſtronomiques nous ont fait connoître que les Planètes de Jupiter & de Saturne ne ſuivent pas exactement, dans leur mouvement, les règles établies par Kepler, & que le dernier principalement s'en écarte très-ſenſiblement, ſurtout lorſque ces deux Planètes ſe trouvent près de leur conjonction. C'eſt donc aux obſervations que nous devons cette connoiſſance, mais c'eſt auſſi tout ce que

nous en pouvons attendre ; car il y a bien de l'apparence que quelque ſoin que les Aſtronomes apportent à bien obſerver ces dérangemens, ils ne parviendront jamais à une connoiſſance ſuffiſante de l'ordre qui règne ſans doute dans ces irrégularités, pour pouvoir prédire en tout tems combien ces Planètes s'écarteront, dans leur mouvement, des règles de Kepler. Il n'y a donc que la Théorie qui puiſſe nous ſervir de guide dans cette recherche ; & c'eſt de-là uniquement qu'il faut tâcher de tirer les règles que ces deux Planètes obſervent dans leur mouvement, quelque irrégulier qu'il puiſſe paroître. Il faut donc commencer par bien déterminer la cauſe dont ces dérangemens ſont l'effet ; ou, ce qui revient au même, il faut connoître les forces qui produiſent dans le mouvement de ces Planètes les inégalités dont il eſt queſtion.

Or la Théorie de Newton, en tant qu'elle établit l'attraction univerſelle des corps céleſtes, nous découvre d'abord les forces qui doivent troubler le mouvement de Jupiter & de Saturne ; puiſque ces deux Planètes, qui ſurpaſſent les autres pluſieurs fois en groſſeur, ne ſauroient manquer d'agir aſſez ſenſiblement l'une ſur l'autre, ſur tout lorſqu'elles ne ſont pas fort éloignées de leur conjonction. Il n'y a donc pas le moindre doute que l'attraction mutuelle de ces deux Planètes ne ſoit la véritable cauſe des irrégularités qu'on obſerve dans leur mouvement : il s'agit ſeulement de ſavoir ſi cette force attractive ſuit exactement la proportion renverſée des quarrés des diſtances, comme Newton avoit ſuppoſé, ou non.

En effet, ſi cette proportion répondoit ſi mal au mouvement de l'apogée de la Lune, comme on a eu lieu de croire juſqu'ici, on ſeroit bien autoriſé à douter que la même proportion ſubſiſte dans les forces, dont les autres Planetes agiſſent les unes ſur les autres. Mais depuis que M. Clairaut a fait cette importante

importante découverte, que le mouvement de l'apogée de la Lune eſt parfaitement d'accord avec l'hypothèſe Newtonienne ſur la loi d'attraction, il ne reſte plus le moindre doute ſur la généralité de cette proportion; & puiſque cette même proportion convient ſi exactement au mouvement de la Lune, malgré toutes les objections qu'on a cru être bien fondé à faire, on pourra maintenant ſoutenir hardiment que les deux Planètes de Jupiter & de Saturne s'attirent mutuellement en raiſon réciproque des quarrés de leur diſtance; & que toutes les irrégularités qui ſe peuvent découvrir dans leur mouvement ſont infailliblement cauſées par cette action mutuelle. Voilà donc déja la véritable cauſe de tous ces dérangemens de quelque nature qu'ils puiſſent être; & ſi les calculs qu'on prétend avoir tirés de cette Théorie ne ſe trouvent pas aſſez bien d'accord avec les obſervations, on ſera toujours en droit de douter plutôt de la juſteſſe des calculs, que de la vérité de la Théorie. Car quoique la Théorie nous conduiſe aiſement à des équations qui renferment le mouvement des Planètes, de quelques forces qu'elles ſoient ſollicitées, pour peu qu'on ait manié ces équations, on tombera aiſément d'accord que leur réſolution eſt aſſujettie à de très grandes difficultés; & quelques précautions qu'on ait priſes dans ce travail, on ne ſauroit parvenir qu'à des approximations, par le moyen deſquelles on ne pourra pas aſſeurer ſi le réſultat ne s'écarte pas beaucoup plus de la vérité qu'on ne penſe.

Dans ces circonſtances embarraſſantes, il n'eſt pas ſurprenant que l'Académie Royale des Sciences n'ait pas été entièrement contente de la pièce qu'elle avoit couronnée du prix ſur cette même matiere, il y a quatre ans; car quoique les calculs qu'elle renferme ſoient tirés de cettte Théorie avec bien de la peine, & que

la plupart des irrégularités que ces calculs ont fournies, ſe trouvent confirmées par les obſervations, il s'en faut cependant beaucoup que l'auteur ait épuiſé cette importante matière. Car la méthode dont il s'eſt ſervi pour arriver à ſes approximations, outre qu'elle conduit à des calculs extrêmement ennuyans, demeure toujours fort aſſujettie à des doutes ſur la ſuffiſance de ſes reſultats; vu que le nombre de toutes les inégalités étant actuellement infini, celles que l'Auteur a developpées dépendent auſſi, ſuivant la méthode qu'il a emploiée, des autres qu'il a négligées; ce qui en rend les valeurs incomplettes. Je tâcherai donc de remédier à cet inconvénient, en me ſervant d'une méthode qui me paroît tout-à-fait nouvelle, & qui ne mêle pas ſi fort enſemble les diverſes inégalités qu'elle fait découvrir. Cependant je crois que je me pourrai diſpenſer de la recherche des inégalités qui ſe rencontrent dans la ligne des nœuds, & dans l'inclinaiſon mutuelle des orbites de ces deux Planètes, puiſqu'il me ſemble que la pièce mentionnée a parfaitement bien developpé cette partie de la queſtion.

§. II.

Réduction de la Queſtion à l'Analyſe pure.

QUE les deux Planètes en Queſtion ſe meuvent donc avec le Soleil dans le même plan; & ſoit le centre du Soleil en O, de Jupiter en M, & de Saturne en N. Nommons la maſſe du Soleil $= \odot$, celle de Jupiter $= \angle$, & le Saturne $= \flat$, & ayant tiré les droites OM, ON & MN; les forces, dont ces trois corps agiſſent entr'eux, ſeront telles:

I. Le Soleil O eſt ſollicité par les forces $\begin{cases} \text{ſelon } OM = \frac{\mathfrak{Z}}{OM^2}. \\ \text{ſelon } ON = \frac{\mathfrak{h}}{ON^2}. \end{cases}$

II. Jupiter M eſt ſollicité par les forces $\begin{cases} \text{ſelon } MO = \frac{\odot}{OM^2}. \\ \text{ſelon } MN = \frac{\mathfrak{h}}{MN^2}. \end{cases}$

III. Saturne N eſt ſollicité par les forces $\begin{cases} \text{ſelon } NO = \frac{\odot}{ON^2}. \\ \text{ſelon } MN = \frac{\mathfrak{Z}}{MN^2}. \end{cases}$

Or puiſqu'il faut déterminer le mouvement des deux Planètes, comme il paroîtroit à un ſpectateur placé au centre du Soleil, on doit tranſporter les forces, qui agiſſent ſur le Soleil, en ſens contraire ſur les Planètes mêmes. Donc pour pouvoir regarder le Soleil comme demeurant en repos, ſi nous menons les droits MP, NQ, paralleles à NO, MO, il eſt clair, que

Jupiter en M ſera ſollicité par les forces $\begin{cases} \text{ſelon } MO = \frac{\odot + \mathfrak{Z}}{OM^2}. \\ \text{ſelon } MN = \frac{\mathfrak{h}}{MN^2}. \\ \text{ſelon } MP = \frac{\mathfrak{h}}{ON^2}. \end{cases}$

Saturne en N ſera ſollicité par les forces $\begin{cases} \text{ſelon } NO = \frac{\odot + \mathfrak{h}}{ON^2}. \\ \text{ſelon } NM = \frac{\mathfrak{Z}}{MN^2}. \\ \text{ſelon } NQ = \frac{\mathfrak{Z}}{OM^2}. \end{cases}$

Maintenant il faut décompoſer ces forces ſuivant deux directions, dont les unes ſoient dirigées vers le Soleil ;

& les autres y ſoient perpendiculaires. Pour cet effet ayant tiré les droites, RMr & SNs, perpendiculaires à MO & NO, & prolongé OM en o.

Pour Jupiter.

La force $\frac{\mathfrak{h}}{MN^2}$ ſelon MN donnera $\begin{cases} \text{pour la direction } Mo = \frac{\mathfrak{h}}{MN^2} \text{ cof. } NMo. \\ \text{pour la direction } MR = \frac{\mathfrak{h}}{MN^2} \text{ ſin. } NMo \end{cases}$

La force $\frac{\mathfrak{h}}{ON^2}$ ſelon MP donnera $\begin{cases} \text{pour la direction } MO = \frac{\mathfrak{h}}{ON^2} \text{ cof. } MON. \\ \text{pour la direction } Mr = \frac{\mathfrak{h}}{ON^2} \text{ ſin. } MON. \end{cases}$

Pour Saturne.

La force $\frac{\mathfrak{Y}}{MN^2}$ ſelon NM donnera $\begin{cases} \text{pour la direction } NO = \frac{\mathfrak{Y}}{MN^2} \text{ cof. } MNO. \\ \text{pour la direction } Ns = \frac{\mathfrak{Y}}{MN^2} \text{ ſin. } MNO. \end{cases}$

La force $\frac{\mathfrak{Y}}{OM^2}$ ſelon NQ donnera $\begin{cases} \text{pour la direction } NO = \frac{\mathfrak{Y}}{OM^2} \text{ cof. } MON. \\ \text{pour la direction } NS = \frac{\mathfrak{Y}}{OM^2} \text{ ſin. } MON. \end{cases}$

De-là nous obtiendrons les forces ſuivantes, dont l'une & l'autre Planète ſera ſollicitée,

Premièrement Jupiter ſera ſollicité.

Suivant MO par la force $= \frac{\odot + \mathfrak{Y}}{OM^2} + \frac{\mathfrak{h}}{ON^2} \text{ cof. } MON - \frac{\mathfrak{h}}{MN^2} \text{ cof. } NMo.$

Suivant MR par la force $= -\frac{\mathfrak{h}}{ON^2} \text{ ſin. } MON + \frac{\mathfrak{h}}{MN^2} \text{ ſin. } NMo.$

Enſuite Saturne ſera ſollicité

Suivant NO par la force $= \frac{\odot + \mathfrak{h}}{ON^2} + \frac{\mathfrak{Y}}{OM^2} \text{cof. } MON + \frac{\mathfrak{Y}}{MN^2} \text{cof. } MNO.$

Suivant NS par la force $= + \frac{\mathfrak{Y}}{OM^2} \text{ ſin. } MON - \frac{\mathfrak{Y}}{MN^2} \text{ ſin. } MNO.$

Cela

Cela posé, nommons les distances $OM = x$, $ON = y$, & l'angle $MON = \omega$, & on aura $MN = \sqrt{(xx + yy - 2xy\ cos.\ \omega)} = z$. De plus pour les autres angles on aura :

$$sin.\ NMo = \frac{y\ sin.\ \omega}{z} \qquad cos.\ MNo = \frac{y\ cos.\ \omega - x}{z}$$

$$sin\ MNO = \frac{x\ sin\ \omega}{z} \qquad cos.\ MNO = \frac{y - x\ cos.\ \omega}{z}$$

Donc en introduisant ces valeurs, les forces qui agissent sur Jupiter seront :

celle qui agit selon $MO = \frac{\odot + \Psi}{xx} + \frac{\flat\ cos.\ \omega}{yy} - \frac{\flat\ (y\ cos.\ \omega - x)}{z^3}$

celle qui agit selon $MR = -\frac{\flat\ sin.\ \omega}{yy} + \frac{\flat\ y\ sin\ \omega}{z^3}$

Or les forces qui agissent sur Saturne seront

celle qui agit selon $NO = \frac{\odot + \flat}{yy} + \frac{\Psi\ cos.\ \omega}{xx} + \frac{\Psi\ (y - x\ cos.\ \omega)}{z^3}$

celle qui agit selon $NS = +\frac{\Psi\ sin.\ \omega}{xx} - \frac{\Psi\ x\ sin\ \omega}{z^3}$

Qu'on choisisse à présent à volonté une direction fixe OA, pour en conter la longitude des Planètes & qu'on nomme,

La longitude de Jupiter $AOM = \eta$, celle de Saturne $AON = \theta$, de sorte qu'on ait $\eta - \theta = \omega$: & posant dt, pour marquer l'élément du tems qui soit pris constant, les principes de Mécanique nous fourniront les équations suivantes.

Pour Jupiter.

$$2\,dx\,d\eta + x\,ddn = -\tfrac{1}{2}\,dt^2\left(\frac{-\flat\ sin.\ \omega}{yy} + \frac{\flat\ y\ sin.\ \omega}{z^3}\right)$$

$$ddx - x\,d\eta^2 = -\tfrac{1}{2}\,dt^2\left(\frac{\odot + \Psi}{xx} + \frac{\flat\ cos.\ \omega}{yy} - \frac{\flat\ (y\ cos.\ \omega - x)}{z^3}\right)$$

Pour Saturne.

$$2\,dy\,d\theta + y\,d\,d\theta = -\tfrac{1}{2}\,dt^2\left(+\frac{\text{Ⅳ}\,\sin.\,\omega}{x\,x} - \frac{\text{Ⅳ}\,x\,\sin.\,\omega}{\zeta^3}\right)$$

$$d\,dy - y\,d\theta^2 = -\tfrac{1}{2}\,dt^2\left(\frac{\odot + \text{♄}}{y\,y} + \frac{\text{Ⅳ}\,\cos.\,\omega}{x\,x} + \frac{\text{Ⅳ}\,(y - x\,\cos.\,\omega)}{\zeta^3}\right)$$

Pour chaſſer du calcul l'élément du tems dt, on n'a qu'à introduire à ſa place le mouvement moyen des Planètes qu'elles ſuivroient ſi elles décrivoient des cercles autour du Soleil en même tems périodique. Soit donc la diſtance moyenne de Jupiter au Soleil $= a$ & ſa longitude moyenne $= p$, la diſtance moyenne de Saturne au Soleil $= b$ & ſa longitude moyenne $= q$. Suppoſons que ce mouvement moyen ſoit produit par la ſeule force du Soleil, ou bien concevons deux corps qui décrivent autour du Soleil des cercles dont les tems périodiques ſoient égaux à ceux de Jupiter & de Saturne, de ſorte que les longitudes de ces corps marquent à chaque tems les longitudes moyennes de Jupiter & de Saturne: & il eſt clair que nos formules donneront le mouvement de ces deux corps, en ſuppoſant Ⅳ $= o$, ♄ $= o$, $x = o$, $y = b\,n = p$ & $\theta = q$, d'où nous obtiendrons $a\,dp^2 = \frac{1}{2}\,dt^2 . \frac{\odot}{a\,a}$ & $b\,dq^2 = \frac{1}{2}\,dt^2 . \frac{\odot}{b\,b}$, ou bien $\frac{1}{2}\odot dt^2 = a^3\,dp^2 = b^3\,dq^2$. Introduiſons donc au lieu de dt, les élémens dp & dq, qui ſeront également conſtans; & poſons, pour abréger $\frac{\text{Ⅳ}}{\odot} = \mu$ & $\frac{\text{♄}}{\odot} = \nu$, dont les valeurs ſont connues par les révolutions des Satellites, d'où l'on conclut $\mu = \frac{1}{1067}$ & $\nu = \frac{1}{3021}$; & nous aurons

Pour Jupiter ces deux équations,

$$2\,dx\,d\eta + x\,d\,d\eta = -\nu\,a^3\,dp^2\,\mathit{sin.}\,\omega\left(-\frac{1}{yy}+\frac{y}{\zeta^3}\right)$$

$$d\,d\,x - x\,dy^2 = -a^3\,dp^2\left(\frac{1+\mu}{xx}+\frac{\nu\,\mathit{cos.}\,\omega}{yy}+\frac{\nu\,(x-y\,\mathit{cos.}\,\omega)}{\zeta^3}\right)$$

& pour Saturne celle-ci:

$$2\,dy\,d\theta + y\,d\,d\theta = -\mu\,b^3\,dq^2\,\mathit{sin.}\,\omega\left(\frac{1}{xx}-\frac{x}{\zeta^3}\right)$$

$$d\,d\,y - y\,d\theta^2 = -b^3\,dq^2\left(\frac{1+\nu}{yy}+\frac{\mu\,\mathit{cos.}\,\omega}{xx}+\frac{\mu\,(y-x\,\mathit{cos.}\,\omega)}{\zeta^3}\right)$$

Or, puiſque le mouvement moyen des deux Planètes eſt connu, le rapport entre dp & dq le ſera également; car puiſque à l'égard des étoiles fixes ſelon le mouvement moyen:

Jupiter avance en 5 ans de 5^{s}, 10, $43'$, $40''$.
& Saturne — — — de 2, 1, 4, 51.

nous en aurons $\frac{dp}{dq}=\frac{546220}{215891}=2,48405$ ou $\frac{dq}{dp}=0,4025686$

& puiſque $a^3\,dp^2 = b^3\,dq^2$, il s'enſuit $\frac{b}{a}=1,834172$ ou $\frac{a}{b}=0,545205$

En voici donc les valeurs abſolues, ſur leſquelles on doit fonder le calcul ſuivant. Or pour déterminer auſſi les conſtantes, que ces quatre équations *differentio-*différentielles renferment, leſquelles ſont au nombre de huit, il faut avoir égard aux conditions ſuivantes.

Premiérement, puiſque p & q marquent les longitudes moyennes, ſi nous poſons $\eta = p + P$ & $\theta = q + Q$, il faut que les quantités P & Q ne renferment ni des quantités conſtantes, ni des termes de la forme αp & bq, parceque alors p & q ne ſeroient plus

les longitudes moyennes. Donc P & Q ne contiendront que des ſinus ou coſinus de certains angles, qui contribueront autant à augmenter qu'à diminuer les longitudes moyennes. Cette condition déterminera déja quatre conſtantes.

Enſuite la quantité de l'une & de l'autre excentricité, qui doit être conclue par les obſervations, ſervira auſſi à déterminer deux conſtantes renfermées dans nos équations.

Enfin comme l'excentricité entraîne avec elle l'anomalie qui ſe pourroit compter depuis un point quelconque de l'orbite excentrique, l'uſage & la commodité du calcul exigent qu'on la compte depuis l'aphélie; deſorte que l'anomalie s'évanouiſſe lorſque la Planète ſe trouve dans ſon aphélie. Cette conſidération déterminera les deux dernieres conſtantes.

Tout le travail ſe réduit donc à réſoudre les quatre équations différentielles que les principes mécaniques ont fournies.

§. III.

Méthode de réſoudre les équations trouvées.

JE dois d'abord remarquer qu'on ne gagneroit rien quelque peine qu'on voulût ſe donner, pour intégrer ces équations. Car d'un côté je doute fort qu'on trouve jamais de moyen d'y parvenir; & d'un autre côté, quand même on ſeroit ſi heureux d'en tirer des équations intégrales, comme elles ſeroient extrêmement compliquées, elles ne pourroient apporter preſque aucun avantage pour l'uſage de l'aſtronomie; & on ſeroit néanmoins

néanmoins obligé d'en déduire des approximations propres à ce deſſein. Or quand il s'agit des approximations, il ſera auſſi aiſé de les tirer immédiatement des équations *differentio*-différentielles.

Il eſt toujours convenable de commencer par les premieres équations

$$2\,dx\,d\eta + x\,d\,d\eta = -\nu a^3\,dp^2\,\mathit{ſin.}\,\omega\left(\frac{1}{yy} + \frac{y}{\zeta^3}\right)$$

$$2\,dy\,d\theta + y\,d\,d\theta = -\mu b^3\,dq^2\,\mathit{ſin.}\,\omega\left(\frac{1}{xx} - \frac{x}{\zeta^3}\right)$$

dont les premiers membres deviennent intégrables étant multipliés par x & y, d'où l'on tire à cauſe de $b^3\,dq^2 = a^3\,dp^2$;

$$x\,x\,d\eta = C\,dp + \nu a^3\,dp\int\frac{x\,dp\,\mathit{ſin.}\,\omega}{yy} - \nu a^3\,dp\int\frac{x\,y\,dp\,\mathit{ſin.}\,\omega}{\zeta^3}$$

$$y\,y\,d\theta = D\,dp - \mu a^3\,dp\int\frac{y\,dp\,\mathit{ſin.}\,\omega}{xx} + \mu a^3\,dp\int\frac{x\,y\,dp\,\mathit{ſin.}\,\omega}{\zeta^3}$$

Donc, ſi nous poſons pour abréger

$$X = \int\frac{x\,dp\,\mathit{ſin.}\,\omega}{yy};\quad Y = \int\frac{y\,dp\,\mathit{ſin.}\,\omega}{xx};\quad Z = \int\frac{x\,y\,dp\,\mathit{ſin.}\,\omega}{\zeta^3}$$

nous aurons:

$$d\eta = \frac{dp}{xx}\left(C + \nu a^3\,(X - Z)\right)\ \&\ d\theta = \frac{dp}{yy}\left(D - \mu a^3\,(Y - Z)\right)$$

Or, rien n'empêche que nous ne mettions, pour abréger, l'unité à la place de a, de ſorte que l'unité exprime le rayon du cercle, ou le demi-grand axe de l'orbite d'une Planète, qui étant uniquement attirée par le Soleil, acheveroit ſes révolutions en même tems que Jupiter; enſuite pour les conſtantes C & D, mettons les lettres f & g, pour avoir

$$d\eta = \frac{dp}{xx}\left(f + \nu(X - Z)\right) \& d\theta = \frac{dp}{yy}\left(g - \mu(Y - X)\right)$$

& partant à cauſe de $\eta - \theta = \omega$ on aura

$$\frac{d\omega}{dp} = \frac{f}{xx} - \frac{g}{yy} + \frac{\nu}{xx}(X - Z) + \frac{\mu}{yy}(Y - Z)$$

Or, les deux autres équations, en ſubſtituant pour $d\eta$ & $d\theta$ les valeurs trouvées, & en les délivrant de la conſidération que l'élément dp eſt ſuppoſé conſtant, prendront les formes ſuivantes:

$$\frac{1}{dp} d\frac{dx}{dp} = \frac{1}{x^3}\left(f + \nu(X - Z)\right)^2 - \frac{(1+\mu)}{xx} - \frac{\nu \cos.\omega}{yy} - \frac{\nu(x - y\cos.\omega)}{z^3}$$

$$\frac{1}{dp} d\frac{dy}{dp} = \frac{1}{y^3}\left(g - \mu(Y - Z)\right)^2 - \frac{(1+\nu)}{yy} - \frac{\mu \cos.\omega}{xx} - \frac{\mu(y - x\cos.\omega)}{z^3}$$

Maintenant tout le ſuccès qu'on peut ſe promettre des opérations ſuivantes, dépend preſque uniquement de la nature des variables qu'on introduit à la place de x & y. Car puiſqu'on doit tâcher de ramener toutes les expreſſions à des angles qui en expriment le plus commodément la variabilité, on voit d'abord que la variabilité des diſtances x & y dependra non-ſeulement de l'angle ω, mais auſſi des anomalies de l'une & de l'autre Planète, lorſque leurs orbites ſont excentriques. Or l'anomalie d'une Planète étant un angle, qui dépend de ſa diſtance à ſon aphélie, on a trois ſortes d'anomalies qu'on pourroit introduire dans le calcul; l'anomalie moyenne, l'excentrique & la vraie. En introduiſant l'anomalie moyenne, on auroit la commodité que ſa différentielle eût une raiſon conſtante à dp, mais le rapport de ſa différentielle à $d\omega$ qu'on aura par tout dans la pourſuite du calcul, deviendroit trop compliqué, ce qui rendroit le calcul

preſque impraticable. Et ſi l'on vouloit introduire ou l'anomalie excentrique ou la vraie, quoique les expreſſions pour les diſtances devinſſent plus ſimples dans le cas de Kepler, cependant le défaut d'aucun rapport réglé entre leurs différentielles & $d\omega$ rendroit encore le calcul preſque impraticable, & chaque différentiation ou intégration exigeroit des opérations extrêmement embarraſſantes.

Ayant bien peſé ces difficultés, il m'eſt venu dans l'eſprit, ſi l'on ne pourroit pas imaginer une nouvelle eſpece d'anomalie, dont la différentielle eût un rapport conſtant à la différentielle $d\omega$; puiſqu'il eſt évident qu'alors toutes les différentiations & intégrations ſe pourroient exécuter ſans aucune difficulté. Cette idée me parut d'abord de la derniere importance, & je ne trouve rien qui puiſſe s'oppoſer à l'introduction d'une telle anomalie; car bien qu'une telle anomalie ne ſoit plus ſi facile à trouver, puiſqu'elle dépend de l'angle ω, qui n'eſt pas encore connu, lorſqu'on veut déterminer, pour quelque tems propoſé, les lieux de Jupiter & de Saturne, cette difficulté n'eſt pourtant d'aucune conſéquence dans le calcul analytique dont il s'agit ici; & pour le calcul aſtronomique, on ne manquera point de trouver moyen de le dreſſer ſur cette nouvelle eſpece d'anomalie. J'introduirai donc dans la ſuite les lettres r & s pour marquer cette anomalie de Jupiter & de Saturne, que je déterminerai, enſorte que poſant leurs différentielles $dr = \varkappa\, d\omega$ & $ds = \lambda\, d\omega$, les quantités $\varkappa$ & λ deviennent conſtantes. Pour cet effet il faut éliminer du calcul l'élément dp, qui n'a point un rapport conſtant à $d\omega$.

Je poſe donc $dp = t\, d\omega$, & $dq = n\, t\, d\omega$, où t ſera une quantité variable, & n un nombre conſtant, dont

la valeur ſera $\frac{d\omega}{\omega p} = n = 0,4025686$, de ſorte que $n = \frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}} = \frac{1}{b\sqrt{t}}$ à cauſe de $a = 1$, d'où l'on tire $b = 1,834117$. Cela poſé on aura :

$$X = \int \frac{t x\, d\omega \, \text{ſin.}\, \omega}{yy}\,;\quad Y = \int \frac{t y\, d\omega \, \text{ſin.}\, \omega}{xx}\,;\quad Z = \int \frac{t x y\, d\omega \, \text{ſin}\, \omega}{z^3}$$

$$d\eta = \frac{t\, d\omega}{xx}\left(f + \nu(X - Z)\right),\quad d\vartheta = \frac{t\, d\omega}{yy}\left(g - \mu(Y - Z)\right)$$

$$\frac{1}{t} = \frac{f}{xx} - \frac{g}{yy} + \frac{\nu}{xx}(X - Z) + \frac{\mu}{yy}(Y - Z)\ \&$$

$$\frac{1}{t\,d\omega}\,d\frac{dx}{t\,d\omega} = \frac{1}{x}\left(f + \nu(X - Z)\right)^2 - \frac{(1+\mu)}{x\nu} - \frac{\nu\,\text{cof.}\,\omega}{yy} - \frac{\nu\,(x - y\,\text{cof.}\,\omega)}{z^3}$$

$$\frac{1}{t\,d\omega}\,d\frac{d\nu}{t\,d\omega} = \frac{1}{y}\left(g + \mu(Y - Z)\right)^2 - \frac{(1+\nu)}{yy} - \frac{\mu\,\text{cof.}\,\omega}{xx} - \frac{\mu'\,y - x\,\text{cof.}\,\omega)}{z^3}$$

où l'on peut maintenant ſuppoſer à volonté l'élément $d\omega$ conſtant.

Il faudra donc commencer à ſubſtituer pour x & y des formules indéterminées qui renferment les angles ω, r & s ; & de-là on ſera en état d'aſſigner les valeurs des lettres X, Y, Z & t, pour les introduire enſuite dans les deux équations *differentio*-différentielles.

Mais puiſque l'invention de t ſuppoſe qu'on ſache déja les valeurs de X, Y & Z, & que ces lettres renferment réciproquement la valeur de t, on remédiera à cet inconvénient en poſant

$x = t\,u$, $\eta = t\,v$, & $\zeta = t\,w$, ou bien $w = \sqrt{(u\,u + v\,v - 2\,u\,v\,\text{cof.}\,\omega)}$; de-là ayant pris pour u & v des expreſſions indéterminées convenables, on aura, ſans qu'on ait beſoin de ſavoir la valeur de t,

$$X = \int \frac{u\, d\omega \, \text{ſin.}\, \omega}{v\,v}\,;\quad Y = \int \frac{v\, d\omega \, \text{ſin.}\, \omega}{u\,u}\,;\quad Z = \int \frac{u\,v\, d\omega \, \text{ſin.}\, \omega}{w^3}$$

&

& ayant trouvé ces expreſſions, on aura tout de ſuite

$$t = \frac{f}{uu} - \frac{g}{vv} + \frac{\nu(X-Z)}{uu} + \frac{\mu(Y-Z)}{vv}$$

Pour le mouvement moyen de l'une & de l'autre Planète on aura

$$dp = t\,d\omega \qquad \& \; dq = n\,t\,d\omega$$

& pour le mouvement vrai,

$$d\eta = \frac{d\omega}{tuu}\left(f + \nu(X-Z)\right);\; d\theta = \frac{d\omega}{tvv}\left(g - \mu(Y-Z)\right)$$

Enfin, ayant formé les expreſſions $x = t\,u$ & $y = t\,v$, les équations *differentio* - différentielles à reſoudre ſeront,

$$\frac{x}{d\omega}\,d\,\frac{dz}{t\,d\omega} + \frac{1+\mu}{\nu} - \frac{1}{tuu}\left(f + \nu\,(X-Z)\right)^2 + \frac{\nu u\,cof.\,\omega}{vv} + \frac{\nu(uu - uv\,cof.\,\omega)}{w^3} = o$$

$$\frac{u}{d\omega}\,d\,\frac{dy}{t\,d\omega} + \frac{1+\nu}{\nu} - \frac{1}{tvv}\left(g - \mu(Y-Z)\right)^2 + \frac{\mu v\,cof.\,\omega}{uu} + \frac{\mu(vv - uv\,cof.\,\omega)}{w^3} = o$$

d'où l'on déterminera tous les coëfficiens indéterminés, qui ſe trouveront dans les formules ſuppoſées pour u & v.

Voilà donc le plan de l'analyſe, que je me propoſe d'exécuter, & qui me procurera, à ce que j'eſpere, tous les avantages que l'Académie Royale des Sciences peut avoir en vue en propoſant cette queſtion pour la ſeconde fois. On voit d'abord que cette méthode eſt préférable à quantité d'autres qui ſe pourroient préſenter, parce qu'elle fournit à la fois & conjointement

les inégalités tant de Jupiter que de Saturne; car on verra que ces inégalités sont tellement liées ensemble, qu'il est impossible de les bien déterminer séparément. Cette méthode nous découvrira aussi d'abord toute les inégalités qui peuvent être de quelque conséquence; car quoique le nombre de toutes les inégalités soit effectivement infini, il est pourtant certain, que le nombre de celles, dont l'effet est encore sensible, ne sauroit être trop grand. Il y a une grande ressemblance entre cette question & la recherche des inégalités de la Lune; & quelque difficile que soit celle-ci, il est certain qu'à quelques égards la question présente est assujettie encore à de plus grandes difficultés, qui proviennent du terme irrationnel $\frac{1}{\gamma}$ ou w. Donc si la méthode que je viens d'indiquer, est capable de vaincre tous ces obstacles, on la pourra aussi employer avec tout le succès possible dans la recherche des inégalités de la Lune. De plus, si Jupiter & Saturne agissent l'un sur l'autre, il est incontestable que la terre doit aussi sentir leur action; & cette recherche seroit sans doute de la derniere importance.

§. IV.

Recherche des inégalités de Jupiter & Saturne, qui dépendent uniquement de leur distance.

TOUTES les inégalités de ces deux Planètes, de quelque nature qu'elles soient, dépendent nécessairement de ces trois élémens:

I. De leur distance apparente vue du Soleil ou de l'angle ω.

II. De l'excentricité de l'orbite de Jupiter.

III. De l'excentricité de l'orbite de Saturne.

Donc, pour ne pas trop embrouiller le calcul, je ne chercherai d'abord que les inégalités qui dépendent uniquement du premier élément ou de l'angle ω. Cette recherche seroit donc suffisante pour résoudre parfaitement la question proposée, si les deux orbites étoient destituées de toute excentricité; puisqu'il est certain que dans ce cas le mouvement de ces deux Planètes ne sauroit être troublé par d'autres inégalités, supposé que leurs orbites soient situées dans le même plan.

Or, quand je conçois que les deux orbites n'aient point d'excentricité, il ne faut pas s'imaginer qu'elles seroient circulaires, si l'action mutuelle des Planètes s'évanouissoit; cette idée seroit contraire à l'hypothèse que j'ai en vue. Car si les deux Planètes n'agissoient pas l'une sur l'autre, & qu'elles eussent reçu d'abord un tel mouvement, qu'elles décriroient des cercles autour du Soleil, il est certain que si elles commençoient subitement à s'attirer mutuellement, l'une & l'autre orbite en deviendroit excentrique, outre les autres inégalités dont leur mouvement seroit dérangé. Ainsi, quand je dis que les deux orbites ne sont pas excentriques, il le faut entendre de l'état actuel où les Planètes se trouvent effectivement en s'attirant l'une l'autre; & non pas de l'état où elles se trouveroient, si cette action mutuelle s'évanouissoit.

Or quoique les orbites ne fussent pas excentriques, dans le sens que je viens d'établir, les distances x & y ne seroient pas pourtant constantes, elles renfer-

meroient des parties qui dépendent de l'angle ω, & puiſque ces parties variables s'évanouiroient tout-à-fait, ſi l'on avoit $\mu = o$ & $\nu = o$, il eſt clair que ces parties ſeront fort petites à cauſe de la petiteſſe de ces lettres μ & ν dont elles ſeront affectées. Donc, puiſque ces termes ſeront ſi petits, il ſera permis de négliger leurs produits par quelqu'une de ces lettres. Poſant donc $u = c + U$ & $v = e + V$, les lettres U & V contiendront les petites parties variables dont je viens de parler, & je négligerai dans le calcul les termes où ſe trouveroient ces lettres multipliées par μ ou ν.

Donc, puiſque les valeurs des quantités X, Y & Z, ne ſe rencontrent dans le calcul qu'avec des coëfficiens μ ou ν, je pourrai me diſpenſer de faire entrer les lettres U & V dans la détermination des quantités X, Y & Z. Poſant donc $u = c$ & $v = e$, j'aurai

$$w = \sqrt{(cc + ee - 2ce\,cof.\omega)}\,;\; X = \int \frac{cd\omega\,fin.\omega}{ee}\,;\; Y = \int \frac{ed\omega\,fin.\omega}{cc}$$

$$\& \; Z = \int \frac{ce\,d\omega\,fin.\omega}{(cc+ee-2ce\,cof.\omega)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{ce\,d\omega\,fin.\omega}{(cc+ee)^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{2ce}{cc+ee}cof.\omega\right)^{\frac{3}{2}}}$$

De-là on aura d'abord : $X = -\frac{c}{ee}cof.\omega$ & $Y = -\frac{e}{cc}cof.\omega$.

La valeur de Z demande plus d'adreſſe ; car quoiqu'elle ſoit abſolument intégrable, puiſqu'on auroit $Z = \frac{-1}{\sqrt{cc+ee-2ce\,cof.\omega}}$ cette quantité irrationnelle troubleroit tellement le calcul, qu'à peine pourroit-on en tirer quelque concluſion propre à l'uſage de l'Aſtronomie. Il vaudra donc mieux qu'on convertiſſe d'abord la quantité irrationnelle $\frac{1}{w^3}$ dans une ſérie infinie, qui procéde par les coſinus des angles multiples de ω, &

& dans cette vue la réſolution, qui ſe trouve dans la pièce qui a déja remporté un prix ſur cette queſtion, paroît la plus propre, Poſant donc:

$$\left(1-\frac{2ce}{cc+ee}\cos.\omega\right)^{-\frac{1}{2}} = \alpha + \beta\cos.\omega + \gamma\cos.2\omega + \delta\cos.3\omega + \varepsilon\cos.4\omega + \zeta\cos.5\omega + \&c.$$

Puiſque la valeur de $\frac{2ce}{cc+ee}$ eſt préciſément la même $=0,8405$, comme elle y eſt ſuppoſée, les valeurs de ces coëfficiens ſeront:

$\alpha = 3,217895$; $\beta = 4,703575$; $\gamma = 3,077331$; $\delta = 1,924133$; $\varepsilon = 1,186011$ & $\zeta = 0,751144$.

Et ſi nous poſons, pour abréger, $\sqrt{(cc+ee)} = h$, nous aurons:

$$Z = \frac{ce}{h^3}\int d\omega\, \sin.\omega\,(\alpha+\beta\cos.\omega+\gamma\cos.2\omega+\delta\cos.3\omega+\varepsilon\cos.4\omega+\zeta\cos.5\omega+\&c.)$$

ou bien en multipliant par $\sin.\omega$, à cauſe de $\sin.\omega \times \cos.n\omega = \frac{1}{2}\sin.(n+1)\omega - \frac{1}{2}\sin.(n+1)\omega$ on aura:

$$Z = \frac{ce}{h^3}\int d\omega \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ -\frac{1}{2}\gamma \end{matrix} \right\} \cos.\omega \left\{ \begin{matrix} +\frac{1}{2}\beta \\ -\frac{1}{2}\delta \end{matrix} \right\} \cos.2\omega \left\{ \begin{matrix} +\frac{1}{2}\gamma \\ -\frac{1}{2}\varepsilon \end{matrix} \right\} \cos.3\omega \left\{ \begin{matrix} +\frac{1}{2}\delta \\ -\frac{1}{2}\zeta \end{matrix} \right\} \cos.4\omega\ \&c. \Bigg\}$$

& partant l'intégration donnera:

$$Z = \frac{-ce}{h^3}\left((\alpha-\tfrac{1}{2}\gamma)\sin.\omega + \tfrac{1}{4}(\beta-\delta)\sin.2\omega + \tfrac{1}{6}(\gamma-\varepsilon)\sin.3\omega + \tfrac{1}{8}(\delta-\zeta)\sin.4\omega\ \&c.\right)$$

Quoique cette ſérie ne ſoit pas fort convergente, on

verra avec bien de la ſatisfaction que les ſéries, qui en réſultent pour les valeurs x, y, z & θ, deviennent extrêmement convergentes, de ſorte que cette réſolution ne ſera ſujette à aucun ſcrupule.

Ayant maintenant trouvé les valeurs de X, Y & Z, puiſqu'on peut négliger les quarrés & les plus hautes puiſſances de U & V, de même que leurs produits par μ ou ν, on aura:

$$t = \frac{f}{cc} - \frac{g}{ee} - \frac{2fU}{c^3} + \frac{2gV}{e^3} + \frac{\nu}{cc}(X-Z) + \frac{\mu}{ee}(Y-Z)$$

$$tuu = f - \frac{ccg}{ee} - \frac{2cgU}{ee} + \frac{2ccgV}{e^3} + \nu(X-Z) + \frac{\mu cc}{ee}(Y-Z)$$

$$tvv = \frac{fee}{cc} - g - \frac{2feeU}{c^3} + \frac{2efV}{cc} + \frac{\nu ee}{cc}(X-Z) + \mu(Y-Z)$$

$$\frac{1}{tuu} = \frac{ee}{eef-ccg} + \frac{2ceegU - 2cceegV - \nu e^4(X-Z)}{(eef-ccg)^2} \frac{-\mu ccee(Y-Z)}{(eef-ccg)^2}$$

$$\frac{1}{tvv} = \frac{cc}{eef-ccg} + \frac{2ceefU - 2cceefV - \nu ccee(X-Z)}{(eef-ccg)^2} \frac{-\mu c^4(Y-Z)}{(eef-ccg)^2}$$

& de-là on tirera

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ecf}{eef-ccg} + \frac{2ceecfgU - 2cceefgV - \nu c^3e^2g(X-Z)}{(eef-ccg)^2} \frac{-\mu cceecf(Y-Z)}{(eef-ccg)^2}$$

$$\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{ccg}{eef-ccg} + \frac{2ccefgU - 2ccefgV - vccceg(X-Z)}{(eef-ccg)} - \frac{\mu ccceef(Y-Z)}{(eef-ccg)^2}$$

Or ayant pour les mouvemens moyens $\frac{dp}{d\omega} = t$ & $\frac{dq}{d\omega} = nt$, il faut qu'en négligeant les termes variables, U, V, X, Y & Z ; on ait $\frac{dp}{d\omega} = \frac{dv}{d\omega}$ & $\frac{dq}{d\omega} = \frac{d\theta}{d\omega}$; d'où nous tirons les déterminations ſuivanses ;

$$\frac{eef-ccg}{ccee} = \frac{eef}{eef-ccg} \quad \& \quad \frac{n(eef-ccg)}{ccee} = \frac{ccg}{eef-ccg}$$

Dont celle-ci diviſée par celle-là donne $n = \frac{ccg}{eef}$ ou $ccg = neef$, & partant $f = \frac{cc}{(1-n)^2}$ & $g = \frac{nee}{(1-n)^2}$.

Poſons pour abréger $1 - n = m$ pour avoir $f = \frac{cc}{mm}$ & $g = \frac{nee}{mm}$ & nous obtiendrons :

$$t = \frac{1}{m} - \frac{2U}{mmc} + \frac{2nV}{mme} + \frac{v}{cc}(X-Z) + \frac{\mu}{ee}(Y-Z)$$

& de plus :

$$\frac{1}{tuu} = \frac{m}{cc} + \frac{2nU}{c^3} - \frac{2nV}{cce} - \frac{vmm(X-Z)}{c^4} - \frac{\mu mm(Y-Z)}{ccee}$$

$$\frac{1}{tvv} = \frac{m}{ee} + \frac{2U}{cee} - \frac{2V}{e^3} - \frac{vmm(X-Z)}{ccee} - \frac{\mu mm(Y-Z)}{e^4}$$

$$\frac{dv}{d\omega} = \frac{1}{m} + \frac{2nU}{mmc} - \frac{2nV}{mme} - \frac{vn(X-Z)}{cc} - \frac{\mu(Y-Z)}{ee}$$

$$\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{n}{m} + \frac{2nU}{mmc} - \frac{2nV}{mme} - \frac{vn(X-Z)}{cc} - \frac{\mu(Y-Z)}{ee}$$

Enſuite on aura

$$x = \frac{c}{m} - \frac{(2-m)U}{mm} + \frac{2ncV}{mme} + \frac{\nu}{c}(X-Z) + \frac{\mu c}{ee}(Y-Z)$$

$$y = \frac{e}{m} - \frac{2eU}{mme} + \frac{(2-m)V}{mm} + \frac{\nu e}{cc}(X-Z) + \frac{\mu}{e}(Y-Z)$$

& ſubſtituant ces valeurs dans les équations *differentio* - différentielles il proviendra.

$$0 = \frac{-(2-m)cddU}{mmd\omega^2} + \frac{2nccddV}{mmed\omega^2} + \frac{\nu dd(X-Z)}{d\omega^2} + \frac{\mu ccdd(Y-Z)}{eed\omega^2} + \frac{1+\mu}{c} - \frac{cc}{m^3} - \frac{(2-m)cU}{m^4} + \frac{2nccV}{m^4e} + \frac{\nu c\,cof.\,\omega}{ee} + \frac{\nu c(c-e\,cof.\,\omega)}{h^3}(\alpha+\beta\,cof.\,\omega+\gamma\,cof.\,2\omega+\&c.) + \frac{\nu(n-m)}{mm}(X-Z) + \frac{\mu cc}{mmee}(Y-Z)$$

$$0 = \frac{-2eeddU}{mmcd\omega^2} + \frac{(2-m)eddV}{mmd\omega^2} + \frac{\nu eeddd(X-Z)}{ccd\omega^2} + \frac{\mu ddd(Y-Z)}{d\omega^2} + \frac{1+\nu}{e} - \frac{nnee}{m^3} + \frac{(2-m)nneV}{m^4} - \frac{2nneeU}{m^4c} + \frac{\mu e\,cof.\,\omega}{cc} + \frac{\mu(e-c\,cof.\,\omega)}{h^3}(\alpha+\beta\,cof.\,\omega+\gamma\,cof.\,2\omega+\&c.) + \frac{\nu nnee}{mmcc}(X-Z) + \frac{\mu n(n+2m)}{mm}(Y-Z)$$

Et réintroduiſant les diſtances x & y on aura:

$$0 = cddx + \frac{1+\mu}{c} - \frac{2cc}{m^3} + \frac{cx}{mm} - \frac{2\nu}{m}(X-Z) + \frac{\nu c\,cof.\,\omega}{ee} + \frac{\nu c(c-e\,cof.\,\omega)}{h^3}(\alpha+\beta\,cof.\,\omega+\gamma\,cof.\,2\omega+\&c.)$$

$$0 =$$

$$\delta = e\,ddy + \frac{1+\nu}{e} - \frac{2nnee}{m^3} + \frac{nney}{mm} + \frac{2\mu n}{m}(Y-Z) + \frac{\mu e\,cof.\,\omega}{cc}$$
$$+ \frac{\mu e(e-cof.\,\omega)}{n^3}(\alpha + \beta\,cof.\,\omega + \gamma\,cof.\,2\omega + \&c.$$

Enſuite on aura :

$$\frac{d\pi - dp}{d\omega} = \frac{2(2-m)U}{mmc} - \frac{4nV}{mme} - \frac{\nu(2-m)}{cc}(X-Z)$$
$$- \frac{2\mu}{ee}(Y-Z)$$

$$\frac{d\theta - dq}{d\omega} = \frac{4nU}{mmc} - \frac{2n(2-m)V}{mme} - \frac{2\nu n}{cc}(X-Z)$$
$$- \frac{\mu(2-m)}{ee}(Y-Z)$$

ou bien

$$\frac{d\pi - dp}{d\omega} = \frac{2}{m} - \frac{2x}{c} + \frac{\nu m}{cc}(X-Z)\ \&$$

$$\frac{d\theta - dq}{d\omega} = \frac{2n}{m} - \frac{2ny}{e} - \frac{\mu m}{ee}(Y-Z)$$

Maintenant il n'eſt plus difficile de parvenir à la ſolution. Car ayant les valeurs $n = 0,4025686$ & $m = 0,5974314$, on trouvera d'abord $c^3 = n^3$ & $e^3 = \frac{m^3}{nn}$, $h = 2,089088\,m$, ou $\frac{c}{m} = 1$ & $\frac{e}{m} = 1,834170$.

Maintenant qu'on ſuppoſe

$$x = \frac{c}{m} + A\,cof.\,\omega + B\,cof.\,2\omega + C\,cof.\,3\omega + D\,cof.\,4\omega\ \&c.$$

$$y = \frac{e}{m} + A'\,cof.\,\omega + B'\,cof.\,2\omega + C'\,cof.\,3\omega + D'\,cof.\,4\omega\ \&c.$$

& ſubſtituant ces valeurs dans les équations *differentio-*différentielles, on trouvera les déterminations ſuivantes:

$$A = +0,4347\nu \qquad A' = +1,7814\mu$$
$$B = -1,8637\nu \qquad B' = +0,2831\mu$$
$$C = -0,1944\nu \qquad C' = +0,0655\mu$$
$$D = -0,0505\nu \qquad D' = +0,0205\mu$$

Enſuite on trouvera plus exactement:

$$\frac{c}{m} = 1,000000 + 0,33333\mu - 0,04006\nu$$

$$\frac{e}{m} = 1,834170 + 0,61140\nu + 0,16513\mu$$

Par conſequent les vraies diſtances des Planètes au Soleil ſeront:

$$x = 1,000000 + 0,3333\mu + 0,4347\nu \cos.\omega$$
$$- 0,1944\nu \cos.3\omega - 0,0401\nu$$
$$- 1,8637\nu \cos.2\omega - 0,0505\nu \cos.4\omega$$

$$y = 1,834170 + 0,61140\nu + 1,7814\mu \cos.\omega$$
$$+ 0,0655\mu \cos.3\omega + 0,1651\mu$$
$$+ 0,2831\mu \cos.2\omega + 0,0205\mu \cos.4\omega$$

& les longitudes vraies des Planètes ſe trouveront:

$$\eta = p - 1,3416\nu \sin.\omega + 3,3154\nu \sin.2\omega$$
$$+ 0,2761\nu \sin.3\omega + 0,0494\nu \sin.4\omega$$

$$\theta = q - 0,0627\mu \sin.\omega - 0,1623\mu \sin.2\omega$$
$$- 0,0336\mu \sin.3\omega - 0,0099\mu \sin.4\omega$$

où p & q marquent les longitudes moyennes.

Donc ſi nous donnons aux lettres μ & ν les valeurs, qu'on conclut des revolutions des ſatellites; ſavoir

$\mu = \frac{1}{1067}$ & $\nu = \frac{1}{5021}$ & que la distance d'un corps au Soleil, qui fait ses revolutions au tour du Soleil en même tems que Jupiter, soit posée $= 1000000$ dans l'hypothése de Kepler, les distances des deux Planètes au Soleil seront, lorsqu'elles se trouvent éloignées l'une de l'autre de l'angle $\omega = \eta - \theta$.

$$x = 1000317 + 145 \cos.\omega - 621 \cos.2\omega - 64 \cos.3\omega - 17 \cos.4\omega$$

$$y = 1834027 + 1781 \cos.\omega + 283 \cos.2\omega + 65 \cos.3\omega + 20 \cos.4\omega$$

Or, pour leurs longitudes, si nous convertissons les coëfficiens trouvés en secondes, supposant le sinus total $= 1$, elles proviendront :

$$\eta = p - 92'' \sin.\omega + 226'' \sin.2\omega + 19'' \sin.3\omega + 3'' \sin.4\omega$$

$$\theta = q - 12'' \sin.\omega - 32'' \sin.2\omega - 6'' \sin.3\omega - 2'' \sin.4\omega$$

Ainsi il ne seroit pas difficile de marquer en tout tems les lieux vrais de ces deux Planètes, si leurs orbites n'étoient pas excentriques, dans le sens que j'ai établi ci-dessus : & si ce cas avoit lieu dans le ciel, la question proposée seroit déja parfaitement résolue.

De ces formules je tire les réflexions suivantes, qui serviront non seulement à nous éclaircir assez considérablement sur cette matiere, mais aussi à conduire plus sûrement les opérations que je dois encore entreprendre pour les autres inégalités.

I. Je remarque donc premiérement, que la résolution de la formule irrationnelle $\left(1 - \frac{2ce.}{cc + ee} \cos.\omega\right)^{-\frac{2}{3}}$ dans une série est tout-à-fait propre à notre dessein ;

car quoique cette ſérie ſoit peu convergente en elle-même, on voit pourtant que les changemens qu'elle ſubit dans le calcul, la rendent tellement convergente, qu'il ſuffit d'en prendre les cinq premiers termes; les ſuivans devenant ſi petits tant pour les diſtances x & y que pour les longitudes ν & θ, qu'on s'en peut paſſer ſans aucune erreur ſenſible. Il eſt donc certain que dans le calcul que j'aurai encore à faire, il ſuffira de conſidérer les mêmes premiers termes de cette ſérie ſans qu'on puiſſe avoir lieu de craindre que les ſuivans ſoient de quelque conſéquence.

II. On voit auſſi que les inégalités, qui dependent des angles ω, 2ω, 3ω & 4ω, ſont déja ſi petites d'elles-mêmes, qu'elle deviendroient tout-à-fait inſenſibles ſi on les multiplioit encore par les fractions μ & ν: ce qui juſtifie mes opérations, quand j'ai négligé dans le calcul tous les termes qui renferment les coëfficiens A, B, C, D, &c. A', B', C', D', &c. multipliés par μ ou ν. Et partant dans la pourſuite du calcul je ſerai également autoriſé à négliger quantité de termes qui ne ſeront pas plus conſidérables que ceux dont je viens de parler.

III. Il eſt auſſi fort remarquable que ſi les deux orbites de Jupiter & Saturne n'étoient point excentriques, les inégalités qui ſe trouveroient dans la longitude de Saturne ſeroient ſi petites qu'à peine ſauroit on s'en appercevoir par les obſervations; puiſqu'on voit qu'elles ne ſurpaſſeroient que fort rarement la moitié d'une minute. Or en recompenſe la diſtance de Saturne au Soleil en ſera plus altérée; car dans ſes conjonctions avec Jupiter, lorſque $\omega = 0$ ſa diſtance ſera $= 1834027 + 2049$, & dans les oppoſitions $= 1834027 - 1543$; donc ſa diſtance moyenne au Soleil ſera augmentée dans

le premier cas de ſa $\frac{1}{500}$ partie, & diminuée dans l'autre de ſa $\frac{1}{1200}$ partie.

IV. Mais il eſt encore plus ſurprenant que les inégalités dans le mouvement de Jupiter, qui dépendent de l'angle ω, ſoient beaucoup plus grandes que celles de Saturne, quoique la force attractive de Jupiter ſoit ſuppoſée trois fois plus grande que celle de Saturne. Car nous voyons que ces inégalités de Jupiter peuvent monter au de-là de 4 minutes lorſque l'angle ω eſt de $4^{s}\ 11^{o}$ ou de $7^{s}\ 19^{o}$. Dans le premier cas la longitude vraie de Jupiter ſera moins avancée que la moyenne de $4'\ 45''$, & dans l'autre elle ſera plus avancée environ de la même quantité.

Ces mêmes inégalités ſe trouveront donc auſſi actuellement dans le mouvement de ces deux Planètes, quand même leurs orbites ſeroient excentriques; mais l'excentricité y cauſera encore de nouvelles inégalités ſans changer celles-ci, que je m'en vais chercher dans les articles ſuivans.

§. V.

Recherches des inégalités de Jupiter & de Saturne qui dépendent de l'excentricité de l'orbite de Jupiter.

L'Analyſe de l'article précédent nous fait voir qu'il eſt plus convenable de garder dans le calcul les diſtances x & y mêmes, que d'y introduire les ſubſtitutions

$x = tu$ & $y = tv$; puiſque nous avons vu que les équations finales à réſoudre deviennent plus ſimples en y remettant les lettres x & y.

Pour cet effet il ſera néceſſaire d'arranger nos formules d'une autre façon, pour les rendre plus propres aux recherches ſuivantes. Dans cette vûe je poſerai d'abord:

$$x = c(1+u) \text{ \& } y = e(1+v)$$

deſorte que c & e marqueront à l'avenir, ce qui a été exprimé par $\frac{c}{m}$ & $\frac{e}{m}$; & partant les valeurs de c & e, entant qu'elles ne ſont pas changées par les excentricités ſeront:

$$c = 1,000317, e = 1,834027 \text{ \& } h = \sqrt{(cc+ee)} = 2,089088.$$

De plus, il eſt clair que les lettres u & v, exprimant les inégalités cauſées tant par les excentricités que par l'action mutuelle, ſeront ſi petites qu'on pourra négliger ſans ſcrupule les termes qui en contiendront trois ou pluſieurs dimenſions; & lorſque les termes ſont déja multipliés par μ ou ν, on pourra même négliger les termes qui contiendront deux dimenſions de u & v. Or puiſque les termes qui dépendent uniquement de l'une ou l'autre excentricité peuvent exiger qu'on monte juſqu'aux trois dimenſions, la recherche ſe pourra faire à part; car ici je me contenterai de conduire le calcul de même que ſi les excentricités étoient pour ainſi dire infiniment petites.

Donc puiſque la quantité z n'entre dans le calcul qu'avec un multiplicateur μ ou ν, on aura aſſez exactement:

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{h}\sqrt{\left(1 - \frac{2ce}{hh}\cos.\omega + \frac{2ccu + 2eev}{hh} - \frac{2ce}{hh}(u+v)\cos.\omega\right)}$$

& partant:

$$\frac{1}{\zeta^3} = \frac{1}{h^3}\left[\left(1 - \frac{2ce}{hh}\cos.\omega\right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{hh}(ccu + eev - ce(u+v)\cos.\omega)\right.$$
$$\left.\left(1 - \frac{2ce}{hh}\cos.\omega\right)^{-\frac{5}{2}}\right]$$

Or posant:

$$\left(1 - \frac{2ce}{hh}\cos.\omega\right)^{-\frac{3}{2}} = \alpha + \beta\cos.\omega + \gamma\cos.2\omega +$$
$$\delta\cos.3\omega + \varepsilon\cos.4\omega + \zeta\cos.5\omega + \&c.$$

$$\left(1 - \frac{2ce}{hh}\cos.\omega\right)^{-\frac{5}{2}} = \alpha' + \beta'\cos.\omega + \gamma'\cos.2\omega +$$
$$\delta'\cos.3\omega + \varepsilon'\cos.4\omega' + \&c.$$

les valeurs de ces coëfficiens seront: (*)

$\alpha = 3,21789$	$\alpha' = 13,21601$
$\beta = 4,70357$	$\beta' = 23,79051$
$\gamma = 3,07731$	$\gamma' = 18,94939$
$\delta = 1,92413$	$\delta' = 13,82941$
$\varepsilon = 1,18601$	$\varepsilon' = 9,96700$
$\zeta = 0,75144$	

Pour trouver ensuite les valeurs des formules X, Y & Z, comme elles sont par tout multipliées par μ ou ν, & qu'il est permis de négliger les termes, qui seroient multipliés par $\mu\mu$, $\mu\nu$ ou $\nu\nu$, il suffira d'y mettre $\frac{1}{i} = \frac{f}{xx} - \frac{g}{yy}$ & puisque nous avons trouvé $f = cc$ & $g = nee$, nous avons pour ces termes:

(*) Voyez la piece de 1748, sur ce sujet. *pag.* 52.

$s = \frac{1}{m} + \frac{2u}{mm} - \frac{2nv}{mm}$ à cauſe de $m = 1 - n$.

& partant :

$$X = \frac{c}{ee}\int d\omega \, \sin.\omega \left(\frac{1}{m} + \frac{(m+2)u}{mm} - \frac{2(1+n)v}{mm}\right)$$

$$Y = \frac{e}{cc}\int d\omega \, \sin.\omega \left(\frac{1}{m} + \frac{2nu}{mm} - \frac{(2n-m)v}{mm}\right)$$

$$Z = \frac{ce}{h^3}\int d\omega \, \sin.\omega \left(\frac{1}{m} + \frac{(2+m)u}{mm} - \frac{(2n-m)v}{mm}\right)$$
$$(\alpha + \beta \cos.\omega + \gamma \cos.2\omega + \delta \cos.3\omega + \&c.)$$
$$- \frac{3ce}{mh^3}\int d\omega \, \sin.\omega \left(cc\,u + ee\,v - ce(u+v)\cos.\omega\right)$$
$$(\alpha' + \beta' \cos.\omega + \gamma' \cos.2\omega + \delta' \cos.3\omega + \&c.)$$

ou bien

$$Z = \frac{ce}{mh^3}\int d\omega \, \sin.\omega \, (\alpha + \beta \cos.\omega + \gamma \cos.2\omega + \&c.)$$
$$+ \frac{(2+m)ce}{mmh^3}\int u\,d\omega \, \sin.\omega \, (\alpha + \beta \cos.\omega + \&c.)$$
$$- \frac{(2n-m)ce}{mmh^3}\int v\,d\omega \, \sin.\omega \, (\alpha + \beta \cos.\omega + \&c.)$$
$$- \frac{3c^3e}{mh^5}\int u\,d\omega \, \sin.\omega \, (\alpha' + \beta' \cos.\omega + \&c.)$$
$$- \frac{3ce^3}{mh^5}\int v\,d\omega \, \sin.\omega \, (\alpha' + \beta' \cos.\omega + \&c.)$$
$$+ \frac{3ccee}{2mh^5}\int u\,d\omega \, \sin.2\omega \, (\alpha' + \beta' \cos.\omega + \&c.)$$
$$+ \frac{3ccee}{2mh^5}\int v\,d\omega \, \sin.2\omega \, (\alpha' + \beta' \cos.\omega + \&c.)$$

où il faut remarquer qu'on ne doit pas prendre pour u & v leurs valeurs entieres, mais ſeulement leurs parties,

ties, qui ne ſont pas affectées par μ ou ν.

Enſuite on aura pour les autres expreſſions:

$$\frac{xx}{t} = cc(m - 2nu + 2nv) + \nu(X - Z) + \mu(Y - Z)\frac{cc}{ee}$$

$$\frac{yy}{t} = ee(m - 2u + 2v) + \frac{\nu ee}{cc}(X - Z) + \mu(Y - Z)$$

donc en renverſant,

$$\frac{t}{xx} = \frac{1}{mcc} + \frac{2nu}{mmcc} - \frac{2nv}{mmcc} - \frac{\nu(X-Z)}{mmc^4} - \frac{\mu(Y-Z)}{mmccee}$$

$$\frac{t}{yy} = \frac{1}{mee} + \frac{2u}{mmee} - \frac{2v}{mmee} - \frac{\nu(X-Z)}{mmccee} - \frac{\mu(Y-Z)}{mme^4}$$

& partant on aura pour les longitudes:

$$\frac{d\alpha - dp}{d\omega} = -\frac{2u}{m} - \frac{(m+4n)uu}{mm} + \frac{4nuv}{mm} + \frac{\nu(X-Z)}{mcc}$$
$$+ \frac{2\nu(1+n)u(X-Z)}{mmcc} - \frac{2\nu nv(X-Z)}{mmcc} + \frac{2\mu u(Y-Z)}{mmee}$$

$$\frac{d\theta - dq}{d\omega} = -\frac{2nv}{m} + \frac{4nuv}{mm} + \frac{(4-m)nvv}{mm} - \frac{\mu(Y-Z)}{mee}$$
$$+ \frac{2\mu(1+n)v(Y-Z)}{mmee} - \frac{2\mu u(Y-Z)}{mmee} + \frac{2\nu nv(X-Z)}{mmcc}$$

& enfin pour les équations *differentio*-différentielles en poſant 1 pour $d\omega$, on aura:

$$\frac{xx}{tdt}\,d\frac{dx}{tdt} = mmc^3 ddu - 2m(1+n)c^3 u\,dd\,u$$
$$- 2mc^3 du^2 + 4mnc^3 v\,ddu + 2mnc^3 du\,dv$$
$$+ 2\nu mc\,ddu(X-Z) + \nu mc\,du(dX - dZ)$$
$$+ \frac{2\mu me^3 ddu(Y-Z)}{ee} + \frac{\mu mc^3 du(dY - dZ)}{ee}$$

$$\frac{yy}{tdt}\,d\frac{dy}{tdt} = mme^3 ddv - 4me^3 u\,ddv - 2me^3 du\,dv$$
$$+ 2m(1+n)e^3 v\,ddv + 2mne^3 dv^2$$
$$+ \frac{2\nu me^3 ddv(X-Z)}{cc} + \frac{\nu me^3 dv(dX - dZ)}{cc}$$
$$+ 2\mu me\,ddv(Y-Z) + \mu me\,dv(Y\,d - dZ)$$

Or, il conviendra de donner à nos équations *differentio*-différentielles les formes ſuivantes, pour en rendre le calcul plus aiſé.

$$\frac{x^3}{c^4\,t\,d\omega}\,d\frac{dx}{t\,d\omega} = 1 + \frac{2\nu}{cc}(X-Z) - \frac{(1+\mu)x}{c^4} - \frac{\nu x^3\,cof.\,\omega}{c^4 yy} - \frac{\nu x^4 - x^3 y\,cof.\,\omega)}{c^4 z^3}$$

$$\frac{y^3}{c^4\,t\,d\omega}\,d\frac{dv}{t\,d\omega} = nn - \frac{2\mu n}{cc}(Y-Z) - \frac{(1+\nu)y}{c^4} - \frac{\mu y^3\,cof.\,\omega}{c^4 xx} - \frac{\mu(y^4 - xy^3\,cof.\,\omega)}{c^4 z^3}$$

& pour ces formes on aura :

$$\frac{x^3}{c^4\,t\,d\omega}\,d\frac{dx}{t\,d\omega} = m\,m\,d\,d\,u - m(4-3m)\,u\,d\,d\,u - 2\,m\,du^2 + 4\,m\,n\,v\,d\,d\,u + 2\,m\,n\,d\,u\,d\,v + \frac{2\nu\,m\,d\,d\,u}{cc}(X-Z) + \frac{\nu\,m\,d\,u}{cc}(dX-dZ) + \frac{2\mu\,m\,d\,d\,u}{cc}(Y-Z) + \frac{\mu\,m\,d\,u}{cc}(dY-dZ)$$

$$\frac{y^3}{c^4\,t\,d\omega}\,d\frac{dv}{t\,d\omega} = m\,m\,d\,d\,v + m(4-m)\,v\,d\,d\,v + 2\,m\,n\,dv^2 - 4\,m\,u\,d\,d\,v - 2\,m\,d\,u\,d\,v + \frac{2\nu\,m\,d\,d\,v}{cc}(X-Z) + \frac{\nu\,m\,dv}{cc}(dX-dZ) + \frac{2\mu\,m\,d\,d\,v}{cc}(Y-Z) + \frac{\mu\,m\,dv}{cc}(dY-dZ)$$

Donc nos deux équations *differentio*-différentielle feront :

$$\text{I. } o = \begin{cases} -mmddu + m(4-3m)uddu + 2mdu^2 \\ -4mnvddu - 2mndudv \\ -\frac{2vmddu}{cc}(X-Z) - \frac{vmdu}{cc}(dX-dZ) \\ -\frac{2\mu mddu}{ee}(Y-Z) - \frac{\mu mdu}{ee}(dY-dZ) \\ +1+\frac{2v}{cc}(X-Z) - \frac{(1+\mu)}{c^3} - \frac{(1+\mu)u}{c^3} \\ \quad -\frac{v}{cee}\cos.\omega - \frac{3vu\cos.\omega}{cee} + \frac{2vv\cos.\omega}{cee} \\ -\frac{v}{h^3}\left(1-\frac{e}{c}\cos.\omega\right)(\alpha+\beta\cos.\omega+\gamma\cos.2\omega+\&c.) \\ -\frac{vu}{h^3}\left(4-\frac{3e}{c}\cos.\omega\right)(\alpha+\beta\cos.\omega+\gamma\cos.2\omega+\&c.) \\ +\frac{vev}{ch^3}\cos.\omega(\alpha+\beta\cos.\omega+\gamma\cos.2\omega+\&c.) \\ +\frac{vu}{h^5}(3cc-6ce\cos.\omega+3ee\cos.\omega^2) \\ (\alpha'+\beta'\cos.\omega+\gamma'\cos.2\omega+\&c.) \\ +\frac{vv}{h^5}\left(3ee-3cc\cos.\omega-\frac{3e^3}{c}\cos.\omega+3ee\cos.\omega^2\right) \\ (\alpha'+\beta'\cos.\omega+\gamma'\cos.2\omega+\&c.) \end{cases}$$

$$
\text{II. } 0 = \left\{
\begin{array}{l}
-mmddv - m(4-m)vddv - 2mndv^2 \\
+4mudddv + 2mdudv \\
-\frac{2vmddv}{cc}(X-Z) - \frac{vmdv}{cc}(dX-dZ) \\
-\frac{2\mu mddv}{ee}(Y-Z) - \frac{\mu mdv}{ee}(dY-dZ) \\
+nn - \frac{2\mu n}{ee}(Y-Z) - \frac{(1+v)}{e^3} - \frac{(1+v)v}{e^3} \\
\qquad - \frac{\mu\cos.\omega}{cce} + \frac{2\mu u\cos.\omega}{cce} - \frac{3\mu v\cos.\omega}{cce} \\
-\frac{\mu}{h^3}\left(1-\frac{c}{e}\cos.\omega\right)(\alpha+\beta\cos.\omega+\gamma\cos.2\omega+\&c.) \\
-\frac{\mu v}{h^3}\left(4-\frac{3c}{e}\cos.\omega\right)(\alpha+\beta\cos.\omega+\gamma\cos.2\omega+\&c.) \\
+\frac{\mu cu}{eh^3}\cos.\omega(\alpha+\beta\cos.\omega+\gamma\cos.2\omega+\&c.) \\
+\frac{\mu v}{h^5}(3ee-6ce\cos.\omega+3cc\cos.\omega^2) \\
(\alpha'+\beta'\cos.\omega+\gamma'\cos.2\omega+\&c.) \\
+\frac{\mu u}{h^5}\left(3cc-3ce\cos.\omega-\frac{3c^3}{e}\cos.\omega+3cc\cos.\omega^2\right) \\
(\alpha'+\beta'\cos.\omega+\gamma'\cos.2\omega+\&c.)
\end{array}
\right.
$$

Maintenant puiſque les quantités conſtantes, qui entrent dans ces formules, ſont connues, ſi nous remettons à leur place leurs valeurs, nos formules ſe changeront dans les formes ſuivantes, qui ſeront les plus commodes pour achever le calcul. Or on trouvera:

$$X = -0,49755\cos.\omega + 2,16316\int u\,d\omega\,\sin.\omega - 2,33614\int v\,d\omega\,\sin.\omega$$

$Y =$

$$Y = -3,07010\ cof.\ \omega + 4,13746 \int u\,d\omega\ fin.\ \omega - 1,06737 \int v\,d\omega\ fin.\ \omega.$$

$$Z = -0,56546\ cof.\ \omega - 0,23399\ cof.\ 2\omega - 0,10614\ cof.\ 3\omega - 0,04936\ cof.\ 4\omega + \int u\,d\omega\,(2,69960\ fin.\ \omega + 2,71178\ fin.\ 2\omega + 2,15293\ fin.\ 3\omega) - \int v\,d\omega\,(2,14022\ fin.\ \omega + 2,39381\ fin.\ 2\omega + 1,96490\ fin.\ 3\omega)$$

Donc

$$X - Z = +0,06791\ cof.\ \omega + 0,23399\ cof.\ 2\omega + 0,10614\ cof.\ 3\omega + 0,04936\ cof.\ 4\omega - \int u\,d\omega\,(0,53644\ fin.\ \omega + 2,71178\ fin.\ 2\omega + 2,15293\ fin.\ 3\omega) - \int v\,d\omega\,(0,19592\ fin.\ \omega - 2,39381\ fin.\ 2\omega - 1,96490\ fin.\ 3\omega)$$

$$Y - Z = -2,50464\ cof.\ \omega + 0,23399\ cof.\ 2\omega + 0,10614\ cof.\ 3\omega + 0,04936\ cof.\ 4\omega + \int u\,d\omega\,(1,43786\ fin.\ \omega - 2,71178\ fin.\ 2\omega - 2,15293\ fin.\ 3\omega) + \int v\,d\omega\,(1,07285\ fin.\ \omega + 2,39381\ fin.\ 2\omega + 1,96490\ fin.\ 3\omega)$$

Avant que de paſſer outre il faut remarquer que les valeurs cc & nee, trouvées ci-deſſus pour les lettres f & g, ne ſont vraies qu'à-peu-près, lorſque les orbites ſont excentriques. Dans ce cas elles demandent une petite

correction, que nous trouverons en posant $f = cc(1+f)$ & $g = nee(1+g)$, où f & g seront des quantités extrêmement petites. Donc on aura:

$$\frac{dv-dp}{d\omega} = \frac{f}{m} - \frac{2u}{m} - \frac{(m+n)uu}{mm} + \frac{4nuv}{mm} + \frac{\nu(X-Z)}{mcc}$$
$$+ \frac{2\nu(1+n)u(X-Z)}{mmcc} - \frac{2\nu nv(X-Z)}{mmcc} + \frac{2\mu u(Y-Z)}{mmee}$$

$$\frac{dq-dq}{d\omega} = \frac{ng}{m} - \frac{2nv}{m} + \frac{(4-m)nvv}{mm} - \frac{4nuv}{mm} - \frac{\mu(Y-Z)}{mee}$$
$$+ \frac{2\mu(1+n)v(Y-Z)}{mmee} - \frac{2\mu u(Y-Z)}{mmee} + \frac{2\nu nv(X-Z)}{mmee}$$

& les équations *differentio*-différentielles obtiendront les formes suivantes, en les divisant par mm.

$$0 = \begin{cases} -ddu + \frac{(4-3m)uddu}{m} + \frac{2du^2}{m} - \frac{4nvddu}{m} \\ -\frac{2ndudv}{m} + \frac{1}{mm} + \frac{2f}{mm} + \frac{2\nu}{mmcc}(X-Z) \\ -\frac{(1+\mu)}{mmc^3} - \frac{2\nu ddu}{mcc}(X-Z) - \frac{\nu du}{mcc}(dX-dZ) \\ -\frac{2\mu ddu}{mee}(Y-Z) - \frac{\mu du}{mee}(dY-dZ) - \frac{(1+\mu)u}{mmc^3} \\ +0,33672\,\nu + 0,40276\,\nu\,cof.\,\omega \\ +0,94218\,\nu\,cof.\,2\omega + 0,61021\,\nu\,cof.\,3\omega \\ +0,38959\,\nu\,cof.\,4\omega. \\ +\nu u(1,65822 + 2,34202\,cof.\,\omega \\ \quad +4,44811\,cof.\,2\omega + 3,43398\,cof.\,3\omega) \\ -\nu v(1,33820 + 1,97818\,cof.\,\omega \\ \quad +3,27124\,cof.\,2\omega + 2,94118\,cof.\,3\omega) \end{cases}$$

$$
0 = \left\{
\begin{array}{l}
-ddv - \frac{(4-m)vddv}{m} - \frac{2ndv^2}{m} + \frac{4uddv}{m} \\
+\frac{2dudv}{m} + \frac{nn}{mm} + \frac{2nng}{mm} - \frac{2\mu n}{mmee}(Y-Z) \\
-\frac{(1+v)}{mme^3} - \frac{2vddv}{mcc}(X-Z) - \frac{vdv}{mcc}(dX-dZ) \\
-\frac{2\mu ddv}{mee}(Y-Z) - \frac{\mu dv}{mee}(dY-dZ) - \frac{(1+v)v}{mme^3} \\
-0,59483\,\mu - 2,17601\,\mu\, cof.\,\omega \\
-0,39044\,\mu\, cof.\,2\omega - 0,23413\,\mu\, cof.\,3\omega \\
-0,14032\,\mu\, cof.\,4\omega. \\
-\mu u\,(0,39631 - 1,97192\, cof.\,\omega \\
\quad +0,97240\, cof.\,2\omega + 0,87427\, cof.\,3\omega) \\
-\mu v\,(0,20219 + 4,15067\, cof.\,\omega \\
\quad -0,69750\, cof.\,2\omega - 0,44479\, cof.\,3\omega)
\end{array}
\right.
$$

Après avoir ainſi préparé nos formules, il ſera d'autant plus aiſé de déterminer les inégalités qui dépendent de l'excentricité de l'une ou de l'autre planète, puiſque ni les différentiations ni les intégrations ne cauſent aucun embarras.

Soit donc k l'excentricité de l'orbite de Jupiter, & r ſon anomalie de l'eſpece dont j'ai parlé ci-deſſus, deſorte que ſa différentielle dr garde une raiſon conſtante avec l'élément $d\omega$: & partant je poſerai $dr = \varkappa d\omega$, où il eſt clair que la valeur de $\varkappa$ nous découvrira le vrai mouvement de l'aphélie de Jupiter. La valeur de u contiendra donc ce terme $k\, cof.\, r$, qui ſera le plus conſidérable par rapport aux autres, puiſque l'excentricité k eſt aſſez conſidérable ; enſuite il eſt évident que des termes de cette forme $k^2\, cof.\, 2r$ $k^3\, cof.\, 3r$, &c. entreront auſſi dans la valeur de u, mais nos formules ne

ſont propres qu'à trouver le terme k^2 *cof.* $2r$; or les ſuivans ſe trouveront aiſément par le moyen d'une méthode particuliere, que j'expoſerai enſuite; car ces termes ſeront ſi petits, que je les pourrai négliger dans la recherche préſente.

Pour la valeur de v, elle ſubira auſſi des changemes conſidérables à cauſe de l'excentricité de l'orbite de Jupiter, & contiendra les mêmes termes que celle de u, quoique leurs coëfficiens ſoient tous multipliés par μ ou ν. Or nonobſtant cela j'ai remarqué que le coëfficient du terme *cof.* $(\omega - r)$, qui ſe trouvera dans v, devient ſi grand, qu'il n'eſt pas permis de le confondre avec les autres termes de la même quantité v, qui ſeront pour la plupart fort petits.

Or l'angle $\omega - r$ exprime à-peu-près la diſtance de Saturne à l'aphélie de Jupiter, deſorte que Saturne ſoit ſouffrir des dérangemens très-conſidérables, qui dépendent de ſa diſtance à l'aphélie de Jupiter. Donc quand même Saturne n'auroit point d'excentricité propre, ſon mouvement ſeroit tellement déreglé par rapport à l'aphélie de Jupiter, qu'on croiroit que ſon orbite eſt très ſenſiblement excentrique, & que ſon aphélie tombe dans celui de Jupiter, comme on verra quand le calcul ſera achevé. Et c'eſt ici que ſe trouve la plus grande difficulté de la queſtion propoſée, difficulté telle, que ſi l'on n'y fait pas toute la réflexion poſſible, il eſt abſolument impoſſible de réuſſir dans cette recherche.

Poſons donc, puiſqu'il eſt aiſé de prévoir la forme des quantités u & v:

$u =$

$$u = +k\,\mathrm{cos.}\,r + A\,\mathrm{cos.}\,\omega + B\,\mathrm{cos.}\,2\omega + Fk\,\mathrm{cos.}\,(\omega - r) + Akk\,\mathrm{cos.}\,2r + ak^2\,\mathrm{cos.}\,\omega + C\,\mathrm{cos.}\,3\omega + Gk\,\mathrm{cos.}\,(\omega + r) + D\,\mathrm{cos.}\,4\omega + Hk\,\mathrm{cos.}\,(2\omega - r) + Ik\,\mathrm{cos.}\,(2\omega + r) + Kkk\,\mathrm{cos.}\,(\omega - 2r)$$

$$v = \alpha k\,\mathrm{cos.}\,(\omega - r) + A'\,\mathrm{cos.}\,\omega + B'\,\mathrm{cos.}\,2\omega + G'k\,\mathrm{cos.}\,(\omega + r) + f'kk\,\mathrm{cos.}\,2\omega - 2r) + a'k^2\,\mathrm{cos.}\,\omega + C'\,\mathrm{cos.}\,3\omega + H'k\,\mathrm{cos.}\,(2\omega - r) + E'k\,\mathrm{cos.}\,r + D'\,\mathrm{cos.}\,4\omega + I'k\,\mathrm{cos.}\,(2\omega + r) + K'kk\,\mathrm{cos.}\,(\omega - 2r)$$

& faiſant les ſubſtitutions dans nos équations, on aura d'abord :

$$f = \frac{(m+4n)}{2m}\,kk \;\&\; g = -\frac{(4-m)}{2m}\,\alpha\alpha kk.$$

& enſuite les valeurs des lettres A, B, C, D, & A', B', C', D' deviendront :

$$A = 0,434721\nu;\; B = -1,880471\nu;\; C = -0,194401\nu;\; D = -0,05047\nu.$$

$$A' = 0,909591\mu;\; B' = +0,154351\mu;\; C' = +0,035721\mu;\; D' = +0,01116\mu.$$

Pour les autres valeurs, ayant rangé tous les termes dont les deux équations *differentio*-différentielles ſeront compoſées, ſelon les coſinus des angles, qui forment les quantités u & v ; les premiers rangs, qui ne renferment que des quantités conſtantes, donneront

$$\frac{1+\mu}{mmc^3} = \frac{1}{mm} + \frac{(m+4n)}{m^3}\,kk - \frac{3n}{m}\,xxkk + 0,336721\nu$$

$$\frac{1+\nu}{mme^3} = \frac{nn}{mm} - \frac{nn(4-m)}{m^3}\,\alpha\alpha kk + \frac{3}{m}(1-x)^2\,\alpha\alpha kk - 0,594831\mu$$

d'où l'on pourra déterminer les vraies diſtances moyennes c & e après quon aura trouvé les quantités x, α &

l'excentricité k, dont celle-ci ſe doit conclure par les obſervations. Or le terme k *cof.* r de la premiere équation donnera.

$$\kappa\kappa + \frac{n}{m}(1+\kappa)A\alpha + \frac{0,19592}{mmcc\kappa}\nu\alpha - \frac{(1+\mu)}{mmc^3} + 1,65822\nu - 0,98909\nu\alpha = 0$$

qui ſe réduit à celle-ci, puiſque $\kappa = \frac{1}{m}$ à-peu-près

$$\kappa\kappa mm = 1 - 0,47168\nu - 0,0432\nu\alpha$$

d'où nous tirons

$$\kappa = \frac{1}{m} - 0,39475\nu - 0,0362\nu\alpha$$

& partant

$$1 - \kappa = -\frac{n}{m} + 0,39475\nu + 0,0362\nu\alpha$$

Enſuite le terme k *cof.* $(\omega - r)$ de l'autre équation fournit cette égalité :

$$(1-\kappa)^2\alpha - \frac{1}{m}(2-\kappa)A' + \frac{\mu n, 1,43786}{mmee(1-\kappa)} - \frac{\alpha(1+\nu)}{mme^3} + 0,98596\mu - 0,20219\mu\alpha = 0$$

ſi l'on y ſubſtitue la valeur trouvée de κ, les termes finis, ou ceux qui ne contiennent point μ ou ν ſe détruiront d'eux-mêmes, & l'on aura :

$$\alpha(0,39264\mu - 0,53199\nu) - 0,0487\alpha\alpha\nu = 0,22604\mu$$

d'où l'on voit, que ſi l'on ne connoît pas très-exactement les valeurs de μ & ν, il eſt impoſſible de bien déterminer celle de α ; de ſorte que cette détermination eſt extrêmement délicate. Cependant ſi nous ſuppoſons

$$\mu = \frac{1}{1067} \text{ \& } \nu = \frac{1}{3021}$$

nous aurons :

$$192\,\alpha - 16\,\alpha\alpha = 212$$

d'où nous tirons :

$$\alpha = 1,2303.$$

Donc puiſque α eſt > 1. Saturne reſſent une plus grande inégalité de Jupiter, que Jupiter même. Or cela n'eſt vrai que dans la ſuppoſition faite pour les lettres μ & ν; & puiſqu'elle n'eſt pas trop ſûre, il peut arriver que la véritable valeur de α differe très-conſidérablement de celle que nous venons de trouver.

Pour cette raiſon, il vaudra mieux conſidérer la valeur de α comme inconnue, & de tâcher enſuite de la déterminer exactement par les obſervations. Cependant voyant qu'elle eſt très conſidérable, & qu'elle ſurpaſſe peut-être l'unité, on reconnoîtra la néceſſité de traiter dans le calcul ce terme $\alpha\, k\, cof.(\omega - r)$ ſur le même pied quele terme $k\, cof.\nu$, qui eſt le plus conſidérable dans la valeur de u, & on verra que cette lettre α influe ſi-conſidérablement ſur toutes les autres inégalités, quelles peuvent même changer de ſigne.

Mais quoique je ne puiſſe conſidérer la valeur de α comme entiérement connue, la valeur de $\varkappa$ n'en dépend point ſenſiblement, & partant nous ſommes en état de déterminer le mouvement de l'aphélie de Jupiter très-exactement. Car poſant $\alpha = 1\frac{1}{4}$, nous aurons :

$$\varkappa\varkappa\, m\, m = 1 - 0,52568\,\nu \;\&\; \varkappa\, m = 1 - 0,26284\,\nu.$$

Or ayant poſé $d\,r = \varkappa\, d\,\omega$, nous aurons $r =$ conſt. $+ \varkappa\,\omega =$ conſt. $+ \varkappa(n - \theta)$, & ſelon le mouvement moyen, $r = C + \varkappa(p - q) = C + m\varkappa p$. Donc s'il l'on avoit exactement $\varkappa\, m = 1$, le mouvement de l'anomalie moyenne ſeroit égal au mouvement moyen, & l'aphé-

lie ſeroit en repos. Or puiſque $\varkappa m = 1 - 0,26284\nu$, il s'enſuit que le mouvement moyen eſt ou mouvement de l'anomalie comme 1 à $1 - 0,26284\nu$; & partant l'aphélie aura un mouvement en avant; deſorte que le mouvement de l'aphélie ſera au mouvement moyen comme $0,26284\nu$ à 1, ou poſant $\nu = \frac{1}{3,021}$ comme 0,00008 7 à 1. Donc puiſque le mouvement moyen de Jupiter eſt pendant un an de $1^{s}, 0^{o}, 20', 38'' = 109238''$, l'aphélie de Jupiter avancera chaque année de $9\frac{1}{2}''$, par rapport aux étoiles fixes; donc par rapport aux équinoxes le mouvement annuel de l'aphélie de Jupiter ſera aſſez exactement de 60″.

M. Caſſini ayant très-ſoigneuſement examiné toutes les obſervations anciennes, & les ayant comparées avec les modernes, ne trouve que 57″ pour le mouvement annuel de cet aphélie, au lieu que d'autres tables aſtronomiques le marquent au delà de 70″, d'où je conclus que ce bel accord de mon calcul avec les obſervations anciennes en confirme aſſez la juſteſſe.

Pour les autres valeurs on les trouve pour la valeur de u:

$A = 1,78973$ $\quad F = -0,61925\nu - 0,01701\mu - 0,57001\alpha\nu.$

$a = 1,67383\alpha$ $\quad G = +0,76236\nu + 0,01689\mu + 3,64624\alpha\nu.$

$K = -1,67385\alpha$ $\quad H = +10,58430\nu + 0,13210\mu + 0,40168\alpha\nu.$

$I = -4,74525\nu - 0,13576\mu + 0,52283\alpha\nu.$

& pour les valeurs de l'expreſſion ν,

$f =$

$f' = -2,12306\,\alpha\alpha$ $\quad E' = +0,16881\mu + 0,45202\,\alpha\nu - 0,74378\,\alpha\mu$

$a' = -0,67224\alpha$ $\quad G' = +0,65758\mu - 0,85288\,\alpha\nu - 0,44740\,\alpha\mu$

$K' = +0,67366\alpha$ $\quad H' = -12,87303\mu - 0,45204\,\alpha\nu + 5,23988\,\alpha\mu$

$I' = +0,26728\mu - 0,09304\,\alpha\nu - 0,11413\,\alpha\mu$

D'ou l'on voit qu'on ſeroit bien trompé dans la valeur de ces coëfficiens, ſi l'on avoit négligé celle de la lettre α, qui eſt, à ce que nous avons vu, très-conſidérable.

De-là les véritables diſtances moyennes c & e ſeront:

$c = 1,00000 + 0,33333\mu - 0,04006\nu - 0,55794\,kk$

$e = 1,83417 + 0,61139\nu + 0,16513\mu + 0,41197\,\alpha\alpha kk$

où l'unité marque le rayon d'un cercle, dans lequel un corps uniquement attiré vers le Soleil, acheveroit ſes révolutions en même tems que Jupiter.

Donc ayant trouvé les valeurs des coëfficiens ſuppoſés ci-deſſus, on aura à chaque tems les valeurs des diſtances x & y, par le moyen des formules $x = c(1+u)$ & $y = e(1+v)$

Il ne reſte donc qu'à trouver les longitudes ν & θ de nos Planètes, ce qui ce fera aiſement par les formules données pour $\frac{d\nu - dp}{d\omega}$ & $\frac{d\theta - dq}{d\omega}$. Je n'en raporterai que les termes principaux, qui auroient lieu quand même l'excentricité ſeroit infiniment petite, d'où l'on aura:

$$n = p - 1,34665\,\nu \sin.\omega + 3,34343\,\nu \sin.2\omega + 0,27615\,\nu \sin.3\omega + 0,06193\,\nu \sin.4\omega - 2k \sin.r - 2,71356\,k\,k \sin.2r - 3,34766\,\alpha kk \sin.\omega - 3,34835\,\alpha kk \sin.(\omega - 2r)$$

$$\theta = q + 0,02035\,\mu \sin.\omega - 0,16222\,\mu \sin.2\omega - 0,03365\,\mu \sin.3\omega - 0,00990\,\mu \sin.4\omega + 2\alpha k \sin.(\omega - r) - 3,54689\,\alpha\alpha kk \sin.2(\omega - r) - 1,34979\,\alpha kk \sin.\omega + 1,34816\,\alpha k^2 \sin.(\omega - 2r)$$

Pour les autres inégalités, je crois qu'il ſuffit d'avoir donné la méthode d'où elles peuvent être déduites; car avant qu'on ait déterminé exactement les valeurs de μ, ν & $\varkappa$, leur évolution en nombre deviendroit trop embarraſſante, & ne ſeroit outre cela d'aucun uſage.

Cependant ces expreſſions ſeroient ſuffiſantes, ſi l'excentricité de l'orbite de Jupiter étoit ſi petite, que les termes affectés par k & μ ou ν enſemble ne fuſſent d'aucune conſéquence.

Or les autres termes, dont les expreſſions de n & θ ſont compoſées, ſont compris dans les formules ſuivantes:

$$n = \text{Prec.} + \frac{k \sin.r}{\varkappa}\left(\frac{2n}{mm} A\alpha + \frac{0,09796\,\alpha\nu}{mcc\varkappa} - \frac{0,06791\,\alpha\nu}{mmcc}\right) + \frac{k \sin.(\omega - r)}{1-\varkappa}\left\{-\frac{2}{m}F - \frac{(4-3m)A}{mm} + \frac{2nA'}{mm} + \frac{0,26822\,\nu}{mc(1-\varkappa)} + \frac{0,06791\,(1+n)\nu}{mmcc} - \frac{2,50464\,\mu}{mmee}\right\}$$

$$+\frac{k\,\mathrm{sin}.(\omega+r)}{1+x}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2}{m}G-\frac{(4-3m)A}{mm}+\frac{2nA'}{mm}+\frac{2nB\alpha}{mm}\\+\frac{0,26822\nu}{mcc(1+x)}-\frac{1,19690\alpha\nu}{mcc(1+x)}+\frac{0,06791(1+n)\nu}{mmcc}\\-\frac{2,50464\mu}{mmee}-\frac{0,23399\,n\alpha\nu}{mmcc}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{k\,\mathrm{sin}.(2\omega-r)}{2-x}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2}{m}H-\frac{(4-3m)B}{mm}+\frac{2nB'}{mm}+\frac{2nA\alpha}{mm}\\+\frac{1,33589\nu}{mcc(2-x)}+\frac{0,09795\alpha\nu}{mcc(2-x)}+\frac{0,23399(1+n)\nu}{mmcc}\\+\frac{0,23399\mu}{mmee}-\frac{0,06791\,n\alpha\nu}{mmcc}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{k\,\mathrm{sin}.(2\omega+r)}{2+x}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2}{m}I-\frac{(4-3m)B}{mm}+\frac{2nB'}{mm}+\frac{2nC\alpha}{mm}\\+\frac{1,35589\nu}{mcc(2+x)}-\frac{0,98245\alpha\nu}{mcc(2+x)}+\frac{0,23399\,1+n\nu}{mmcc}\\+\frac{0,23399\mu}{mmee}-\frac{0,10614\,n\alpha\nu}{mmcc}\end{array}\right\}$$

$$=\mathrm{Prec.}+\frac{k\,\mathrm{sin}\,r}{x}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2n}{m}E'+\frac{n(4-)A'\alpha}{mm}-\frac{2nA\alpha}{mm}\\+\frac{1,07285\alpha\mu}{2meex}-\frac{2,50464(1+n)\alpha\mu}{mmee}+\frac{0,06791\,n\alpha\nu}{mmcc}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{k\,\mathrm{sin}.(\omega-r)}{1-x}\left(-\frac{2nA'}{mm}+\frac{1,43786\mu}{2mee(1-x)}+\frac{2,50464\mu}{mmee}\right)$$

$$+\frac{k\,\mathrm{sin}\,(\omega+r}{1+x}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2n}{m}G'+\frac{n(4-m)B'\alpha}{mm}-\frac{2nA'}{mm}-\frac{2nB\alpha}{mm}\\+\frac{1,43786\mu}{2mee(1+x)}+\frac{2,39381\alpha\mu}{2mee(1+x)}+\frac{0,23399\,1+n\alpha\mu}{mmee}\\+\frac{2,50464\mu}{mmee}+\frac{0,23399\,n\alpha\nu}{mmcc}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{k\,\mathrm{fin}\,(2\omega-r)}{2-\varkappa}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2n}{m}H'+\frac{n(4-m)A'\alpha}{mm}-\frac{2nB'}{mm}-\frac{2nA\alpha}{mm}\\ -\frac{2,71178\,\mu}{2mee(2-\varkappa)}+\frac{1,07285\,\alpha u}{2mee(2-\varkappa)}+\frac{2,50464(1+n)\alpha u}{mmee}\\ -\frac{0,23399\,\mu}{mmee}+\frac{0,06791\,n\alpha\nu}{mmcc}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{k\,\mathrm{fin}\,(2\omega+r)}{2+\varkappa}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2n}{m}I'+\frac{n(4-m)C'\alpha}{mm}-\frac{2nB'}{mm}+\frac{2nC\alpha}{mm}\\ -\frac{2,71178\,\mu}{2mee(2+\varkappa)}+\frac{1,96490\,\alpha u}{2mee(2+\varkappa)}+\frac{0,10614(1+n)\alpha u}{mmee}\\ -\frac{0,23399\,\mu}{mmee}+\frac{0,10614\,n\alpha\nu}{mmcc}\end{array}\right\}$$

§ VI.

Recherches des Inégalités de Jupiter & de Saturne, qui dependent de l'excentricité de l'orbite de Saturne.

DE la même maniere que je viens de déterminer les inégalités, qui dependent de l'excentricité de l'orbite de Jupiter, on déterminera celles, qui dependent de l'excentricité de l'orbite de Saturne; ſoit donc l, l'excentricité de l'orbite de Saturne, & s ſon anomalie de l'eſpece que j'ai expoſé ci-deſſus, de ſorte que ds, garde avec $d\omega$, un rapport conſtant qui ſoit $ds = \lambda\, d\omega$; or le mouvement de Jupiter ſe reſſentira tellement de cette excentricité, que ſa diſtance au Soleil dependra très-ſenſiblement de ſon élongation depuis l'aphélie de Saturne

Saturne. Cette élongation étant donc $= \omega + s$, la quantité u contiendra un terme de la forme $cof.(\omega + s)$, qui ſera très-conſidérable par rapport aux autres. Comme je ne regarderai pas ici l'excentricité de l'orbite de Jupiter, les inégalités qui en dependent étant deja trouvées dans l'article précédent; je poſerai

$$\begin{aligned} u = b\, l\, cof.(\omega+s) &+ A\, cof.\,\omega + C\, cof.\,3\omega + E\, l\, cof.\, s \\ &+ B\, cof.\,2\omega + D\, cof.\,4\omega + L\, l\, cof.(\omega - s) \\ &+ N\, l\, cof.(2\omega - s) \\ &+ O\, l\, cof.(2\omega + s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v = l\, cof.\, s &+ A'\, cof.\,\omega + C'\, cof.\,3\omega + L'\, l\, cof.(\omega - s) \\ &+ B'\, cof.\,2\omega + D'\, cof.\,4\omega + M'\, l\, cof.(\omega + s) \\ &+ N'\, l\, cof.(2\omega - s) \\ &+ O\, l\, cof.(2\omega + s) \end{aligned}$$

où je néglige les termes $l\,l\, cof.\,\omega$, $l\,l\, cof.\,2(\omega + s)$ & $l\,l\, cof.(\omega + 2s)$, puiſque je ferai voir dans l'article ſuivant, comment on peut fort aiſement aſſigner les inégalités, qui ſeroient compriſes dans ces termes.

Maintenant on n'a qu'à ſubſtituer ces expreſſions dans nos deux équations *differentio*-différentielles rapportées pag. 34. & cette ſubſtitution n'aura aucune difficulté, puiſque nous négligerons tous les termes, qui ſeroient multipliés, ou par $\mu\mu$, $\mu\nu$ ou $\nu\nu$.

Or la premiere équation ſera changée par cette ſubſtitution dans la forme ſuivante:

Conſtante.	$l \cos. s$	$l \cos. (\omega - s)$
$\frac{1}{mm} + \frac{2f}{mm}$	$+E$	$+(1-\lambda)^2 L$
$-\frac{(1+\mu)}{mmc^3}$	$-\frac{(4-3m)}{2m} bA$	$-\frac{(4-3m)}{2m} 4bB$
$+0,33672\,\nu$	$-\frac{(4-3m)}{2m}(1+\lambda)^2 bA$	$-\frac{(4-3m)}{2m}(1+\lambda)^2 bB$
$-\frac{(4-3m)}{2m} b^2(1+\lambda)^2 ll$	$+\frac{2}{m}(1+\lambda) bA$	$+\frac{2}{m}(1+\lambda) 2bB$
$+\frac{1}{m} b^2(1+\lambda)^3 ll$	$+\frac{2n}{m}(1+\lambda)^2 bA'$	$+\frac{2n}{m}(1+\lambda)^2 bB'$
	$-\frac{n}{m}(1+\lambda) bA'$	$+\frac{2n}{m} A$
	$-\frac{\nu b}{mmcc}\frac{0,53644}{\lambda}$	$-\frac{n}{m}(1+\lambda) 2bB'$
	$+\frac{\nu b'(1+\lambda)^2}{mcc} 0,06791$	$-\frac{n}{m}\lambda A$
	$-\frac{\nu b(1+\lambda)}{2mcc} 0,06791$	$+\frac{\nu b}{mmcc}\frac{2,71178}{1-\lambda}$
	$-\frac{\mu b(1+\lambda)^2}{mee} 2,50464$	$+\frac{\nu}{mmcc}\frac{0,19592}{1-\lambda}$
	$+\frac{\mu b(1+\lambda)}{\nu nee} 6,50464$	$+\frac{\nu b(1+\lambda)^2}{mcc} 0,23399$
	$-\frac{(1+\mu)E}{mmc^3}$	$-\frac{\nu b(1+\lambda)}{mcc} 0,23399$
	$+\nu b\,1,17101$	$+\frac{(\mu b\,1+\lambda)^2}{mee} 0,23399$
	$-\nu\,1,33820$	$-\frac{\mu b(1+\lambda)}{mee} 0,23399$
		$-\frac{(1+\mu)L}{mme^3}$
		$+\nu b\,2,22405$
		$-\nu\,0,98909$

$l\ cof.(\omega+s)$	$l\ cof.(2\omega-s)$	$l\ cof.(2\omega+s)$
$+b(1+\lambda)^2$	$+(2-\lambda)^2 N$	$+(2+\lambda)^2 O$
$+\frac{2n}{m} A$	$-\frac{(4-3m)}{2m} 9bC$	$-\frac{(4-3m)}{2m} bA$
$+\frac{n}{m}\lambda A$	$-\frac{(4-3m)}{2m}(1+\lambda)^2 bC$	$-\frac{(4-3m)}{2m}(1+\lambda)^2 bA$
$+\frac{\nu}{mmcc}\frac{0,19592}{1+\lambda}$	$+\frac{2}{m}(1+\lambda)\,3bC$	$-\frac{2}{m}(1+\lambda)\,bA$
$-\frac{(1+\mu)b}{mmc^3}$	$+\frac{2n}{m}(1+\lambda)^2 bC'$	$+\frac{2n}{m}(1+\lambda)^2 bA'$
$+\nu b\ 1,65822$	$+\frac{2n}{m} 4B$	$+\frac{2n}{m} 4B$
$-\nu\ 0,98909$	$-\frac{n}{m}(1+\lambda)\,3bC'$	$+\frac{n}{m}(1+\lambda)\,bA'$
	$-\frac{n}{m} 2\lambda B$	$+\frac{n}{m} 2\lambda B$
	$+\frac{\nu b}{mmcc}\frac{2,15293}{2-\lambda}$	$+\frac{\nu b}{mmcc}\frac{0,53644}{2+\lambda}$
	$-\frac{\nu}{mmcc}\frac{2,39381}{2-\lambda}$	$-\frac{\nu}{mmcc}\frac{2,39381}{2+\lambda)}$
	$+\frac{\nu b(1+\lambda)^2}{mcc}\ 0,10614$	$+\frac{\nu b(1+\lambda)^2}{mcc}\ 0,06791$
	$-\frac{3\nu b(1+\lambda)}{2mcc}\ 0,10614$	$+\frac{\nu b(1+\lambda)}{2mcc}\ 0,06791$
	$+\frac{\mu b'(1+\lambda)^2}{mee}\ 0,10614$	$-\frac{\mu b'(1+\lambda)^2}{mee}\ 2,50464$
	$-\frac{3\mu b'(1+\lambda)}{2mee}\ 0,10614$	$-\frac{\mu b'(1+\lambda)}{2mee}\ 2,50464$
	$-\frac{(1+\mu)N}{mmc^3}$	$-\frac{(1+\mu)O}{mmc^3}$
	$+\nu b\ 1,71699$	$+\nu b\ 1,17101$
	$-\nu\ 1,63562$	$-\nu\ 1,63562$

L'autre équation prendra cette forme:

Conſtante	l cof. s	l cof. $(\omega - s)$
$+\frac{(4-m)}{2m}\lambda\lambda ll$	$+\lambda\lambda$	$+(1-\lambda)^2 L'$
$-\frac{n}{m}\lambda\lambda ll$	$-\frac{2}{m} b A'$	$+\frac{(4-m)}{2m}(1+\lambda\lambda) A'$
$+\frac{nn}{mm}+\frac{2nng}{mm}$	$+\frac{1}{m}(1+\lambda) b A'$	$-\frac{2n}{m}\lambda A'$
$-\frac{(1+\nu)}{mme^2}$	$-\frac{\mu nb}{mmee}\frac{1,43786}{\lambda}$	$-\frac{2}{m} 4 b B'$
$-0,59483\mu$	$-\frac{(1+\nu)}{mme^2}$	$-\frac{2}{m}\lambda\lambda A$
	$+\mu b\ 0,98596$	$+\frac{1}{m}\lambda A$
	$-\mu\ 0,20219$	$+\frac{1}{m}(1+\lambda) 2 b B'$
		$-\frac{\mu nb}{mmee}\frac{2,71178}{1-\lambda}$
		$+\frac{\mu n}{mmee}\frac{1,07285}{1-\lambda}$
		$+\frac{\nu\lambda\lambda}{mcc}\ 0,06791$
		$-\frac{\nu\lambda}{2mcc}\ 0,06791$
		$-\frac{\mu\lambda\lambda}{mee}\ 2,50464$
		$+\frac{\mu\lambda}{2mee}\ 2,50464$
		$-\frac{(1+\nu) L'}{mme^2}$
		$-\mu\ 2,07533$
		$-\mu b\ 0,48620$

l cof.

$l.\ cos.(\omega+s)$	$l\ cos.(2\omega-s)$	$l\ cos.(2\omega+s)$
$+(1+\lambda)^2 M'$	$+(2-\lambda)^2 N'$	$+(2+\lambda)^2 O'$
$+\frac{(4-m)}{2m}(1+\lambda\lambda)A'$	$+\frac{(4-m)}{2m}(4+\lambda\lambda)B'$	$+\frac{(4-m)}{2m}(4+\lambda\lambda)B'$
$+\frac{2n}{m}\lambda A'$	$-\frac{2n}{m}4\lambda B'$	$+\frac{2n}{m}4\lambda B'$
$-\frac{2}{m}\lambda\lambda A$	$-\frac{2}{m}9bC'$	$-\frac{2}{m}bA'$
$-\frac{1}{m}\lambda A$	$-\frac{2}{m}\lambda\lambda B$	$-\frac{2}{m}\lambda\lambda B$
$+\frac{\mu n}{mmee}\frac{1,07285}{1+\lambda}$	$+\frac{1}{m}2\lambda B$	$-\frac{1}{m}2\lambda B$
$+\frac{3\lambda\lambda\lambda}{mcc}0,06791$	$+\frac{1}{m}(1+\lambda)3bC'$	$-\frac{1}{m}(1+\lambda)bA'$
$+\frac{3\lambda}{2mcc}0,06791$	$-\frac{\mu nb}{mmee}\frac{2,15293}{2-\lambda}$	$+\frac{\mu nb}{mmee}\frac{1,43786}{2+\lambda}$
$-\frac{\mu\lambda\lambda}{mee}2,50464$	$+\frac{\mu n}{mmee}\frac{2,39381}{2-\lambda}$	$+\frac{\mu n}{mmee}\frac{2,39381}{2+\lambda}$
$-\frac{\mu\lambda}{2mee}2,50464$	$+\frac{3\lambda\lambda\lambda}{mcc}0,23399$	$+\frac{3\lambda\lambda\lambda}{mcc}0,23399$
$-\frac{(1+3)M'}{mme^3}$	$-\frac{3\lambda}{mcc}0,23399$	$+\frac{3\lambda}{mcc}0,23399$
$-\mu b\,0,39631$	$+\frac{\mu\lambda\lambda}{mee}0,23399$	$+\frac{\mu\lambda\lambda}{mee}0,23399$
$-\mu\,2,07533$	$-\frac{\mu\lambda}{mee}0,23399$	$+\frac{\mu\lambda}{mee}0,23399$
	$-\frac{(1+3)N'}{mme^3}$	$-\frac{(1+3)O'}{mme^3}$
	$-\mu b\,0,43714$	$+\mu b\,0,98596$
	$+\mu\,0,34875$	$+\mu\,0,34875$

Les formules pour les longitudes nous donnent d'abord à connoître, qu'il y a $f = \frac{m+4n}{2m}\, bbll$, & $g = -\frac{(4-m)}{2m}\, ll$. Enſuite les termes conſtans donnent :

$$\frac{1+\mu}{mmc^3} = \frac{1}{mm} + 0,33672\,\nu - \frac{(2-3m)}{2m}\, bb\,(1+\lambda)^2\, ll + \frac{(m+4n)}{m^3}\, bbll$$

$$\frac{1+\nu}{mmc^3} = \frac{nn}{mm} - 0,59483\,\mu + \frac{(2-3m)}{2m}\, \lambda\lambda\, ll - \frac{(4-m)nn}{m^3}\, ll$$

Le terme $l\,cof.\,s$ de la ſeconde équationfournit

$$\lambda\lambda - \frac{1}{m}(1-\lambda)\,bA' - \frac{\mu nb}{mmcc}\,\frac{1,43786}{\lambda} + \mu b\,0,98596 - \mu\,0,20219 = \frac{nn}{mm} - 0,59483\,\mu$$

car nous ſavons que la valeur de λ, ne depend point de l'excentricité λ ; ce qu'on verroit évidemment, ſi l'on n'avoit pas omis dans le coëfficient du terme $l\,cof.\,s$ les parties affectées, par ll.

Or le terme $l\,cof.\,(\omega + s)$ de la premiere équation donne :

$$b(1+\lambda)^2 + \frac{n}{m}(2+\lambda)A + \frac{\nu}{mmcc}\,\frac{0,19592}{1+\lambda} + \nu\, b\,1,65822 - \nu\,0,98909 = \frac{b}{mm} + 0,33672\,b\,\nu$$

D'où il eſt évident, qu'il y a fort à-peu-près $\lambda = \frac{n}{m}$ & partant nous aurons en poſant $\lambda = \frac{n}{m} + \frac{\xi}{m}$

$$\frac{2n\xi}{mm} - \frac{(m-n)}{mm} bA' - \frac{\mu b}{mee}\, 1,43786 + \mu b\, 0,98596 + \mu\, 0,39264 = o$$

$$\frac{2b\xi}{mm} + \frac{n(2m+n)}{mm} A + \frac{\nu}{mcc}\, 0,19592 + \nu b\, 1,32150 - \nu\, 0,98909 = o$$

& ſubſtituant les valeurs déja trouvées

$$\frac{2n\xi}{mm} - 0,22603\, b\mu + 0,39264\, \mu = o$$

$$\frac{2b\xi}{mm} + 1,32150\, b\nu + 0,55683\, \nu = o$$

d'où l'on tire en éliminant ξ,

$$0,22603\, b\, b\mu = 0,39264\, b\mu - 0,53199\, b\nu - 0,22416\, \nu$$

& de-là la valeur de b réſulteroit imaginaire en poſant $\mu = \frac{1}{1067}$, & $\nu = \frac{1}{3021}$.

Mais ſi l'on change un peu les valeurs de μ & ν, pour rendre les deux racines égales, on trouvera à-peu-près $b = \frac{1}{2}$; d'où il ſemble qu'on ne ſe trompera pas beaucoup en poſant $b = \frac{1}{2}$.

Cependant il eſt très-remarquable, qu'il pourroit arriver, que la valeur de b, devint imaginaire, & dans ce cas on ſeroit bien embarraſſé de déterminer le mouvement, car ce ſeroit une marque qu'au lieu des coſinus des angles, il faudroit introduire dans le calcul des quantités exponentielles, auxquelles ſe réduiſent comme on ſait les coſinus imaginaires.

Or de-là on obtient $\xi = -0,17406\mu + 0,10002\, b\mu$, & la valeur de $\lambda = \frac{n+\xi}{m}$, donnant pour l'anomalie de Saturne $s = C + \frac{n+\xi}{m}\omega = \text{Conſt.} + \frac{n+\xi}{m}(n-\theta)$, &

ſelon le mouvement moyen $s = C + \frac{n-\xi}{m}(p-q) = C + \left(1 + \frac{\xi}{n}\right) q$. Donc le mouvement moyen de Saturne q eſt au mouvement de ſon anomalie s, comme 1 à $1 + \frac{\xi}{n}$, & au mouvement de ſon aphélie, ſuppoſé progreſſif, comme 1 à $-\frac{\xi}{n}$, c'eſt-à-dire comme, 1 à $0,43237\,\mu - 0,24891\,b\mu$, ou comme 3466 à 1. Donc le mouvement moyen de Saturne étant pendant un an $0^{s}, 12^{\circ}, 13', 30'' = 44010''$, l'aphélie de Saturne avancera chaque année de $13''$ par rapport aux étoiles fixes, & de $1'4''$ par rapport aux équinoxes. M. Caſini ſuppoſe ce mouvement annuel de $1', 18''$; mais il eſt bien clair, qu'il eſt impoſſible de bien déterminer le mouvement de l'aphélie par les obſervations, tandis que les inégalités du mouvement ne ſont pas connues.

Ayant trouvé les valeurs des lettres b & λ, on déterminera enſuite les autres coëfficiens $L, M, N, O, L', M', N', O'$, d'où l'on connoîtra les inégalités des diſtances x & y, en tant qu'elles dependent de l'excentricité de l'orbite de Saturne. Enſuite on trouvera aiſement les inégalités dans la longitude des Planètes, qui dependent de ce même élément.

$$\varpi = \text{Prec.} + \frac{l \sin s}{\lambda}\left\{\begin{array}{l} -\frac{2}{m}E - \frac{(m+4n)}{mm}bA + \frac{2n}{mm}bA' \\ -\frac{3b}{2mcc}\,0,13644\,\mu + \frac{3(1+n)b}{mmcc}\,0,06791 \\ -\frac{\mu b}{mmcc}\,2,50464 \end{array}\right\}$$

$+ l \sin$

$$+\frac{l\,\mathrm{sin.}\,(\omega-s)}{1-\lambda}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2}{m}L-\frac{(m+4n)}{mm}bB+\frac{2n}{mm}bB'+\frac{2n}{mm}A\\+\frac{\nu b}{2mcc}\frac{2,71178}{1-\lambda}+\frac{\nu}{2mcc}\frac{0,19592}{1-\lambda}\\+\frac{r(1+n)b}{mmcc}0,23399-\frac{\nu n}{mmcc}0,06791\\+\frac{\mu b}{mmee}0,23399\end{array}\right\}$$

$$+\frac{l\,\mathrm{sin.}\,(\omega+s)}{1+\lambda}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2}{m}b+\frac{2n}{mm}A+\frac{\nu}{2mcc}\frac{0,19592}{1+\lambda}\\-\frac{\nu n}{mmcc}0,06791\end{array}\right\}$$

$$+\frac{l\,\mathrm{sin.}\,(2\omega-s)}{2-\lambda}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2}{m}N-\frac{(m+4n)}{mm}bC+\frac{2n}{mm}bC'\\+\frac{2n}{mm}B+\frac{\nu b}{2mcc}\frac{2,15293}{2-\lambda}-\frac{\nu}{2mcc}\frac{2,39381}{2-\lambda}\\+\frac{\nu(1+n)b}{mmcc}0,10614-\frac{\nu n}{mmcc}0,23399\\+\frac{\mu b}{mmee}0,10614\end{array}\right\}$$

$$+\frac{l\,\mathrm{sin.}\,(2\omega+s)}{2-\lambda}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2}{m}O-\frac{(m+4n)}{mm}bA+\frac{2n}{mm}bA'\\+\frac{2n}{mm}B+\frac{\nu b}{2mcc}\frac{0,53644}{2+\lambda}-\frac{\nu}{2mcc}\frac{2,39381}{2+\lambda}\\+\frac{\nu(1+n)b}{mmcc}0,06791-\frac{\nu n}{mmcc}0,23399\\-\frac{\mu b}{mmee}2,50464\end{array}\right\}$$

$$0=\mathrm{Prec.}+\frac{l\,\mathrm{sin.}\,s}{\lambda}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2n}{m}-\frac{2n}{mm}bA'-\frac{\mu b}{2mee}\frac{1,43786}{\lambda}\\+\frac{\mu b}{mmee}2,50464\end{array}\right\}$$

$$+\frac{l\,\mathrm{sin.}(\omega+s}{1-\lambda}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2n}{m}L'+\frac{(4-m)n}{mm}A'-\frac{2n}{mm}bB'\\-\frac{2n}{mm}A-\frac{\mu b}{2mee}\frac{2,71178}{1-\lambda}+\frac{\mu}{2mee}\frac{1,07285}{1-\lambda}\\-\frac{\mu(1+n)}{mmee}2,50464-\frac{\mu b}{mmee}0,23399\\+\frac{\nu n}{mmcc}0,06791\end{array}\right\}$$

$$+\frac{l\,\mathrm{sin.}(\omega+s)}{1+\lambda}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2n}{m}M'+\frac{(4-m)n}{mm}A'-\frac{2n}{mm}A\\+\frac{\mu}{2mee}\frac{1,07285}{1+\lambda}-\frac{\mu(1+n)}{mmee}2,50464\\+\frac{\nu n}{mmcc}0,06791\end{array}\right\}$$

$$+\frac{l\,\mathrm{sin.}(2\omega-s)}{2-\lambda}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2n}{m}N'+\frac{(4-m)n}{mm}B'-\frac{2n}{mm}bC'\\-\frac{2n}{mm}B-\frac{\mu b}{2mee}\frac{2,15293}{2-\lambda}+\frac{\mu}{2mee}\frac{2,39381}{2-\lambda}\\+\frac{\mu(1+n)}{mmee}0,23399-\frac{\mu b}{mmee}0,10614\\+\frac{\nu n}{mmcc}0,23399\end{array}\right\}$$

$$+\frac{\mathrm{sin.}(2\omega+s)}{2+\lambda}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2n}{m}O'+\frac{(4-m)n}{mm}B'-\frac{2n}{mm}bA'\\-\frac{2n}{mm}B+\frac{\mu b}{2mee}\frac{1,43586}{2+\lambda}+\frac{\mu}{2mee}\frac{2,39381}{2+\lambda}\\+\frac{\mu(1+n)}{mmee}0,23399+\frac{\mu b}{mmee}2,50464\\+\frac{\nu n}{mmcc}0,23399\end{array}\right\}$$

§. VII.

Recherche des inégalités de Jupiter & de Saturne, qui dépendent de l'une & de l'autre excentricité à la fois.

QUOIQUE le nombre des inégalités qui dépendent des quantités k & l à la fois soit infini, il eſt pourant aiſé de voir, qu'il n'y a que l'angle $\omega - r + s$, qui fourniſſe des inégalités de quelque conſéquence, toutes les autres devenant pour ainſi dire infiniment petites à l'égard de cet angle puiſque le rapport de ſa différentielle, ou $1 - \varkappa + \lambda$, dévient preſque égal à zero; les coëfficiens des termes qui en réſultent pour les longitudes η & θ, ſeront extrêmement grands. Car ayant $\varkappa = \frac{1}{m} - 0,39475\,\nu - 0,03620\,\nu\alpha$, & $\lambda = \frac{n}{m} - 0,29135\,\mu + 0,16742\,\mu b$, on aura

$$\varkappa - \lambda = 1 - 0,39475\,\nu - 0,03620\,\nu\alpha + 0,29135\,\mu - 0,16742\,\mu b$$

& partant

$$1 - \varkappa + \lambda = 0,39475\,\nu - 0,29135\,\mu + 0,03620\,\nu\alpha + 0,16742\,\mu b$$

ou bien l'angle $\omega - r + s = \eta - r - \theta + s$, ſe trouve en ſouſtrayant la longitude de l'aphélie de Saturne de celle de l'aphélie de Jupiter.

On voit auſſi que les inégalités de cet angle ne ſeront d'aucune conſidération pour les diſtances mêmes,

& qu'il ſera permis par conſéquent de négliger dans leur recherche les termes qui ſont affectés par μ ou ν. Je poſe donc pour trouver ces inégalités

$$x = \text{prec.} + k\,cof.\,r + b\,l\,cof.(\omega + s) + P\,k\,l\,cof.(\omega - r + s)$$
$$y = \text{prec.} + l\,cof.\,s + \alpha\,k\,cof.(\omega - r) + P'k\,l\,cof.(\omega - r + s)$$

& les équations *differentio*-différentielles donneront

$$P = -\frac{m(4-3m)}{2}\,b\,(\varkappa\varkappa + (1+\lambda)^2) + 2\,m\,b\,\varkappa\,(1+\lambda)$$
$$= -\frac{2+3m}{m}\,b$$
$$P' = \frac{m(4-m)}{2nn}\,\alpha(\lambda\lambda + (1-\varkappa)^2) + \frac{2m}{n}\,\alpha\,\lambda\,(1-\varkappa)$$
$$= \frac{2+m}{m}\,\alpha$$

Ces valeurs étant ſubſtituées dans les formules pour les longitudes produiront :

$$\eta = \text{Prec.} - \frac{3\,b\,k\,l\,ſin.(\omega - r + s)}{m(1-\varkappa+\lambda)}$$
$$\theta = \text{Prec.} - \frac{3\,n\,\alpha\,k\,l\,ſin.(\alpha - r + s)}{m(1-\varkappa+\lambda)}$$

Donc ſi nous poſons $\mu = \frac{1}{1067}$, $\nu = \frac{1}{3021}$, $\alpha = \frac{1}{4}$ & $b = \frac{1}{2}$ à cauſe de $1 - \varkappa + \lambda = -0,0000488$, ces deux inégalités deviendront à-peu-près égales, ſavoir :

$$\eta = \text{Prec.} + 51450\,k\,l\,ſin.(\omega - r + s)$$
$$\theta = \text{Prec.} + 51780\,k\,l\,ſin.(\omega - r + s)$$

Quoique ces expreſſions ſoient très-conſidérables, leur effet n'eſt preſque point ſenſible dans le mouvement des Planètes ; car puiſque l'angle $\omega - r + s$, & partant auſſi ſon ſinus, eſt à peu-près conſtant, quelque

que grandes que ſoient ces valeurs, elles ſe confondront avec la longitude moyenne, & ne troubleront le mouvement, qu'en tant que l'angle $\omega - r + s$ deviendra ſenſiblement variable. Or je parlerai plus amplement de ces changemens dans la ſuite.

§. VIII.

Réflexions ſur les Anomalies de Jupiter & de Saturne.

Les inégalités, que j'ai trouvées en premier lieu, & qu'on pourroit nommer la variation de ces Planètes, puiſqu'elles dependent uniquement de leur diſtance, ou de l'angle ω, ne ſont aſſujetties à aucun doute, & il eſt bien ſûr qu'elles ſe trouvent actuellement tant dans Saturne que dans Jupiter. Mais pour les inégalités, qui dependent de l'excentricité de l'une ou de l'autre orbite, on ſera bien ſurpris, que je vienne de trouver des inégalités auſſi conſidérables, que l'équation du centre-même de ces deux Planètes; & on ſera peut-être porté à rejetter entiérement mes recherches, puiſqu'elles conduiſent à des inégalités qui pourroient monter à pluſieurs degrès.

Mais j'eſpére, que les réflexions ſuivantes ne leveront pas non-ſeulement ce doute, mais qu'elles nous découvriront la vraie nature des inégalités qui troublent le mouvement de ces deux planètes du côté de leur excentricité; de ſorte que nous ſerons parfaitement éclaircis ſur cet article, qui doit paroître fort bizarre à tous ceux qui travaillent ſur cette matiere

Je dis donc d'abord que les grandes inégalités qui paroiſſent troubler le mouvement d'une Planète à cauſe de l'excentricité de l'autre, ne produiſent même aucune altération dans le mouvement régulier, ſelon les regles de Kepler, & que s'il n'y avoit point d'autres inégalités hormis celles ci, le mouvement des deux Planètes ſeroit parfaitement conforme aux regles de Kepler.

Car en effet ayant vu, que mettant l'excentricité de l'orbite de Jupiter $=k$, & partant ſa diſtance $x=c(1+k\,cof.r)$ en tant qu'elle dépend uniquement de k, la diſtance de Saturne au Soleil devient $y=e(1+\alpha\,k\,cof.(\omega-r))$, il eſt évident que l'orbite de Saturne devient déja fort excentrique quoique je n'aie pas encore introduit dans le calcul ſa propre excentricité. De plus, il eſt remarquable que cette excentricité demeureroit la même, quand même l'action mutuelle des deux Planètes évanouiroit tout à fait, pourvu que les lettres μ & ν conſervent entr'elles en évanouiſſant le même rapport. Or, dans ce cas, il eſt clair que Saturne ſuivroit exactement les regles de Kepler, il décriroit donc une ellipſe, dont l'excentricité ſeroit $=\alpha\,k$, & l'anomalie $=\omega-r$. ou bien ſon aphélie conviendroit avec celui de l'orbite de Jupiter. Ainſi, auſſi-tôt que nous ſuppoſons excentrique l'orbite de Jupiter, le calcul nous marque celle de Saturne auſſi excentrique, dont l'excentricité tient un rapport conſtant à celle de Jupiter, ſavoir comme α à 1; & qui ſe rapporte au même aphélie, & l'une & l'autre Planète ſuivroit les regles de Kepler, à moins que leur mouvement ne ſoit dérangé par les autres inégalités.

Or nonobſtant cela Saturne peut avoir une excentricité propre, & un aphélie particulier; & alors ces deux excentricités ſe réuniſſent dans une ſeule, ſelon laquelle il décrira une ellipſe conformement aux re-

gles de Kepler, comme je ferai voir bien-tôt. Et partant l'aphélie & l'excentricité que les tables marquent pour l'orbite de Saturne ne ſont pas ſon propre aphélie & ſon excentricité, mais plutôt le reſultat des deux excentricités de celle qui lui eſt propre, & de celle qui lui convient à cauſe de l'excentricité de l'orbite de Jupiter.

Le mouvement de Saturne ſe regle donc ſur deux aphélies à la fois ſavoir ſur celui de Jupiter, & ſur le ſien ; en conſéquence il y aura auſſi deux anomalies, l'une qui regarde l'aphélie de Jupiter, & l'autre qui regarde l'aphélie de Saturne. Donc ſi nous nommons la longitude de l'aphélie de Jupiter $= \rho$, & la longitude de l'aphélie de Saturne $= \sigma$, le mouvemeut de Saturne en tant qu'il depend de cette double anomalie ſa longitude étant $= \theta$, ſera déterminé par cette diſtance :

$$y = e\,(1 + l\,cof.\,(\theta - \sigma) + \alpha k\,cof.\,(\theta - \rho))$$

Pareillement le mouvement de Jupiter dependra d'une double anomalie, lequel ſera déterminé par cette expreſſion de ſa diſtance au Soleil.

$$x = c\,(1 + k\,cof.\,(\eta - \rho) + b\,l\,cof.\,(\eta - \sigma))$$

Or je dis que cette double anomalie produira le même effet, que ſi chaque Planète, ſelon les regles de Kepler, n'étoit aſſujettie qu'à une ſeule anomalie, qui ſera celle qu'on découvre par les obſervations, & que je nommerai ſon anomalie apparente.

Soit donc R la longitude de l'aphélie apparent de Jupiter, & K ſon excentricité apparente, ſoit de plus S la longitude de l'aphélie apparent de Saturne, & L ſon excentricité, ce ſont les élémens, que les obſervations nous donnent immédiatement à connoître : &

je dis qu'on peut toujours déterminer ces élémens apparens R, K, S & L, de maniere qu'on ait :

$$k \cos.(\eta - \rho) + b\,l \cos.(\eta - \sigma) = K \cos.(\eta - R)$$
$$l \cos.(\theta - \sigma) + \alpha\, k \cos.(\theta - \rho) = L \cos.(\theta - S)$$

& qu'on ait autre cela:

$$k \sin.(\eta - \rho) + b\,l \sin.(\eta - \sigma) = K \sin.(\eta - R)$$
$$l \sin.(\theta - \sigma) + \alpha\, k \sin.(\theta - \rho) = L \sin.(\theta - S)$$

Car quand j'aurai prouvé cela, il ſera évident qu'on peut ſubſtituer cette anomalie apparente au lieu des deux anomalies auxquelles j'ai été conduit par la théorie, & partant on conviendra que les inégalités de cette eſpece, que la théorie a fournies, ne troublent rien dans le mouvement régulier des Planètes, ſelon les regles de Kepler.

Or pour ſatisfaire aux égalités propoſées, en éliminant les longitudes η & θ, on obtiendra,

$$k \cos.\rho + b\,l \cos.\sigma = K \cos. R$$
$$l \cos.\sigma + \alpha\, k \cos.\rho = L \cos. S$$
$$k \sin.\rho + b\,l \sin.\sigma = K \sin. R$$
$$l \sin.\sigma + \alpha\, k \sin.\rho = L \sin. S$$

d'où l'on tire:

$$K\,K = k\,k + b\,b\,l\,l + 2\,b\,k\,l \cos.(\rho - \sigma)$$
$$L\,L = l\,l + \alpha\,\alpha\,k\,k + 2\,\alpha\,k\,l \cos.(\rho - \sigma)$$

& $\text{tang.}\, R = \frac{k \sin.\rho + b\,l \sin.\sigma}{k \cos.\rho + b\,l \cos.\sigma}$; $\text{tang.}\, S = \frac{l \sin.\sigma + \alpha\, k \sin.\rho}{l \cos.\sigma + \alpha\, k \cos.\rho}$

Donc ſi les deux anomalies réelles de chaque Planète étoient connues, on trouveroit par le moyen de ces formules l'anomalie apparente de chacune, de même que le lieu apparent de l'une & de l'autre aphélie.

Mais

Mais puiſque nous connoiſſons par les obſervations les élémens apparens K, L, R & S, nous devons plutôt chercher les élémens vrays k, l, ρ & σ, pour nous mettre en état d'en déterminer enſuite les inégalités, dont le mouvement de deux Planètes ſe trouve dérangé. Pour cet effet je tire de nos formules les égalités ſuivantes.

$$(\alpha b - 1)\, k \cos.\rho = b L \cos. S - K \cos. R$$
$$(\alpha b - 1)\, l \cos.\sigma = \alpha K \cos. R - L \cos. S$$
$$(\alpha b - 1)\, k \sin.\rho = b L \sin. S - K \sin. R$$
$$(\alpha b - 1)\, l \sin.\sigma = \alpha K \sin. R - L \sin. S.$$

d'où l'on déduit aiſément.

$$(\alpha b - 1)^2\, k k = b b L L + K K - 2 b K L \cos.(R - S)$$
$$(\alpha b - 1)^2\, l l = \alpha\alpha K K + L L - 2 \alpha K L \cos.(R - S)$$

$$\text{tang.}\,\rho = \frac{b L \sin. S - K \sin. R}{b L \cos. S - K \cos. R} \qquad \text{tang.}\,\sigma = \frac{\alpha K \sin. R - L \sin. S}{\alpha K \cos. R - L \cos. S}$$

Or les Tables Aſtronomiques de M. Caſſini marquent pour l'époque de 1700, le lieu de l'aphélie.

$$\begin{cases} \text{de Jupiter } R = 6^{s}\ 9^{\circ}\ 26'\ 42'' \\ \text{de Saturne } S = 8\ \ 28\ \ 8\ \ 39. \end{cases}$$

& de-là on tire:

tang. $K = 8,6832165$, tang. $L = 8,7559031$.

Poſant donc comme j'ai trouvé $\alpha = \frac{5}{4}$, & $b = \frac{1}{2}$; on obtiendra:

$$\rho = 5^{s}\ 6^{\circ}\ 12' \qquad \& \sigma = 10^{s}\ 20^{\circ}\ 45'$$

& pour les excentricités vrayes on aura:

$$k = 0,13595 \qquad \& l = 0,19840.$$

qui ſont par conſéquent beaucoup plus grandes que les excentricités apparentes.

Je ne doute pas, qu'on ne regarde cette double anomalie, comme un grand défaut de ma méthode, & puiſque ces deux anomalies ſe peuvent réduire à une ſeule, on penſera qu'une méthode, qui n'eût donné que cette ſeule anomalie auroit été préférable; mais outre qu'il eſt abſolument néceſſaire, qu'on parvienne à une double anomalie, ſi l'on veut ſuivre exactement les principes de la mécanique, on verra d'abord que cette double anomalie nous fournit des éclairciſſemens, qui ne ſeroient pas compatibles avec une ſeule anomalie. Car premierement, puiſque les deux aphélies n'avancent pas également, l'angle $\rho - \sigma$ ſera variable, & partant les excentricités apparentes K & L changeront continuellement, d'où il reſulte une variation perpétuelle dans l'équation elliptique des deux Planètes.

Le mouvement annuel de l'aphélie de Jupiter ayant été trouvé de $60''$, & celui de Saturne de $64''$ par rapport aux équinoxes, l'angle $\rho - \sigma$ décroît tous les ans de $4''$. Or en 1700 il étoit $\rho - \sigma = 6^s, 15°, 27'$ donc puiſque cet angle décroît chaque année de $4''$, ſon coſinus, qui eſt négatif croîtra, ou le terme $cof.(\rho - \sigma)$ à ſoutraire dans les formules trouvées pour KK & LL deviendra plus grand. Par conſéquent les excentricités apparentes tant de Jupiter que de Saturne vont en décroiſſant, & partant auſſi leurs équations du centre.

Cette diminution de l'excentricité ayant été miſe hors de doute dans la piece, qui à remporté le prix ſur cette queſtion, à l'égard de Saturne, je crois, que je me puis diſpenſer de démontrer plus amplement

ce merveilleux accord de la Théorie de Newton avec l'expérience.

Mais la diminuation de l'excentricité, qui découle de ma Théorie eſt auſſi fort bien d'accord avec celle, que M. Euler a conclue uniquement des obſervations, car la méthode qu'il a ſuivie n'étoit pas capable de lui découvrir les changemens de l'excentricité. Pour faire voir ce bel accord; que $d\rho$ & $d\sigma$ marquent les accroiſſemens annuels de la longitude des aphélies, & dK & dL les accroiſſemens des excentricités apparentes K & L; & nous aurons en différentiant:

$$dK = -\frac{bkl(d\rho - d\sigma)\,\mathrm{ſin.}(\rho - \sigma)}{K}$$

$$dL = -\frac{\alpha kl(d\rho - d\sigma)\,\mathrm{ſin.}(\rho - \sigma)}{L}$$

d'où poſant $d\rho - d\sigma = -4''$, il s'enſuit

$dK = -0,14886.4b''$ & $dL = -0,12592.4\alpha''$

Or, la plus grande équation elliptique de l'une & de l'autre orbite étant à-peu-près $2K$ & $2L$, on aura la diminution annuelle de la plus grande équation elliptique. Poſant $\alpha = \frac{5}{4}$, & $b = \frac{1}{2}$.

de Jupiter	de Saturne
$= 0,592''$	$= 1,258''$

Donc la plus grande équation de Jupiter décroit tous les ans de $35'''$, & celle de Saturne de $1'', 15'''$, or au lieu de celle-ci, M. Euler a trouve $1'' 5'''$, ou $11''$ en 10 ans. Or on conviendra aiſement, qu'il eſt abſolument impoſſible d'éviter une erreur de $10'''$ tant dans la théorie, que dans la pratique.

On remarquera de plus, que cette diminution n'eſt pas conſtante, puiſqu'elle eſt proportionelle au ſinus de l'angle $\rho - \sigma$, & parce que cet angle devient inſenſiblement plus petit, la diminution mentionnée va en décroiſſant. Mais puiſque le changement de l'angle $\rho - \sigma$ ne monte à un degré, que dans l'eſpace de 900 ans, on peut, ſans aucune erreur ſenſible, regarder cette diminution comme uniforme.

Par la même méthode on pourra auſſi déterminer le mouvement annuel de l'aphélie apparent tant de Jupiter que de Saturne; car marquant ce mouvement annuel par les différentielles dR & dS, on aura par la différentiation.

$$dR = \frac{kk\,d\rho + bbll\,d\sigma + bkl(d\rho + d\sigma)\,cof.(\rho - \sigma)}{KK}$$

$$dS = \frac{ll\,d\sigma + \alpha\alpha kk\,d\rho + \alpha kl(d\rho + d\sigma)\,cof.(\rho - \sigma)}{LL}$$

& ces formules ſe changent dans celles-ci:

$$dR = \tfrac{1}{2}(d\rho + d\sigma) - \tfrac{1}{2}(d\sigma - d\rho)\,\frac{kk - bbll}{KK}$$
$$= 62'' - 7,4736''$$

$$dS = \tfrac{1}{2}(d\rho + d\sigma) + \tfrac{1}{2}(d\sigma - d\rho)\,\frac{ll - \alpha\alpha kk}{LL}$$
$$= 62 + 6,4522''$$

Donc l'aphélie de Jupiter avancera chaque année de $55''$ & celui de Saturne avancera chaque année de $68''$ ce qui approche déja d'avantage du mouvement marqué dans les Tables Aſtronomiques de M. Caſſini.

§. IX.

§. IX.

Du tems périodique des Planètes de Jupiter & de Saturne, & de leurs distances moyennes au Soleil.

Les grands termes, que j'ai trouvés dans l'article VII, qui dépendent de l'angle $\omega - r + s$, se réduisent à l'angle $\rho - \sigma$, posant ρ pour la longitude de l'aphélie de Jupiter, & σ pour celle de l'aphélie de Saturne, où il faut entendre les aphélies vrais, & non pas les apparens. Donc les longitudes vraies de Jupiter & de Saturne π & θ renfermeront ces termes dépendans de l'angle $\rho - \sigma$.

$$\pi = \text{Prec.} + 51450\, k\, l\, \sin.(\rho - \sigma)$$
$$\theta = \text{Prec.} + 51780\, k\, l\, \sin.(\rho - \sigma)$$

où l'on voit d'abord que la valeur de ces termes, réduite en degré, deviendroit horriblement grande.

Mais quelque grande que soit cette valeur, il est certain que si l'angle $\rho - \sigma$ demeuroit constant, il n'en résulteroit aucun dérangement dans le mouvement des Planètes, puisque la valeur de ces termes seroit détruite par l'addition des quantités constantes, que l'intégration des formules $d\pi - dp$, & $d\theta - dq$ exige.

Ces termes n'entrent donc en considération, qu'entant que l'angle $\rho - \sigma$ est variable. Or nous venons de voir que cet angle décroît chaque année de $4''$; donc si la valeur de ces termes à été détruite en 1700

par l'addition des conſtantes, on aura pour l'année ſuivante 1701, à cauſe de $\rho - \sigma = 6^{s}, 15'', 27'''$

$$\left.\begin{array}{l} \pi = \text{Prec.} - 4''.51450\, k\, l\, cof.(\rho - \sigma) \\ \theta = \text{Prec.} - 4''.51780\, k\, l\, cof.(\rho - \sigma) \end{array}\right\} = \text{Prec.} + 5355''.$$

Et partant ſi la même quantité accroiſſoit après chaque année, après un eſpace de n années depuis l'époque 1700, la longitude des Planètes devroit être avancée de $5355\ n$ ſecondes. Or cette quantité ne troubleroit pas non plus le mouvement régulier des Planètes, puiſqu'elle ne fait que diminuer d'une quantité conſtante leurs tems périodiques, qui étant une fois bien établis par les obſervations, ce terme n'y apporteroit plus de changement.

Mais puiſque cet accroiſſement annuel de $5355''$ ne demeure pas toujours le même, vu qu'il depend de l'angle $\rho - \sigma$, on voit qu'après un grand nombre d'années, il doit ſouffrir un changement conſidérable. En effet on trouvera qu'après neuf ſiécles où l'angle $\rho - \sigma$ ſera diminué d'un degré, cet accroiſſement annuel devient $= 5355'' + 25''$; ou l'accroiſſement depuis l'année 2600 juſqu'à l'année 2601 ſera de $5380''$. Donc après un intervalle de n ans depuis l'époque 1700 l'accroiſſement de la longitude ne ſera plus $= 5355\ n''$, mais on le trouvera $= 5355\ n'' + \frac{1}{70} n\, n''$, & encore plus exactement $= 5355\ n'' + \frac{1000\, n\, n''}{96803} - \frac{n^3\, ''}{2989900}$.

Or comme le premier terme ne fait que diminuer les tems périodiques d'une quantité conſtante, ſi nous ſuppoſons que le mouvement moyen des deux Planètes ait été bien réglé pour l'année 1700, les longitudes moyennes qu'on en tire pour tout autre tems ne

ſeront plus juſtes, mais à l'année $1700 + n$, il faudra ajouter à la longitude moyenne $\frac{1000\,n\,n}{69853} - \frac{n^3}{2989900}$ ſecondes, & cette correction ſera la même pour Jupiter & Saturne.

Correction des longitudes moyennes de Jupiter & de Saturne, calculée ſur le mouvement moyen de l'année 1700.

L'an	ajoutez.	L'an	ajoutez.	Avant l'Ere Chr. L'an	ajoutez.
1700	0′ 0	1700	00 0′ 0″	0	11° 57′ 16″
1710	0 1	1600	0 2 24	100	13 25 56
1720	0 6	1500	0 9 36	200	14 59 58
1730	0 13	1400	0 21 38	300	16 39 25
1740	0 23	1300	0 38 33	400	18 24 19
1750	0 36	1200	1 0 23	500	20 14 41
1760	0 52	1100	1 27 9	600	22 10 33
1770	1 10	1000	1 58 53	700	24 11 58
1780	1 32	900	2 35 38	800	26 18 58
1790	1 56	800	3 17 26	900	28 31 34
1800	2 23	700	4 6 18	1000	30 49 48
1810	2 53	600	4 56 36	1100	33 13 43
1820	3 26	500	5 53 23	1200	35 43 21
1830	4 2	400	6 55 41	1300	38 18 43
1840	4 41	300	8 3 11	1400	40 59 51
1850	5 23	200	9 15 55	1500	43 46 48
1860	6 8	100	10 33 56	1600	46 39 35
1870	6 56	0	11 57 16	1700	49 38 15

Nous voyons donc que le mouvement moyen de deux Planètes devient continuellement plus rapide, ou que leurs tems périodiques diminuent; & que cela eſt l'effet de l'action mutuelle de ces deux Planètes.

Mais puiſque cet effet dépend de l'angle $\rho - \sigma$, on comprend qu'il pourroit être tout contraire, & qu'il le ſera effectivement après environ 150 ſiécles. Par conſéquent il faut bien diſtinguer cette diminution des tems périodiques, de celle qui pourroit être cauſée par la réſiſtance de l'ether, s'il y en a une.

On remarquera auſſi, que pour bien connoître le mouvement moyen de ces deux planètes par les obſervations, la méthode ordinaire, où l'on compare les obſervations de notre tems avec les plus anciennes, n'eſt pas ſûre, puiſqu'elle ne nous découvre ni le mouvement moyen, qui ſubſiſte à préſent, ni celui qui a ſubſiſté au tems des anciennes obſervations, mais plutôt un certain milieu.

Mais par le moyen de la table que je viens de donner, on peut profiter de toutes les obſervations pour en conclure le vrai mouvement moyen pour un tems propoſé. Car ſi l'on veut comparer une obſervation faite l'an 100 avec une de l'an 1700, il faut retrancher 10° 33′ 56″ de la longitude obſervée en 100, & alors la comparaiſon de ce lieu corrigé avec le lieu obſervé en 1700, nous donnera le mouvement moyen pour l'année 1700.

C'eſt ſans doute la raiſon pourquoi les Aſtronomes ſont ſi peu d'accord ſur le mouvement moyen de ces deux Planètes. Car ſi l'on compare le mouvement moyen ſéculaire des Tables de M. Caſſini avec celui des Tables angloiſes publiées par Leadbetter, on aura

	de Jupiter	de Saturne
Caſſini	5ˢ, 6°, 21′, 30″	4ˢ, 23°, 29′, 28″
Leadbetter	5, 6, 28, 11,	4, 23, 6, 0.

Il en eſt de même de l'excentricité apparente de ces deux Planètes; car puiſqu'elle eſt variable, comme j'ai fait voir, il n'eſt pas ſurprenant, que les tables aſtronomiques ne ſoient pas d'accord ſur cet article.

Or puiſque le tems périodique de nos deux Planètes eſt variable, leurs diſtances moyennes au Soleil le ſeront auſſi, ce qui vaudra la peine examiné plus ſoigneuſement. Or conſidérant l'angle $\omega - r + s$, ou $\rho - \sigma$ comme conſtant, nous aurons

$$f = \frac{4-3m}{2m}(kk+bbll) + 3bkl\,cof.(\rho-\sigma)$$

$$g = -\frac{(4-m)}{2m}(ll+\alpha\alpha kk) + 3\alpha kl\,cof.(\rho-\sigma)$$

& ces valeurs étant ſubſtituées dans les termes conſtans que fourniſſent les équations *differentio*-différentielles, donneront

$$\frac{1+\mu}{c^3} = 1 + 0,12018\,\gamma + \frac{3(2-m)}{2m}kk+bbll) + 6bkl\,cof.(\rho-\sigma)$$

$$\frac{1+\nu}{nne^3} = 1 - 1,31005\,\mu - \frac{3(2-m)}{2m}(ll+\alpha\alpha kk) + 6\alpha kl\,cof.(\rho-\sigma)$$

Le terme $cof.(\rho-\sigma)$ étant négatif & devenant après chaque révolution plus grand, il ſemble que les valeurs de $\frac{1+\mu}{c^3}$ & $\frac{1+\nu}{nne^3}$ vont en diminuant, & partant les diſtances moyennes mêmes c & e en augmentant, pendant que les tems périodiques décroiſſent, ce qui ſeroit une abſurdité manifeſte. Or il faut ſe ſouvenir, que j'ai pris l'unité pour marquer la diſtance moyenne d'une orbite planetaire, dont le tems périodique dans la ſimple hypothèſe de Kepler ſeroit égal

au vrai tems périodique de Jupiter. Donc puiſque ce tems eſt variable, il eſt évident que la variabilité du terme $cof.(\rho - \sigma)$ marque plutôt la variabilité de notre unité, que celle des diſtances c & e. Car poſant a au lieu de cette unité, pour marquer la diſtance moyenne dans l'hipothèſe ſimple de Kepler, qui convient au tems périodique de Jupiter, il faudra écrire au lieu de $\frac{1+\mu}{c^3}$ & $\frac{1+\nu}{nne^3}$ ces formes $\frac{(1+\mu)a^3}{c^3}$ & $\frac{(1+\nu)a^3}{nne^3}$ de ſorte que la diminution ſucceſſive cauſée par le terme $cof.(\rho - \sigma)$, nous marquera la diminution de la quantité a; ce qui eſt très-conforme à la théorie.

Mais il eſt à remarquer qu'il n'eſt pas permis d'introduire dans la valeur des quantités conſtantes f & g le terme $cof.(\rho - \sigma)$, en tant qu'il eſt variable, puiſque ſa variabilité doit être plutôt rangée aux termes variables de nos formules. Et la valeur de $cof.(\rho - \sigma)$, pouvant changer de $+1$ à -1, ſa valeur moyenne ſera $= o$, d'où l'on voit que la lettre a, ou l'unité que j'ai miſe à ſa place, doit marquer la diſtance moyenne qui convient dans l'hypothèſe de Kepler, au terme périodique de Jupiter lorſque l'angle $\rho - \sigma$ eſt aux $90°$, ou de 2700. Mais les lettres c & e marqueront des quantités conſtantes, comme la nature du calcul l'exige, or les vraies diſtances x & y, en tant qu'elles dépendent de la variabilité de $\rho - \sigma$, ſeront

$$x = c\left(1 - \frac{(2-3m)b}{m} k\, l\, cof.(\rho - \sigma)\right)$$

$$y = e\left(1 + \frac{(2+m)}{m} \alpha\, k\, l\, cof.(\rho - \sigma)\right)$$

Maintenant nous ſommes en état de déterminer le changement, que les diſtances des Planètes au Soleil ſubiſſent, en tant qu'elles dépendent uniquement de

l'angle $\rho - \sigma$ ou du tems périodique, ou plutôt du mouvement moyen, qui convient, aux Planètes à chaque tems propoſé. Or quiſque $2 > 3m$, nous voyons que la diſtance de Jupiter au Soleil va en augmentant, & celle de Saturne en diminuant, quoique le mouvement moyen de l'un & de l'autre s'accélere, ou que leurs tems périodiques deviennent plus petits.

Or, pour ce qui regarde la valeur de notre unité, qui repond au mouvement moyen que Jupiter aura lorſque l'angle $\rho - \sigma$ deviendra $= 90°$, ou $= 270°$, il ſera aiſé de la trouver par ce que j'ai rapporté au commencement de cet article. Car ſoit Q le mouvement moyen annuel de Jupiter lorſque $cof.(\rho - \sigma) = o$, & ſon mouvement annuel moyen ſera pour l'année $1700 = Q + 5355''$, qui eſt, ſuivant les obſervations $= 109238''$; d'où il s'enſuit $Q + 103883'' = 28° 51' 23''$. Donc dans le tems où $cof.(\rho - \sigma) = o$, le mouvement moyen annuel de Jupiter eſt $28° 51' 23''$, & c'eſt conformement au tems périodique qui répond à ce mouvement moyen, qu'il faut déterminer la valeur de notre unité a. Poſant donc la diſtance moyenne de la terre au ſoleil $= 100000$, puiſque la diſtance moyenne de Jupiter au Soleil eſt conclue conformément au mouvement moyen qu'il tient à préſent $= 520098$, la valeur de notre unité ſera $= 520098 \left(\frac{109238''}{103883''}\right)^2 = 537821$. Enſuite l'excentricité ne changeant rien dans la diſtance moyenne, ou la moitié du grand axe de l'orbite, ſi nous prénons c & e pour marquer les demi-grands axes des orbites de Jupiter & de Saturne en tant qu'ils ſont altérés par l'action mutuelle des Planètes, nous aurons:

$$c = 537821 \sqrt[3]{\frac{1+\mu}{1+0,12018}}$$

$$c = \frac{517821}{\sqrt[3]{nn}} \sqrt[3]{\frac{1+\nu}{1-1,3005\mu}}$$

Puiſque l'angle $\rho - \sigma$ eſt à préſent 6^s 15° 27′, & qu'il diminue tous les ans de 4″, il aura été de 9^s, avant 67100 ans, & alors le mouvement moyen annuel de Jupiter à été 28° 51′ 23″, & celui de Saturne 10° 43′ 15″. A préſent le mouvement moyen annuel de Jupiter eſt 30° 20′ 38″, & celui de Saturne 12° 13′ 30″. Or après 13900 ans le mouvement moyen annuel de Jupiter ſera 30° 23′ 58″, & de Saturne 12° 16′ 0″, mais après 94900 ans celui de Jupiter redevient 28° 51′ 23″, & de Saturne 10° 43′ 15″; or après 175900 ans le mouvement moyen annuel de Jupiter ſera 27° 18′ 48″, & de Saturne 9° 10′ 50″; & alors leur mouvement ſera le plus lent; après il ſera derechef accéléré, & après l'eſpace de 324000 années il redeviendra le même qu'il eſt aujourd'hui.

Comme la révolution de ces variations ne s'acheve que dans l'eſpece de 324000 ans, on comprendra aiſément qu'il ſeroit poſſible, que ce tems devint infini, ou que les variations allaſſent toujours ou en croiſſant, ou en décroiſſant: & que cette circonſtance dépend de la valeur des quantités μ & ν. Dans ce cas il eſt évident, que les inégalités ne ſauroient plus être exprimées par des ſinus, ou coſinus des angles, & c'eſt préciſement le cas qu'on rencontre lorſque la valeur de b devient imaginaire, comme j'ai remarqué ci-deſſus.

Puiſque la valeur de b eſt devenue effectivement imaginaire, ayant poſé $\mu = \frac{1}{1067}$ & $\nu = \frac{1}{3021}$, & que pour éviter les angles imaginaires, qui ſe reduiroient à des quantités exponentielles réelles, j'ai changé tant ſoit

ſoit peu les valeurs de μ & ν, il s'enſuit que ſi ces valeurs de μ & ν étoient juſtes, les variations, que je viens de développer, ne rétourneroient jamais au même état, mais qu'elles iroient à l'infini. Et ſi ce cas avoit actuellement lieu dans la nature, je dois avouer, que je ſerois bien éloigné de la réſolution de la queſtion propoſée, & que je ne vois pas même encore de quelle méthode on devroit ſe ſervir pour déterminer toutes les variations, que ces deux Planètes ſouffriroient dans tous les ſiécles à venir.

Mais comme il ne s'agit que de leur mouvement qu'elles ſuivent pendant le cours d'un petit nombre de ſiécles, je me flatte que ma méthode eſt parfaitement bonne; car puiſque je n'ai changé que fort peu la valeur des lettres μ & ν dans la détermination de b, cette différence ne ſauroit produire une erreur ſenſible dans un eſpace de quelques ſiécles, quoique l'erreur, qui en reſulteroit pour un tems infini, pût devenir infinie.

Par cette raiſon je n'ai pas héſité de préſenter ma méthode à l'examen de l'illuſtre Académie Royale, d'autant plus qu'elle m'a conduit à la découverte de cette importante circonſtance, par laquelle nous voyons, que ce probleme eſt beaucoup plus difficile, qu'il n'auroit pû paroître au commencement, & qu'il pourroit même devenir impoſſible à réſoudre par aucun eſprit humain, ſi les orbites de ces deux Planètes étoient plus proches entr'elles, ou que leurs maſſes fuſſent plus grandes. Mais dans l'état où ces deux Planètes ſe trouvent, il me ſemble que la recherche de leur mouvement eſt encore en quelque ſorte proportionnée aux bornes de nos lumieres, pourvu qu'on ne veuille pas ſe hazarder d'étendre ces recherches ſur un trop grand nombre de ſiécles.

Il eſt à-peu-près de même de cette queſtion, que de celle ſur les inégalités de la Lune, car quoiqu'on ſoit aſſez heureuſement venu à bout de cette recherche, tous ceux qui ont travaillé ſur cette matiere ſeront obligés d'avouer, qu'il ſeroit poſſible que nous ne fuſſions en état de découvrir preſque rien à l'égard de ſon mouvement. Car ſi la Lune étoit quelque fois plus éloignée de la terre, qu'elle n'eſt actuellement, ou ſi l'excentricité de ſon orbite étoit plus grande qu'elle n'eſt, ou enfin ſi l'inclinaiſon de ſon orbite ſur l'écliptique étoit plus grande, je doute fort, qu'aucun homme eût aſſez de pénétration pour découvrir les inégalités de ſon mouvement. Or on conviendra qu'une telle diſpoſition de la Lune auroit été auſſi bien poſſible, que celle où elle ſe trouve actuellement. Il ſemble donc que le Créateur a voulu tellement arranger ces objets de nos recherches, qu'ils ne ſurpaſſent pas entiérement nos forces, de ſorte que nous en puiſſions approcher de plus en plus, à meſure que nous avançons dans les ſciences, ſans pourtant que nous fuſſions jamais en état de les atteindre parfaitement. C'eſt, à mon avis, par cette raiſon, que les Planètes ne ſe meuvent pas ſelon les regles de Kepler, car alors nous ſerions depuis long tems au bout de nos recherches à l'égard du mouvement des corps céleſtes.

§ X.

Des autres inégalités, qui ſe trouvent dans le mouvement des Planètes de Jupiter & de Saturne.

DE ce que je viens d'expoſer on eſt en état de déterminer le mouvement moyen de ces deux Planètes

pour chaque année, pourvu que ce tems ne ſoit pas trop éloigné de notre ſiécle, ou que l'intervalle du tems ne monte pas à pluſieurs milliers d'années, puiſque alors mes formules ſe pourroient trop écarter de la vérité. En ſecond lieu nous ſommes en état de marquer pour chaque année propoſée le lieu de l'aphélie apparent de l'une & de l'autre Planète, ſachant de combien l'un & l'autre aphélie avance par an, ſavoir celui de Jupiter de $55''$, & celui de Saturne de $68''$. En troiſieme lieu nous pouvons déterminer pour chaque année propoſée l'excentricité apparente des deux orbites, ayant trouvé que la plus grande équation elliptique de Jupiter décroît par an de $35'''$, & celle de Saturne de $1'', 15'''$. Donc quand on aura déterminé par les obſervations pour une époque fixe tant les longitudes moyennes de ces deux Planètes que leur mouvement moyen pour ce tems, le lieu de leurs aphélies apparens & leur excentricité, on connoîtra ces mêmes élémens pour tout autre tems, & partant on ſera en état de dreſſer des tables, qui marqueront l'équation elliptique de ces deux Planètes, en ſe ſervant de la ſolution du probleme de Kepler dans ce calcul. Or ces tables calculées tant pour les diſtances des Planètes au Soleil, que pour leurs longitudes, renfermeront déja tous les termes de nos formules trouvées ci-deſſus, qui ne contiennent pas ouvertement les lettres μ & ν, & outre cela encore les termes, qui dépendent des multiples de leurs anomalies, que je n'ai pas même développé dans le calcul pour l'excentricité de Saturne, ayant déja prévu dans le calcul de l'excentricité de Jupiter, que les termes $A\,k\,k\,cof.\,2\,r$, $a\,k\,k\,cof.\,\omega$, $K\,k\,k\,(\omega - r)$, $f'\,k\,k\,(2\omega - 2r)$, $a'\,k\,k\,cof.\,\omega$. $K'\,k\,k\,cof.\,(\omega - 2r)$, & ceux qui renfermeroient de plus hautes puiſſances de k ſe réduiſent tous à l'équation elliptique calculée ſur l'excentricité apparente,

& ſur le lieu apparent de l'aphélie, de ſorte qu'il ſeroit ſuperflu de chercher ſoigneuſement ces termes.

Donc après l'équation elliptique, nous n'aurons à conſidérer que les termes qui dépendent ouvertement de l'une au l'autre des petites quantités μ & ν, qui ſont de deux eſpeces, l'une qui eſt indépendante des excentricités, & qui donne la variation des deux Planètes, & l'autre qui depend outre cela de l'une de ces excentricités. J'ai d'abord au commencement développé les inégalités de la premiere eſpece, mais je le répéterai ici, puiſque le calcul ſuivant y a apporté quelque petite correction. Donc nous aurons pour les diſtances, ayant bien fixé, ſuivant l'article précédent, les diſtances moyennes c & e

$$\frac{x}{c} = 1 + \text{l'éq. ellipt.} + 0{,}43472\,\nu\cos.\omega - 0{,}19440\,\nu\cos.3\omega - 1{,}88047\,\nu\cos.2\omega - 0{,}05047\,\nu\cos.4\omega$$

$$\frac{y}{c} = 1 + \text{l'éq. ellipt.} + 0{,}90959\,\mu\cos.\omega + 0{,}03572\,\mu\cos.3\omega + 0{,}15435\,\mu\cos.2\omega + 0{,}01116\,\mu\cos.3\omega$$

où il y aura:

$$c = 537821\left(1 - \frac{(2-3m)\,b}{m}\,k\,l\cos.(\rho-\sigma)\right)\sqrt[3]{\frac{1+\mu}{1+0{,}12018\,\nu}}$$

$$e = \frac{537821}{\sqrt[3]{n\,n}}\left(1 + \frac{(2+m)}{m}\,\alpha\,k\,l\cos.(\rho-\sigma)\right)\sqrt[3]{\frac{1+\nu}{1-1{,}31005\,\mu}}$$

Or les longitudes ſeront:

$$\eta = p + \text{l'éq. ellipt.} - 1{,}34665\,\nu\sin.\omega + 0{,}27615\,\nu\sin.3\omega + 3{,}34343\,\nu\sin.2\omega + 0{,}06193\,\nu\sin.4\omega$$

$$\theta = q + \text{l'éq. ellipt.} + 0{,}02035\,\mu\sin.\omega - 0{,}03365\,\mu\sin.3\omega - 0{,}16222\,\mu\sin.2\omega - 0{,}00990\,\mu\sin.4\omega$$

Par-là

Par-là on aura déja les lieux des Planètes corrigés tant par leur vraye équation elliptique, que par la variation. Mais pour les autres inégalités qui reſtent encore, on aura pour les diſtances:

$$\frac{x}{e} = \text{Prec.} + F\,k\,cof.(\omega - r) + G\,k\,cof.(\omega + r) + E\,l\,cof.\,s + H\,k\,cof.(2\omega - r) + I\,k\,cof.(2\omega + r) + L\,l\,cof.(\omega - s) + N\,l\,cof.(2\omega - s) + O\,l\,cof.(2\omega + s)$$

$$\frac{y}{e} = \text{Prec.} + E'\,k\,cof.\,r + G'\,k\,cof.(\omega + r) + L'\,l\,cof.(\omega - s) + H'\,k\,cof.(2\omega - r) + I'\,k\,cof.(2\omega + r) + M'\,l\,cof.(\omega + s) + N'\,l\,cof.(2\omega - s) + O'\,l\,cof.(2\omega + s)$$

& les valeurs de ces coëfficiens ſe tirent des égalités, que les équations différentielles nous ont fournies précédemment, deſorte que de ce côté il n'y a aucune difficulté.

Or pour les longitudes v & θ, il faut ajouter aux valeurs déja données, premierement les termes trouvés dans l'article V, & enſuite les termes rapportés dans l'article VI, à l'exception des deux membres marqués d'une étoile * pour ces derniers, puiſque ceux-ci ſont déja compris dans l'équation elliptique, deſorte qu'on aura alors toutes les inégalités qui paroiſſent de quelque conſéquence; car il eſt clair que le nombre de toutes les inégalités monte actuellement à l'infini.

Mais pour le calcul de ces coëfficiens, outre que

les valeurs des lettres m, n, c, e, $\varkappa$, λ, α & b ſont connues, il faut principalement remarquer que les lettres k & l ne marquent pas les excentricités apparentes, ou celles qu'on conclut immédiatement des obſervations, mais plutôt les excentricités vraies, que j'ai conclues des apparentes, enſorte qu'il ſoit:

$$k = 0,13595, \qquad \& \; l = 0,19840.$$

Enſuite pour les anomalies r & s il ne faut pas prendre non plus celles qui ſe rapportent aux aphélies apparens, mais celles auxqu'elles conduiſſent les lieux des aphélies vrais, que j'ai fixés pour l'epoque 1700, celui de Jupiter à $5^s\ 6^o\ 12'$, & de Saturne à $10^s\ 20^o\ 45'$. Donc puiſque la longitude de l'aphélie apparent de Jupiter pour la même époque eſt $6^s\ 9^o\ 27''$, & de Saturne $8^s\ 28^o\ 9'$, il ſera aiſé de déduire les anomalies véritables r & s, dont il faut ſe ſervir dans ces dernieres inégalités, des anomalies apparentes, qu'on tire des lieux des aphélies apparens, en ſoutraiant la longitude de l'aphélie de celle de la Planète. Car pour Jupiter on aura:

ſon anomalie veritable r = à l'anomalie apparente

$$+ 43^o\ 15'$$

& pour Saturne on aura:

ſon anomalie veritable s = à l'anomalie apparente

$$- 52^o\ 36'$$

D'où l'on voit que les valeurs de ces dernieres inégalités deviendront tout autres, que ſi l'on y employoit les anomalies apparentes. Il n'y a donc aucun doute, que de cette maniere on approchera beaucoup plus de la vérité; puiſqu'on voit par la Piece de M. Euler ſur cette matiere, qu'en ſe ſervant des anomalies apparentes, de quelques maniere qu'on détermine les

coëfficiens des termes pour le calcul de Saturne $\mathit{fin.}\, r$, $\mathit{fin.}\,(\omega - s)$, $\mathit{fin.}\,(\omega + s)$, $\mathit{fin.}\,(2\omega - s)$, $\mathit{fin.}\,(2\omega - r)$, $\mathit{fin.}\,(2\omega + s)$, on ne ſauroit jamais tellement ſatisfaire aux obſervations, que le calcul ne s'en écarte quelquefois de pluſieurs minutes.

Enfin quoique les lettres r & s ne marquent ni les anomalies moyennes, ni les excentriques, ni les vraies, mais une nouvelle eſpece d'anomalies telles, que leurs différentielles dr & ds ſoient à la différentielle $d\omega$ dans un rapport conſtant, on peut pourtant ſans aucune erreur, prendre à volonté pour r & s les anomalies moyennes, ou excentriques, ou vraies, qui réſultent des aphélies vrais. Car quoique ces anomalies puiſſent différer entr'elles de quelques degrés, il n'en reſultera pas dans les inégalités, qui en découlent, une différence ſenſible. Car, quelque ſoit l'anomalie, qu'on voudroit introduire dans le calcul on trouveroit toujours pour ces termes les mêmes coëfficiens; & la différence ne paroîtroit que dans les termes ſuivans, qui contiendroient les doubles ou triples des anomalies r & s. Or puiſque nous avons négligé ces termes à cauſe de leur petiteſſe, il eſt clair, qu'il eſt indifférent, de quelle eſpece d'anomalie on voudra ſe ſervir.

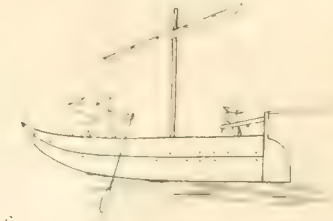
Je crois que j'ennuyerois mes Juges, ſi je voulois calculer en nombres tous ces coëfficiens, vû que le calcul en déviendroit exrrêmement long & pénible. Car puiſqu'on eſt à préſent tout à fait convaincu que toutes les inégalités qui ſe peuvent trouver dans le mouvement des corps celeſtes, ſont parfaitement d'accord avec le principe de l'attraction univerſelle établi par le grand Newton, en vertu duquel tous les corps céleſtes s'attirent mutuellement en raiſon directe de leurs maſſes, reciproque du quarré de leurs diſtances; il ne s'agit pas tant à mon avis, de produire des formules, qui

ſatisfaſſent aux obſervations, que de découvrir plutôt les inégalités, qui ſont conformes à la théorie; & dès qu'on eſt aſſuré, qui ces inégalités ſuivent néceſſairement de la théorie, on ne ſauroit plus douter de leur accord avec l'expérience. Pour preuve de cela la Lune nous ſert d'exemple; l'on ſait maintenant, que plus le calcul, qu'on fait ſur cette Planète, eſt conforme à la théorie, plus auſſi il ſatisfait aux phénomenes. Or je me flatte, que la méthode dont je me ſuis ſervi dans cette recherche, eſt tellement naturelle & conforme à la théorie, qu'on ne ſauroit douter de la vérité des conſéquences, qu'elle m'a fournies, d'autant plus que le mouvement de l'aphélie, & la diminution de l'excentricité apparente, qu'aucune autre méthode ne ſauroit même à peine decouvrir, eſt parfaitement d'accord avec les obſervations. Cependant je ſouhaiterois bien comparer mon calcul avec des obſervations, ſi j'en pouvois trouver d'aſſez exactes, & même faites dans un aſſez long intervalle de tems; mais comme c'eſt une choſe qui m'eſt impoſſible, je me vois obligé de borner mes recherches à ce que mes lumieres m'ont permis de conclure de la théorie ſur la Queſtion propoſée.

Fin du N°. 2. 1752.

Maniere de suppléer à l'action du Vent, par M.r Bernoulli

Figure 1re



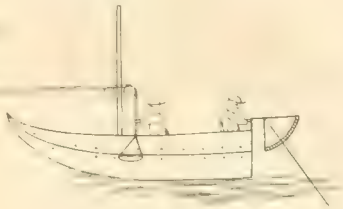
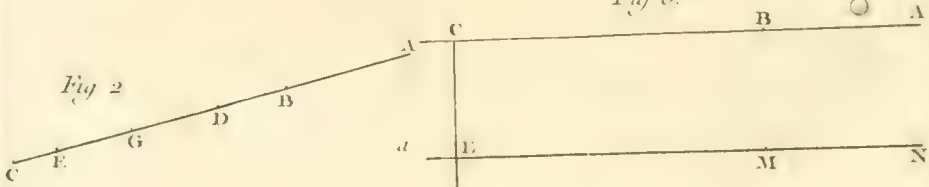
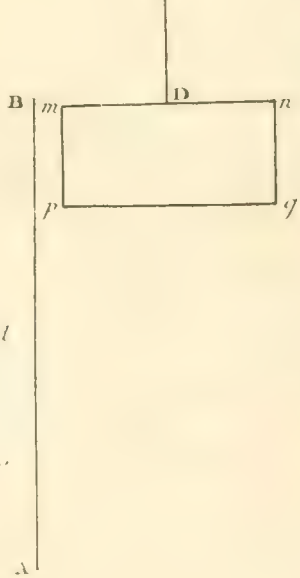


Fig 3.





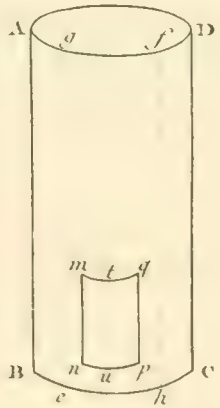


Fig. 5.

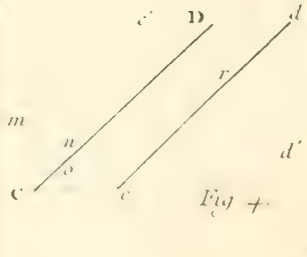
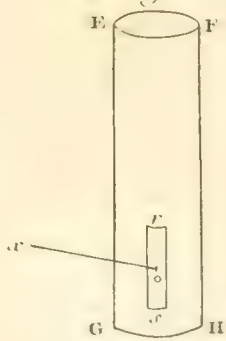


Fig 4.



Prix de 1783.

RECHERCHES

Sur la maniere la plus avantageuſe de ſuppléer à l'action du Vent ſur les grands Vaiſſeaux, ſoit en y appliquant les Rames, ſoit en y employant quelqu'autre moyen que ce puiſſe être.

FONDÉES

Sur une nouvelle Théorie de l'économie des forces & des effets.

Piéce qui a remporté le Prix propoſé par l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, pour l'année 1753.

Par M. DANIEL BERNOULLI, *Profeſſeur de Phyſique à Bâle, & Aſſocié Etranger de l'Académie Royale des Sciences.*

RECHERCHES

Sur la maniere la plus avantageuſe de ſuppléer à laction du Vent ſur les grands Vaiſſeaux, ſoit en y appliquant les Rames, ſoit en y employant quelqu'autre moyen que ce puiſſe être.

FONDÉES

Sur une nouvelle Théorie de l'économie des forces & de leurs effets.

Quærendi initium ratio attulit; cum eſſet ipſa ratio confirmata quærendo.

Cic. Acad. Quæſt. IV. 26.

PREMIERE PARTIE.

I.

La mécanique des rames eſt d'une nature ſi ſinguliere que perſonne n'a encore démontré la proportion qu'il y a entre les forces mouvantes qu'on y emploie & l'effet qui en réſulte; c'eſt cependant un article qui

eſt aſſez facile dans preſque toutes les machines, & c'eſt en même tems l'article le plus eſſentiel pour notre ſujet. Il s'agit ſans doute de connoître, avant toute autre choſe, ſi dans l'uſage des rames, les forces mouvantes ſont toutes utilement employées pour mettre un navire en mouvement, ou ſi une partie conſidérable de ces forces ſe perd en produiſant des effets inutiles & différents de celui qu'on ſe propoſe. Dans le premier cas, l'uſage des rames eſt le plus avantageux, & on ne doit pas eſpérer d'imaginer jamais rien de préférable; mais dans le ſecond cas, il ne faut pas renoncer à l'eſpérance de pouvoir ou perfectionner l'uſage des rames, ou leur ſubſtituer d'autres moyens plus avantageux. Mais un tel examen demande premierement une théorie ſur les forces de l'homme, & en ſecond lieu une connoiſſance exacte des forces abſolument & indiſpenſablement réquiſes pour faire ſingler un navire avec une certaine vîteſſe uniforme.

II.

Quand je parle des forces de l'homme je n'entens point ici, comme dans le langage ordinaire, ces forces par leſquelles on tient en équilibre de certaines réſiſtances telles que ſeroit de tenir ſurpendu un certain poids, ou d'excercer une certaine preſſion; ce ſont-là des forces mortes; il eſt queſtion ici des forces vives, que l'homme produit pendant ſon travail; on doit toujours eſtimer le travail abſolu d'un homme par la preſſion qu'il exerce, par la vîteſſe de ſon point d'appui & par le tems. La ſeule conſidération du levier, auquel ſe réduiſent toutes les machines, ſuffit pour voir cette vérité; il faut cependant avouer que la fatigue de l'homme, qui eſt la ſeule choſe qu'il faille conſidérer, n'eſt pas toujours exactement pro-

portionnelle à ſon travail pris dans le ſens que nous venons de lui donner. Un homme pourra, par exemple, enlever une réſiſtance de vingt livres avec une vîteſſe de trois pieds par ſeconde, & continuer ce travail pendant pluſieurs heures de ſuite; mais il ne s'enſuit pas qu'il puiſſe enlever quatre livres avec une vîteſſe de quinze pieds par ſeconde, cela ſeroit tout-à-fait impoſſible à l'homme; peut-être pourroit-il bien enlever une réſiſtance de dix livres avec une vîteſſe de ſix pieds; mais il eſt ſûr qu'il s'en trouveroit beaucoup plus fatigué au bout d'une heure, que s'il n'avoit employé que la moitié de cette vîteſſe avec un effet double. Cette remarque doit apprendre aux Mécaniciens qui s'appliquent à imaginer des machines qui doivent être miſes en mouvement par le travail des hommes, à mettre une telle proportion entre leurs parties, que les travaux de ces hommes ſe faſſent avec des vîteſſes & des efforts qui leur ſoient le plus naturels.

III.

La remarque que je viens de faire ne doit pas nous empêcher de ſuppoſer les fatigues proportionnelles aux travaux tels que nous les avons déterminés, puiſque moyennant une juſte proportion entre les parties de la machine, on peut faire que la vîteſſe & la preſſion de chaque homme ſoient conſtamment les mêmes, & que toute la différence conſiſte à employer plus ou moins de tems au même travail, & qu'on ne ſçauroit douter que dans ces circonſtances les fatigues doivent être cenſées proportionnelles aux tems. Mais je dis bien plus, un grand nombre d'expériences m'ont appris que nonobſtant une grande inégalité entre les vîteſſes, les fatigues ne laiſſent pas de ſuivre la raiſon compoſée de la preſſion, de la vîteſſe & du tems, pourvu qu'on ne

donne pas à ce principe une trop grande étendue, & qu'on ne ſorte pas hors de certaines limites. Si un homme peut enlever une réſiſtance de vingt livres avec trois pieds de viteſſe, il pourra auſſi y enlever une réſiſtance de ſoixante livres avec un pied de viteſſe, ou trente livres avec une viteſſe de deux pieds; ou quinze livres avec une viteſſe de quatre pieds, & même douze livres avec une viteſſe de cinq pieds, & tout cela ſans ſe fatiguer ni plus ni moins. Il ſemble que la nature ait preſcrit aux animaux une certaine conſervation de forces naturelles pareille à celle qu'on connoit aux forces vives produites par la peſanteur naturelle, tant que les animaux ne paſſent pas les limites de leur économie naturelle. C'eſt ici une vérité de fait admirable. En voici une autre, que nous devons admirer bien davantage.

IV.

Nous n'avons encore conſidéré que l'effet d'une même eſpece de travail exercé avec plus ou moins de viteſſe; mais les hommes peuvent ſubir une infinité d'eſpeces de travail. Dans chaque différente eſpece il y aura une combinaiſon différente des muſcles que les hommes feront agir: les efforts qu'ils feront ſeront toujours d'une nature différente; cependant j'ai remarqué qu'avec des fatigues égales, les hommes font conſtamment des effets à-peu-près égaux; je m'en rapporte aux Mécaniciens qui ſçauront faire un juſte calcul des effets produits moyennant le travail des hommes employé d'une façon quelconque. Je ſuis ſi perſuadé de cette vérité, que je n'ai pas héſité d'en rechercher l'explication tirée de l'économie animale, & il m'a paru la trouver, en ſuppoſant que la fatigue eſt cauſée par la perte qu'on fait d'eſprits animaux qui pro-

duiſent le mouvement des muſcles ; & que de quelque façon que les eſprits animaux agiſſent ſur les muſcles, ils doivent être conſidérés comme de petits reſſorts bandés, qui ſe débandent au moment de leur activité ; or, c'eſt la nature des reſſorts de produire conſtamment la même force vive de quelle maniere qu'on leur permette d'employer leur efficace ; & comme on meſure l'effet d'un certain travail par la quantité des forces vives qu'on a produites, ſoit réelles, ſoit potentielles, il s'enſuit qu'une fatigue égale, comme cauſée par la même dépenſe d'eſprits animaux, produit un effet égal dans toutes les eſpeces de travail. L'économie animale ne fournit qu'une certaine quantité d'eſprits animaux pendant chaque jour, & c'eſt cette quantité d'eſprits animaux qui ſera la meſure de tout ſon travail journalier poſſible, tant en fonctions animales qu'en fonctions vitales. J'eſtime tout le travail journalier poſſible d'un homme d'une force & d'une taille moyennes à pouvoir élever 172800 livres à la hauteur d'un pied chaque jour, ſans apporter du préjudice à ſa ſanté ; & je fonde cette eſtime ſur un grand nombre d'obſervations. Quant aux fonctions vitales, il ſeroit bien difficile de l'évaluer avec autant de juſteſſe ; il n'y a que le travail du cœur, qu'on peut déterminer aſſez exactement, puis qu'on ſçait qu'il fait environ 115200 battemens dans un jour, qu'il pouſſe environ deux onces de ſang dans chaque ſyſtole, & que les obſervations & expériences de Mr. Hales ſemblent prouver que le ſang ſoit jetté hors du cœur avec une viteſſe à pouvoir s'élever à la hauteur d'environ huit pieds ; ce n'eſt-là que l'effet du ventricule gauche, celui du ventricule droit en ſera environ le quart, & on pourra eſtimer le travail journalier du cœur égal à celui d'élever 144000 livres à la hauteur d'un pied, ce qui fait la douziéme partie de ce que l'on peut ap-

peller le travail journalier d'un homme. J'eſtime le travail des muſcles qui ſervent à la reſpiration plus grand ; & quand on conſidére qu'il ne ſe fait, ſelon toutes les apparences, aucune fonction animale ſans le concours & la coopération des nerfs & des eſprits animaux, il eſt à préſumer que la nature a deſtiné les eſprits animaux dans une proportion à-peu-près égale aux mouvemens vitaux néceſſaires & aux mouvemens volontaires.

V.

Nous pourrons donc ſuppoſer, que tous les hommes d'une conſtitution égale ſeront également fatigués après avoir fait des effets égaux, de quelle maniére que ces différens hommes ayant été employés ; mais il ſemble encore que la conſtitution des hommes puiſſe être extrêmement différente, ſans que leurs travaux journaliers, dont ils ſont capables pendant un grand nombre de jours de ſuite, ſoient conſidérablement différens. Tel homme charnu & vigoureux pourra peut-être faire trois ou quatre fois plus de travail pendant quelques heures de tems, qu'un autre décharné & d'une conſtitution beaucoup plus foible ne pourra faire dans un tems égal ; mais ſi chacun de ces deux hommes ſi différens en vigueur, étoit appliqué pendant un grand nombre de jours de ſuite à une même ſorte de travail juſqu'à ſe fatiguer également, je doute ſi leurs effets ſeroient fort inégaux. Cette vérité ſe manifeſte aſſez clairement dans les bêtes. C'eſt ſans doute parce que l'économie animale ne ſçauroit permettre de faire une plus grande dépenſe journaliere en eſprits animaux, que ce qu'elle lui fournit de nouveau chaque jour, & qui vraiſemblablement n'eſt pas fort différente dans les hommes ou dans les animaux d'une même eſpece.

VI.

Ces remarques paroîtront peut-être bien étrangeres pour notre ſujet, mais la ſuite fera voir qu'elles ſont très-eſſentielles, & telles qu'elles nous feront voir quel eſt le plus grand effet poſſible qu'on puiſſe tirer du travail des hommes pour la navigation, & juſqu'où l'uſage des rames s'en approche. Mais il faudra auparavant nous engager dans une autre diſcuſſion; c'eſt ſur les effets que les hommes peuvent produire par leurs travaux.

VII.

L'effet de travail peut & doit toujours être réduit à une certaine quantité de forces vives, quoique ces forces vives puiſſent avoir des apparences tout-à-fait différentes: elles peuvent pourtant toutes être réduites à une certaine maſſe élevée à une certaine hauteur verticale. Ces deux articles multipliés enſemble feront conſtamment la meſure de la force vive provenue d'un certain travail; ſi ce travail étoit employé à donner continuellement à de nouveaux corps un certain degré de mouvement horizontal, il n'y auroit qu'à voir quelle eſt la hauteur verticale à la quelle ces corps pourroient s'élever avec leur vîteſſe imprimée, & on aura auſſi-tôt leur force vive ſous la forme deſirée: ſi le travail conſiſtitoit à bander des reſſorts, il faudroit examiner à quelle hauteur ces reſſorts pourroient jetter une certaine maſſe en ſe debandant. Quand on ne fait que tirer horizontalement un corps qui ſouffre un certain frottement, ce frottement fait le méme effet que s'il s'agiſſoit de bander continuellement de nouveaux petits reſſorts; enfin l'effet du travail ſera toujours équivalent

à celui de lever une certaine maſſe à une certaine hauteur, & cet effet ſe montrera preſque toujours ſous les quatre formes que je viens d'indiquer.

VIII.

Examinons à préſent quelle eſt la plus grande quantité de force vive que l'homme puiſſe produire dans un certain tems ſans s'épuiſer. Il n'y a que l'expérience qui puiſſe décider cet article; mais il faut bien diſtinguer pluſieurs différens cas. Un homme appliqué tous les jours à un certain travail, & chaque jour pendant huit heures de tems, pourra, à mon avis, élever vingt livres à la hauteur de trois pieds à chaque ſeconde, ou bien ſoixante livres à la hauteur d'un pied; cela fera 172800 livres à la hauteur d'un pied pendant huit heures de tems. J'ai adopté ce réſultat ſur un grand nombre d'obſervations, & avec toute la circonſpection requiſe; j'ai vu des cas, où l'homme faiſoit trois fois plus d'effet pendant chaque ſeconde, mais il n'auroit pû ſoutenir ce travail que pendant quelques minutes de ſuite. Si on ne vouloit impoſer aux hommes que quatre heures de travail par jour, je crois qu'on pourroit leur donner la tâche d'élever chacun 120 livres à un pied de hauteur à chaque ſeconde de travail. Cependant le partage le plus conforme à la conſtitution de l'homme eſt, à mon avis, celui de huit heures de travail par jour, & je ſuppoſerai que les rameurs ſoient deſtinés à cette fatigue,

IX.

On remarquera donc que tout homme appliqué à un tel travail qu'il puiſſe ſoutenir pendant huit heures chaque jour, fera un effet équivalent à celui d'éle-

ver ſoixant livres à la hauteur d'un pied par ſeconde ; du moins ce ſera là l'effet moyen quand ce travail ſera fait par pluſieurs hommes. Mais le plus ſouvent le travail eſt employé en grande partie à des effets inutiles, & c'eſt-là le ſeul article eſſentiel à éviter ; on n'a qu'à ſatisfaire à cette ſeule condition pour être aſſuré d'avoir employé le meilleur moyen qu'il étoit poſſible pour exécuter l'ouvrage qu'on ſe propoſoit ; & dès-lors il ne faut plus entreprendre d'y ajoûter le moindre degré de perfection. Cette réflexion nous conduit d'abord à cette grande & principale maxime : *Que dans tout ouvrage qu'on ſe propoſe il faut commencer par examiner quel eſt l'effet eſſentiellement & néceſſairement attaché à cet ouvrage, effet qui ſoit inévitable par la nature même de l'ouvrage, & éviter enſuite autant qu'il eſt poſſible tout autre effet.*

X.

Pour nous conformer à cette regle, nous rechercherons quel eſt l'effet eſſentiellement & néceſſairement requis, quand on ſe propoſe d'entretenir un navire dans un cinglage uniforme ; or un navire ne ſauroit faire chemin ſans donner aux eaux un mouvement qu'elles n'avoient point ; nous conſidérerons ce ſeul effet comme eſſentiel & inévitable, en faiſant abſtraction de la réſiſtance de l'air, & en ſuppoſant les eaux comme n'ayant aucune ténacité ſenſible, ce que les expériences phyſiques confirment aſſez bien ; encore cet effet n'eſt-il eſſentiel que dans un certain ſens, puiſqu'il n'eſt pas ſûr qu'il ſoit impoſſible de mettre à profit le mouvement qu'on avoit imprimé aux eaux : ainſi, par exemple, ſi on avoit un tuyau d'une largeur uniforme réplié en cercle & rentrant en ſoi-même, tout rempli d'eau, on voit qu'un globe du même

diametre, que celui du tuyau, pourroit ſe mouvoir dans le tuyau, ſans imprimer jamais le moindre mouvement nouveau aux eaux; je nomme donc ledit effet eſſentiel, que parce que je n'entreprendrai pas de l'éviter ni en tout ni en partie; & je ne crois pas que perſonne s'aviſe de l'entreprendre. C'eſt donc le mouvement qu'on eſt obligé d'imprimer continuellement aux eaux, qui cauſe ce qu'on appelle la réſiſtance des fluides & c'eſt uniquement dans la production de ce mouvement, que doit être employé le travail des hommes, tout autre effet étant en pure perte.

XI.

Pour bien traiter notre ſujet, il nous faudroit ici une théorie parfaite ſur la réſiſtance des fluides, théorie que je n'eſpere pas qu'on parvienne jamais à découvrir, parce qu'il ſera toujours impoſſible de déterminer exactement le nouveau mouvement qu'on produit à chaque inſtant dans chaque goutte d'eau, & d'en tirer la nouvelle petite force vive; c'eſt cette nouvelle force vive dans les eaux produites à chaque moment par le mouvement du vaiſſeau, qui donne la preſſion du vaiſſeau contre les eaux, ou la réſiſtance des eaux contre le vaiſſeau, & elle eſt en même tems l'effet eſſentiel du travail des rameurs. Ne pouvant donc partir de cette ſource, nous nous contenterons de la théorie connue ſur la réſiſtance des fluides, d'autant plus qu'elle eſt aſſez conforme à une infinité d'expériences qu'on à faites ſur ce ſujet Nous ſuppoſerons en particulier que la réſiſtance directe des eaux contre une ſurface plane eſt égale au poids d'un priſme d'eau, dont la baſe ſeroit ladite ſurface plane, & la hauteur celle qui répond à la vîteſſe du plan; c'eſt à-dire, de laquelle un corps tombant librement acquiere ladite vîteſſe.

XII.

Sur ces hypothèſes, qui me ſont communes avec tous les Phyſiciens & Géometres, jexaminerai ce qui arrive à un certain navire cinglant avec une certaine vîteſſe. Après avoir ſubſtitué à la ſurface de la proue une ſurface plane d'une égale réſiſtance, je ſuppoſerai que cette ſurface plane contienne autant de pieds quarrés qu'il y a d'unités en n, & je nommerai a la hauteur verticale génératrice de la vîteſſe du navire; je ſuppoſerai qu'un pied cube d'eau peſe 70 livres, & j'exprimerai ladite hauteur a en pieds. Ces dénominations & ſuppoſitions donnent le poids du priſme d'eau qui marque la réſiſtance contre le navire $= 70\,n\,a$ livres; Il ſuit de-là qu'on peut ſubſtituer au travail requis pour ce cinglage un autre qui ſera tout-à-fait le même, & dont on connoît immédiatement l'effet; c'eſt celui qu'on auroit ſi un poids de $70\,n\,a$ livres étoit attaché à un cordeau qui paſſât ſur une poulie beaucoup plus haute que le poids, & qu'on tirât horizontalement l'autre bout du cordeau avec la même vîteſſe que celle du navire; or l'effet d'une telle action eſt d'élever un poids de $70\,n\,a$ livres avec une vîteſſe qu'un corps acquiert en tombant de la hauteur a. Il n'eſt donc plus queſtion que de ſçavoir combien de pieds un mobile peut parcourir dans une ſeconde de tems avec ladite vîteſſe; on ſçait par les élemens de la mécanique que ce nombre de pieds eſt $= 2\sqrt{15a}$, en ſuppoſant qu'un corps tombant librement fait 15 pieds dans la premiere ſeconde, quoique cette hauteur ſoit plus grande d'environ un pouce. Ainſi tout l'effet du cinglage en queſtion eſt $= 140\,n\,a\sqrt{15a}$; c'eſt-là auſſi le travail eſſentiellement requis. Si on veut exprimer cet effet immédiatement par la vîteſſe du vaiſſeau, on pourra ſuppo-

ſer que le vaiſſeau fait dans une ſeconde de tems autant de pieds qu'il y a d'unités en c & puis faire $2v15\bar{a} = c$ ou bien $a = \frac{cc}{60}$, après quoi le travail eſſentiel requis pour le cinglage en queſtion, ſera $= \frac{7}{6} n c$, ce qui veut dire qu'il y faut autant de travail qu'il y en auroit à élever à chaque ſeconde à la hauteur d'un pied autant de livres qu'il y a d'unités en $\frac{7}{6} n c^3$.

XIII.

Cette derniere formulue nous apprend que les travaux eſſentiels pour faire aller un navire plus ou moins vîte, ſont en raiſon cubique des vîteſſes. Ainſi donc quand on ſeroit parvenu à employer utilement toutes les forces, il foudroit un travail 8 ou 27 fois plus grand pour donner au navire une vîteſſe double ou triple, & réciproquement les vîteſſes obſervent la raiſon des racines cubiques des travaux utilement employés. Cela fait qu'on gagne beaucoup ſur le travail en perdant peu ſur la vîteſſe. Il n'étoit pas difficile de prévoir ce théoreme, puis qu'une vîteſſe double donne une réſiſtance quadruple qu'il faut enlever avec une vîteſſe double; ce qui donne l'idée d'un travail 8 fois plus grand.

XIV.

La formule $\frac{7}{6} n c^3$, qui marque le travail eſſentiel & indiſpenſablement requis, nous donne d'abord à connoître une choſe qu'il eût été bien difficile de déterminer en partant d'autres principes; c'eſt de ſçavoir, en conſéquence des loix que la nature a preſcrites aux forces de l'homme & de leurs limites, quel eſt le plus petit nombre d'hommes poſſible pour fournir audit travail pendant 8 heures par jour; ou bien quel ſeroit le

nombre d'hommes réquis pour un tel travail, en ſuppoſant qu'ils ne fiſſent aucune perte dans la maniere d'employer leurs forces; c'eſt-à-dire, que tout leur travail fût utilement employé ſans faire aucun autre effet que celui qu'il n'eſt pas poſſible d'éviter, & qui conſiſte à donner continuellement une nouvelle force vive aux eaux que le navire parcourt. Pour répondre à cette queſtion, on n'a qu'a diviſer la formule $\frac{7}{6} n c^3$, par 60 (§. 8.). Si nous dénotons donc ledit nombre d'hommes par N nous aurons cette équation.

$$N = \frac{7}{360} n c^3.$$

En convertiſſant cette équation, on obtient

$$c = \sqrt[3]{\frac{360N}{7n}}$$

Laquelle derniere équation marque quelle eſt la plus grande vîteſſe poſſible qu'un certain nombre d'hommes puiſſent donner à un certain navire, & qu'ils lui donneroient réellement, s'ils étoient employés d'une maniere à ne faire aucune perte de leurs forces, ou à excercer leurs forces toutes utilement; c'eſt-à-dire, s'ils ne faiſoient aucun autre effet que celui qui eſt inſéparable d'avec le cinglage.

XV.

Nous voici donc en état de décider ſi dans l'uſage des rames on employe utilement toutes les forces que les rameurs exercent, ou bien ſi une partie conſidérable en eſt détournée par des effets, que le cinglage ne renferme pas eſſentiellement, & qui par conſéquent doivent être cenſés inutilement produits. Dans le premier cas l'uſage ordinaire des rames n'admet aucune

correction, tout changement ſeroit dangereux, il ne pourroit qu'être nuiſible, ſans pouvoir jamais être profitable ; mais dans le ſecond cas il reſte quelque eſpérance ſoit de perfectionner l'uſage des rames, ſoit d'imaginer quelqu'autre moyen plus profitable ou moins défectueux. Pour décider cette queſtion, il faut connoître trois choſes ; 1° le nombre des rameurs, que nous avons nommé N ; 2° le nombre des pieds que le bâtiment fait dans une ſeconde de tems indiqué par c, & facile a déterminer par expérience ; & 3° le nombre des pieds quarrés compoſant la ſurface plane d'une réſiſtance égale à celle de la proue du bâtiment, nombre que nous avons déſigné par n ; c'eſt ce dernier nobre qui me fait encore quelque peine, faute d'obſervations ou d'expériences ſuffiſamment détaillées ; je crois cependant pouvoir le déterminer en quelque façon pour les galeres, auxquelles je me propoſe d'appliquer cette théorie.

XVI.

M. Chazelles, dans les Mémoires de l'Académie pour l'année 1702, nous en fournit une deſcription & des remarques qui nous mettent aſſez en état de nous ſatisfaire là-deſſus : voici les circonſtances qui nous intéreſſent. La Chiourme étoit de 260 hommes, qui ramoient tous à la fois ; M. Chazelles a remarqué que la galere voguant de la plus grande force à pouvoir durer longtems en calme (ce qui fait préciſément le cas que nous conſidérons), a fait 72 toiſes par minute, ou $7\frac{1}{5}$ pieds par ſeconde ; ces circonſtances rendent $N = 260$ & $c = 7\frac{1}{5}$. Voici à préſent les circonſtances rapportées par M. Chazelles, que je conſidére pour en tirer en quelque façon la valeur n. La ſurface réunie de toutes les pales étoit de 130 pieds quarrés. La Chiourme

Chiourme faiſoit 24 palades dans une minute de tems, & ainſi chaque palade duroit $2\frac{1}{2}$ ſeconde ; mais une palade étant compoſée de trois mouvemens, deſquels il n'y a qu'un ſeul qui pouſſe les pales contre les eaux, il n'y a que ce ſeul mouvement à conſidérer ; & j'ai remarqué que ſi on connoiſſoit exactement le petit tems de ce mouvement, on en pourroit conclure aſſez au juſte la réſiſtance de la galere, & par conſéquent la valeur n ; mais j'ai remarqué auſſi qu'une très-petite faute dans l'eſtime de ce petit tems devient très-conſidérable pour le réſultat que nous cherchons. Nous embraſſerons d'abord notre queſtion dans toute ſon étendue, c'eſt pourquoi je nommerai T, le tems entier de chaque palade, que nous avons vu être de $2\frac{1}{2}$ ſecondes, & t tout le tems qu'on employe pendant l'action de pouſſer les pales contre les eaux ; en ce cas il eſt évident qu'on peut ſubſtituer à l'action interrompue des rameurs qui pouſſent une ſurface de 130 pieds quarrés, celle de pouſſer continuellement & ſans aucune interruption un plan de $\frac{t}{T} \times 130$ pieds quarrés, mais avec la même vîteſſe. Je crois cependant que la ſurface de 130 pieds quarrés demande quelque diminution ; car outre que les rameurs ne ployent peut-être pas entiérement les pales, ils pouſſent les pales dans une direction qui n'eſt ni parfaitement parallele à la quille, puiſqu'ils font un arc de cercle, ni parfaitement horizontale ; ce qui paroît aſſez par leur manœuvre, ni parfaitement perpendiculaire au plan des pales. Toutes ces raiſons, & quelques autres, m'engagent à ſubſtituer 100 pieds quarrés aux 130. M. Chazelles dit enſuite que la partie intérieure de la rame avoit douze pieds, la partie extérieure 24 pieds, la pale 5 pieds de longeur, & que le vogue-avant faiſoit un mouvement de 6 pieds dans le tems t qu'on

doit exprimer en ſeconde ; ainſi la vîteſſe de ce mouvement répondoit à $\frac{6}{t}$ pieds par ſeconde.

Il s'agit a préſent de ſçavoir dans quel endroit il faut placer le centre deffort des pales contre les eaux ; on pourroit ſe contenter de le placer au milieu des pales, c'eſt-à-dire à $21\frac{1}{2}$ pieds de diſtance depuis l'apoſtis : mais comme c'eſt-ici une queſtion purement géométrique & facile à réſoudre, en prenant la ſomme des efforts de chaque élément de la pale, il vaudra ſans doute mieux de déterminer géométriquement ce centre d'effort pour des pales d'une largeur uniforme telles qu'on à coutume de les faire ; voici le réſultat de cette ſolution.

Soit la vîteſſe de l'extrêmité intérieure de la rame $= c$ la vîteſſe de la galere $= v$, la longueur de la partie intérieure de la rame $= a$; la diſtance entre l'apoſtis, & le commencement de la pale $= b$; la longeur de la pale $= d$, la diſtance cherchée du centre des efforts depuis l'apoſtis $= \lambda$, je dis qu'on aura

$$\lambda = \frac{v}{c}a + a\sqrt{\frac{a}{3a}} \times \left[\left(\frac{b+d}{a} - \frac{v}{c}\right)^3 - \left(\frac{b}{a} - \frac{v}{c}\right)^3\right].$$

Dans cette équation il faudra faire $v = 7\frac{1}{5}$, $a = 12$, $b = 19$, $d = 5$.

$$\lambda = \frac{432}{5c} + 12\sqrt{\frac{4}{5}}\left[\left(2 - \frac{36}{5c}\right)^3 - \left(\frac{19}{12} - \frac{36}{5c}\right)^3\right]$$

Sur cette équation je me propoſe d'examiner deux cas ; le premier ſera celui de ſuppoſer chaque palade compoſée de trois tems égaux, ce qui fera $t = \frac{1}{3}T = \frac{1}{6}$ ſecondes, pendant lequel petit tems le vogue-avant appliqué, l'extrêmité intérieure de la rame fait ſix pieds ; de maniere qu'il faudra faire $c = 7\frac{1}{5}$, d'où l'on tire pour ce cas

$$\lambda = 12 + 12\sqrt{\frac{1108}{1728}} = 21,608.$$

Le ſecond cas conſiſtera à ſuppoſer $t = \frac{1}{7} T$ car comme le mouvement de pouſſer les pales contre les eaux eſt le ſeul qui ſouffre une grande réſiſtance, il eſt à préſumer qu'il ſe fait un peu plus lentement que les deux autres employés ſimplement à ſoulever & puis à porter les pales en avant, dans cet exemple nous aurons $t = 1$ ſec. & par conſéquent $c = 6$ pieds, ce qui fait

$$\lambda = 21, 537.$$

Ce n'eſt donc pas la valeur de λ, quoique la formule en ſoit fort compliquée, qui puiſſe jetter quelque doute conſidérable ſur notre queſtion. Reprenons à préſent notre queſtion dans toute ſa généralité, nous aurons la vîteſſe du centre des efforts relative à la galere pendant que les rameurs pouſſent les pales contre les eaux $= \frac{\lambda}{a} c$ & cette vîteſſe relative aux eaux devient $= \frac{\lambda}{a} c - v$; Or le quarré de cette vîteſſe multiplié par la ſurface de toutes les pales diminué autant que l'interruption du plongement des pales, & quelques autres raiſons expoſées le demandent, eſt égal au quarré de la vîteſſe de la galere, multipliée par le plan que nous cherchons, & que nous nommerons s; cette conſidération nous donne $s = \left(\frac{\frac{\lambda}{a} c - v}{v}\right)^2 \times \frac{t}{T} \times 100$, dans laquelle équation la quantité $\frac{t}{T} \times 100$ marque la ſurface de toutes les pales reduites au cas d'agir ſans interruption & diminuées en raiſon 130, à 100, à cauſe de pluſieurs petites obliquités dans le mouvement des pales & de quelques autres raiſons. Cette équation un peu mieux rangée donne

$$s = \left(\frac{\lambda c}{av} - s\right)^2 \times \frac{t}{T} \times 100.$$

Sur cette équation nous chercherons la valeur de s pour les deux cas mentionnés ci-deſſus. Dans le *premier* cas nous avons ſuppoſé $\frac{t}{T} = \frac{1}{3}$, ce qui fait $c = 7\frac{1}{5}$ & $\lambda = 21,608$; dans le *ſecond* cas nous avons ſuppoſé $\frac{t}{T} = \frac{2}{3}$, ce qui fait $c = 6$ & $\lambda = 21,537$; pendant que dans l'un & l'autre cas il faut faire $a = 12$ & $v = 7\frac{1}{5}$: toutes ces ſubſtitutions nous donnent pour le cas $s = 21,37$ & pour le ſecond $s = 9,82$. Cette grande diverſité entre les valeurs de s eſt uniquement provenue de ce que dans le *premier* cas nous avons ſuppoſé $\frac{t}{T} = \frac{1}{3}$ & dans le *ſecond* $\frac{t}{T} = \frac{2}{3}$.

M. Bernoulli, dans ſon Hydrodynamica a pareillement examiné cette même queſtion, & il trouve à la fin pag. 301 que la réſiſtance de la galere étoit égale au poids de $13\frac{1}{3}$ pieds cubiques d'eau, ce qui donneroit $s = 15,74$. Mais quoique ce nombre ait aſſez de vraiſemblance, & que j'approuve ſa méthode, il me paroît qu'il n'a pas aſſez peſé toutes les circonſtances, on voit même que ſa mémoire l'a trompé à l'égard de la longeur des rames, qu'il ne fait que de 18 pieds. Erreur cependant qui influe très-peu ſur ſa méthode. M. Euler, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, pour l'année 1747 pag. 204, a encore conſidéré le même exemple, mais il n'a fait dans cet endroit que ſuivre le ſentiment de ſon compatriote, prenant ſans doute la queſtion pour trop-peu déterminée, & ne voulant pas l'examiner par lui-même.

Enfin, M. Bouguer, dans ſon Traité du Navire, pag. 116, ſuppoſe pour les galeres pareilles à celles de M. Chazelle $s = 10$ pieds quarrés ; mais il faut avouer que ce n'étoit que ſur une ſimple eſtime qu'il s'eſt déterminé ſur ce nombre, ne faiſant attention

qu'au peu de profondeur, & à la grande ſaillie de la carene; & nous voyons aſſez par ce que cet illuſtre auteur nous dit lui-même, pag. 419, combien ces ſortes d'eſtimes peuvent être trompeuſes, puiſqu'il dit qu'il penſoit que pour un grand vaiſſeau de guerre du premier rang, ce plan pouvoit être reduit à 77 pieds quarrés, & que l'ayant examiné par ſa méthode de réſoudre la ſurface de la partie antérieure de la caréne en pluſieurs triangles, il avoit trouvé ce plan le double de ce qu'il avoit penſé. Si M. Bouguer, s'étoit ſervi de la même méthode pour les galeres, je nécouterois plus abſolument que le ſuffrage d'un auſſi grand poids.

Après tout je ſuppoſerai $s = 16$ pieds quarrés en attandant qu'on détermine ce plan avec plus de préciſion par des expériences.

XVII.

Si nous ſuppoſons donc $c = 7\frac{1}{2}$ (je reprends ici les dénominations que j'ai faites avant le 16me §) & $n = 16$ (on remarquera que dans la digreſſion du § 16, j'ai ſubſtitué aux lettres c & n, les lettres v & s, qui ont dans cette digreſſion la même ſignification que c & n dans les articles précédens) nous aurons $N = \frac{7}{3^{6}5} nc^{3} = 116$, d'où il ſuit que 116 hommes ſuffiroient pour entretenir une telle galere dans un ſinglage à faire $7\frac{1}{5}$ pieds par ſeconde, ſi ces hommes pouvoient être employés pour cet effet d'une maniere à ne faire aucune perte de leur forces; or il y a eu 260 rameurs, nous devons donc conclure, que ces rameurs n'ont employé que $\frac{116}{260}$ parties de leur travail utilement, & que les $\frac{144}{260}$ parties du travail ont été employées inutilement en produiſant des effets qui ne ſont pas eſſentiellement renfermés dans le cinglage, c'eſt environ $\frac{1}{9}$ de

perte, & ce réſultat nous laiſſe eſpérer de pouvoir tirer un plus grand parti du travail des hommes pour le cinglage des navires.

XVIII.

Examinons auſſi quelle eſt la plus grande vîteſſe poſſible que 260 hommes puiſſent donner à la galere en queſtion, en ſuppoſant qu'ils ne faſſent aucune perte de leurs forces; c'eſt la ſeconde équation du § 14 ſavoir $c = \sqrt[3]{\frac{360N}{7n}}$ qui nous apprend cette plus grande vîteſſe poſſible, & qui nous la donne de 9, 42. Il n'eſt donc pas poſſible que 260 hommes donnent à la galere une plus grande vîteſſe que celle de faire $9\frac{2}{3}$ pieds par ſeconde, de quelle maniere qu'ils emploient leur travail, il eſt cependant poſſible d'y atteindre; ainſi la derniere vîteſſe poſſible ne ſurpaſſe la vîteſſe actuelle obſervée par M. Chazelles, que d'environ $2\frac{1}{3}$ pieds par ſeconde, & la vîteſſe actuelle faiſoit plus que les trois quarts de toute la vîteſſe poſſible, d'où nous voyons qu'une grande perte de forces n'entraine qu'une perte très médiocre du côté de la vîteſſe; c'eſt que les forces augmentent en raiſon cubique des vîteſſes.

XIX.

Si au lieu de $n = 16$ pieds quarrés, on vouloit ſuivre l'hypotheſe de M. Bouguer, en ſuppoſant $n = 10$, la quantité du travail utilement employée en deviendroit plus petite en raiſon de 16 à 10; on trouvera $N = 72\frac{1}{2}$ & on en conclurra une perte de $\frac{187\frac{1}{2}}{269}$ du travail de la chiourme; une telle perte me paroît moins vraiſem-

blable, & c'eſt une raiſon qui m'a fait préférer la ſuppoſition de $n = 16$. Je ſuis ſurpris qu'on ne ſe ſoit pas appliqué avec plus de ſoin à connoître ces plans pour toutes ſortes de bâtimens, qui influent ſi fort ſur un grand nombre de queſtions-très utiles pour la navigation. Voici la maniere que je crois la plus commode, & la plus ſûre de connoître ce plan pour tel bâtiment que l'on veut. On amarrera ce bâtiment à un autre, qui allant à voiles, tirera le premier après ſoi avec la même vîteſſe; la corde par laquelle on attache les deux bâtimens ſera longue, afin que le bâtiment entraîné ne ſouffre rien du ſillage de l'autre, ou du mouvement des eaux cauſé par le bâtiment antérieur: un bout de la corde paſſera ſur une poulie verticale & parallele à la quille, & on attachera à ce bout de la corde un baſſin pour y mettre des poids, pendant que l'autre bout eſt attaché fixement à l'autre bâtiment; on mettra d'abord aſſez de poids ſur le baſſin pour l'empecher de s'élever, juſqu'à ce que le tout ſoit réduit à un état de permanence; après quoi on diminuera peu-à-peu le poids, juſqu'à ce que le baſſin commence à s'élever un peu, pendant qu'un autre obſerve exactement la vîteſſe des bâtimens. Si le frottement de la poulie étoit aſſez grand pour mériter quelque attention, il ſera facile de corriger le poids qu'on aura obſervé. De cette maniere on connoîtra exactement la force qui tire le bâtiment avec une certaine vîteſſe. Si ledit poids augmenté de celui du baſſin, eſt exprimé en livres, dont le nombre ſoit P, on aura $n = \frac{n P}{7 c c}$ ainſi ſuppoſant la vîteſſe c de 4 pieds par ſeconde, & P de 250 livres, le plan cherché ſera de $13\frac{1}{28}$ pieds quarrés. De cette façon on apprendra en même tems, s'il eſt vrai que les réſiſtances ſoient parfaitement en raiſon quarrée des vîteſſes, ou ſi cette regle a beſoin de

quelque correction, principalement pour les corps d'une auſſi grande ſurface, tels que ſont les grands vaiſſeaux.

XX.

Il me paroît tellement néceſſaire de partir de nos principes, pour bien traiter la queſtion propoſée par l'Académie, que n'étant pas entiérement ſûr des réſultats que nous à fourni l'exemple des galéres, j'ai voulu m'en éclaircir par l'examen de quelques nouvelles experiences & obſervations faites ſur des petits bateaux auxquels deux rameurs donnent ordinairement une vîteſſe à faire $4\frac{1}{2}$ pieds par ſeconde.

Nous avons choiſi deux de ces bateaux aſſez égaux, & nous les avons attachés enſemble de la façon décrite dans le précédent article; nous avons placé à la poupe du ſecond bateau entraîné par le premier, un quart de cercle, pour obſerver continuellement l'inclinaiſon d'un fil, auquel il y avoit attaché une boule plongée dans l'eau, & nous nous étions bien aſſurés que cette inclinaiſon nous donnoit aſſez au juſte les différentes vîteſſes. La figure premiere fera aſſez voir tout le procédé de nos expériences; on remarquera d'abord ici que les rameurs placés dans le premier bateau étoient obligés de ſurmonter la réſiſtance des deux bateaux que nous ſuppoſons égaux, & que le poids mis dans le baſſin du ſecond bateau, joint a celui du baſſin, marque la réſiſtance du ſeul ſecond bateau; enſorte que le double de ce poids total exprime la réſiſtance des deux bateaux conſidérés comme un ſeul. Quand on pouſſoit les pales contre les eaux, le baſſin chargé montoit un peu & redeſcendoit dans les intervalles, il n'étoit pas difficile d'augmenter ou de diminuer les poids, de maniere que les élévations du baſſin devinſſent égales aux deſcentes

Fig. I.

tentes, & dans cette diſpoſition nous avons pris le poids du baſſin chargé, que nous nommerons poids total, pour la meſure de la réſiſtance d'un ſeul bateau. Il eſt vrai que pendant toutes ces expériences & obſervations, nous remarquâmes preſque continuellement pluſieurs petites inégalités, qui provenoient de l'inégalité dans l'action des rameurs, & il étoit facile de commettre quelque petite faute dans le poids total du baſſin, mais ſurtout dans l'obſervation de l'inclinaiſon du fil qui devoit marquer les vîteſſes des bateaux. C'eſt ce qui m'a engagé à conſidérer attentivement toutes les circonſtances, & à corriger un peu, ſuivant les circonſtances, les réſultats des vîteſſes, quand j'ai vu clairement qu'il faloit le faire; mais ces changemens n'ont jamais été que très-légers. Je dois me louer ici des offices d'un ami pour l'exécution de ces expériences, mais j'eſpére qu'on me diſpenſera de le nommer dans une occaſion comme celle-ci.

XXI.

Voici à préſent de toutes les expériences celles qui pourront nous ſervir pour notre ſujet.

I. Deux rameurs mis dans le premier bateau ont donné aux deux bateaux, en employant leur forces ordinaires, une vîteſſe de 3, 50 pieds par ſeconde, & le poids total du baſſin chargé étoit alors de 90 onces ou de $5\frac{10}{16}$ livres.

Je prendrai, pour pluſieurs raiſons, cette premiere expérience, pour celle qui ait été faite avec le plus d'attention & de juſteſſe, & je corrigerai dans les ſuivantes les vîteſſes obſervées, ſuivant la regle que les réſiſtances ſont en raiſon quarrée des vîteſſes.

II. Les deux mêmes rameurs avertis d'employer un peu plus de force, ont donné au bateau la vîteſſe de 3, 80, & le poids total étoit de 100 onces; la vîteſſe corrigée ſuivant ladite regle devient = 3, 69.

III. Les deux rameurs exhortés à ramer plus vigoureuſement juſqu'à donner au bateau la vîteſſe 4, 00, ont ſoutenu un poids de 122 onces, la vîteſſe corrigée devient = 4, 07.

IV. Les deux rameurs faiſant force de rames juſqu'à convenir qu'ils ne pourroient pas continuer une telle fatigue pendant une demie-heure, ont donné au bateau la vîteſſe 4, 30, ſoutenant un poids total de 138 onces, la vîteſſe corrigée devient 4, 33.

La correction étant ici inſenſible, & y ayant ainſi un parfait accord entre les deux expériences extrêmes, cela juſtifie les 2 petites corrections que nous avons employées pour les deux expériences moyennes.

V. Mettant enfin quatre rameurs dans le premier bateaux, & ceux ci avertis encore d'employer leur forces ordinaires, ont donné aux bateaux la vîteſſe 4, 50, c'eſt préciſement la vîteſſe que deux rameurs donnent ordinairement à un ſeul bateau en ramant pluſieurs heures de ſuite.

XXII.

Avant que de tirer de ces expériences, la concluſion principale ſur la quantité des forces utiles dans l'action de ramer, je ferai quelques autres rémarques eſſentielles ſur ce ſujet.

(*a*) Pour trouver le plan d'une réſiſtance égale à celle de la proue du ſecond bateau, on ſe ſervira de

l'équation $n = \frac{6P}{7cc}$ (§. 19.) & cette équation donnera la même valeur dans chacune des 4 premieres expériences, ſçavoir $n = o, 393$, ou à-peu-près $\frac{2}{5}$ d'un pied quarré; mais on ſe ſouviendra d'exprimer le poids P par livres, ou bien de diviſer le nombre d'onces par 16, & de mettre pour c les vîteſſes corrigées: ſans ces corrections les valeurs de n deviendroient un peu inégales; cependant la valeur moyenne, pour les quatre premieres expériences non corrigées, ſe trouve encore telle que nous venons de le dire; ce qui confirme nos petits corrections.

(*b*) L'effet des rameurs devant être cenſé proportionnel à la quantité P, c, ou à c^3, il s'enſuit que ces effets, pour la premiere & la quatrieme experience ont été entr'eux comme 92 à 175, & les travaux ont eu la même proportion; mais il eſt vraiſemblable, qu'un homme ne pourroit ſoutenir que pendant quatre heures par jour un travail tel que celui de la quatrieme expérience, pendant qu'il pourroit ſoutenir durant huit heures par jour celui de la premiere expérience; & ſi cela eſt, les travaux journaliers reviendroient au même, conformement à notre idée, ſur le travail & la fatigue des hommes.

(*c*) Comme dans la premiere & la cinquieme experience, les rameurs faiſoient des efforts égaux, & tels que les hommes peuvent faire pendant huit heures par jour, ces deux expériences confirment admirablement bien le Théoréme du §. 13, ſçavoir, que les travaux eſſentiels requis pour faire aller un certain bâtiment plus ou moins vîte, ſont en raiſon cubique des vîteſſes. Dans ces deux expériences les travaux étoient, ſans doute, comme 2 à 4, puiſqu'il y avoit d'un côté deux rameurs, & de l'autre quatre rameurs, qui s'efforçoient également, & les vîteſſes étoient comme 3, 50 à 4, 50; $1 : \sqrt[3]{2} = 3, 50 :$

441. Ainſi la vîteſſe que les quatre rameurs donnoient aux bateaux étoit à fort peu-près celle que notre Théorême donne ; elle étoit plus grande d'environ un pouce par ſeconde, & je donnerai même ci-deſſous la raiſon de ce petit excès.

(*d*) En ſuppoſant les deux bateaux parfaitement égaux, on a, pour le premier bateau, pareillement $n=o$, 393 ; de ſorte que les deux bateaux enſemble ſouffriroient une réſiſtance égale à celle de 0, 786 pieds quarrés : mais nous reconnûmes bientôt que le premier bateau étoit un peu-plus peſant que le ſecond ; cela nous engagea à changer l'ordre des bateaux pour déterminer pareillement la réſiſtance de l'autre bateau. Je ne rapporterai que la ſeule expérience qui ſuit.

VI. *Expérience.* Après avoir changé l'ordre des bateaux & leur vîteſſe, comme étant 4, 22 pieds par ſeconde, le poids total fut remarqué de 160 onces.

XXIII.

Il ſuit de cette ſixieme expérience que ſi la vîteſſe avoit été de 3, 50, comme dans la premiere expérience, le poids total eût été de 110 onces, les réſiſtances des deux bateaux étoient donc comme 90 à 100, & la réſiſtance entiere des deux bateaux enſemble étoit de 200 onces ou de $12\frac{1}{2}$ livres, cette réſiſtance étoit ſurmontée par deux hommes avec une vîteſſe de $3\frac{1}{2}$ pieds ; l'effet utile de leur travail étoit donc égal à celui d'élever $12\frac{1}{2}$ livres à la hauteur de $3\frac{1}{2}$ pieds par ſeconde, multipliant ces 2 nombres & diviſant le produit par 120 qui marque l'effet entier du travail ordinaire de deux hommes, nous obtenons $\frac{43\frac{1}{2}}{120}$ ou $\frac{175}{480}$ ou $\frac{35}{96}$ ou 0, 365. De là nous concluons, qu'exprimant le travail en-

tier par 1000, les rameurs en ont employé 356 utilement, & qu'ils ont fait une perte de 635, en produiſant des effets inutiles, qui n'étoient pas renfermés eſſentiellement dans le cinglage des deux bateaux.

XXIV.

Comparons ces réſultats avec ceux que nous avons trouvés au §. 17 pour les galeres; en leur ſuppoſant $n=$ 16 pieds quarrés, nous y avons vu que le travail utile de la chiourme faiſoit $\frac{116}{260}$ du travail entier, c'eſt en fractions décimales 0, 446. Ces réſultats ſont donc à-peu-près comme 9 à 11, & par conſequent preſque les mêmes pour les bateaux & pour les galeres: & ſi on n'avoit donné aux galeres qu'une réſiſtance égale à celle d'un plan de 13 pieds quarrés, ces pertes des forces ſeroient devenues entiérement égales de part & d'autre. En tous cas je m'aſſure que cette conformité, ſoit entiére, ſoit approchante, paroîtra merveilleuſe à ceux qui conſidéreront la diverſité infinie qu'il y avoit des deux côtés. Les rames étoient très-petites ſur le bateau, & très-grandes ſur la galere; la vîteſſe de la galere étoit plus que double de celle du bateau, ce qui rendoit la maniere de voguer tout-à-fait différente: ſur la galere on donnoit 24 palades par minute, & ſur le bateau, on en faiſoit ordinairement plus que 30. Les palades ſi faiſoient à-peu-près en trois tems égaux ſur la galere, & en deux ſur le bateau; il y avoit 260 rameurs ſur la galere, & deux rameurs pour les deux bateaux; enfin il n'y avoit ſur le bateau qu'un rameur à chaque rame, & il y en avoit cinq ſur la galere, & ces cinq rameurs travailloient d'une maniere extrêmement différente, celui qui eſt le plus près de l'apoſtis ne faiſant preſque point de mouvement & le vogu'avant faiſant un mouvement énorme

qui en peu de tems le met tout en ſueur &c. Cependant, il ſe trouve à la fin que les rameurs ont fait à-peu-près chacun le même effet ſur les bateaux & ſur la galere. Celà marque une conſervation merveilleuſe des forces humaines pareille à la conſervation des forces vives, qui a fait tant de bruit; & nous en devons conclure que les hommes, avec des fatigues égales, font toujours des effets à-peu-près égaux; de ſorte que dans toutes les queſtions méchaniques, dans leſquelles il s'agit d'obtenir un certain effet par le travail des hommes, il n'y a qu'à éviter autant qu'il eſt poſſible tout autre effet pour être aſſuré qu'on aura embraſſé le meilleur moyen qui étoit poſſible.

XXV.

Je me crois donc ſuffiſamment fondé à dire, que dans l'action de voguer ſur les bâtimens de bas-bord, les rameurs employent 0, 446 de leur travail utilement, c'eſt-à-dire, uniquement à ſurmonter la réſiſtance des eaux, qui ſeule fait tout l'effet qu'on ſe propoſe, & que 0, 554 de leur travail ſe perdent, étant employés à des effets, qui ne ſont pas eſſentiellement renfermés dans le cinglage. Mais comme tout travail à ſon effet, qu'on peut toujours réduire à une certaine quantité de forces vives, il eſt néceſſaire de rechercher, en quoi peuvent conſiſter les effets des 0, 554 parties du travail inutilement employées; ce n'eſt qu'après ces recherches, qu'on ſera en état d'examiner, ſi ces effets ſont d'une nature à pouvoir être évités en conſervant l uſage des rames, ou non. Dans le premier cas il ſera poſſible de perfectioner la méchanique des rames, & dans le ſecond cas il faudra tâcher de ſubſtituer aux rames quelqu'autre moyen qui entraîne une moindre perte dans les forces que l'on veut employer.

XXVI.

Voici d'abord une ſource de pertes, qui eſt bien certaine & qu'on peut déterminer aſſez au juſte ; rémarquons que la ſurface réunie de toutes les pales, aura toujours une certaine grandeur déterminée qu'on doit pouſſer avec une certaine vîteſſe contre les eaux, que par cette action on donne à une certaine quantité d'eau un certain mouvement, & que par-là on produit continuellement une certaine quantité de forces vives, qu'on doit cenſer n'être pas eſſentiellement renfermées dans l'effet qu'on ſe propoſe, puiſque ſi on étoit à même de ſe ſervir de perches, qu'on pût chaque fois appuyer directement contre un point fixe, ou qu'on pût préſenter à chaque palade un point fixe pour y appuyer l'extrêmité de la pale, on éviteroit entiérement de produire une ſemblable force vive inutile. Tâchons donc d'évaluer cette perte des forces pour la galere que nous avons conſidérée.

XXVII.

Pour cet effet il faut commencer par réduire la ſurface réunie de toutes les pales, qui étoit de 130 pieds quarrés, mais qui n'eſt pouſſée contre les eaux que par intervalles à un autre plan beaucoup plus petit, qui étant pouſſé conſtamment & uniformement contre les eaux, donne à la galere la vîteſſe de $7\frac{1}{5}$ pieds par ſeconde ; ſoit donc ce plan $= s$, la vîteſſe uniforme avec laquelle ce plan eſt conſtamment pouſſé contre les eaux $= v$, la ſurface plane qu'on peut ſubſtituer à la proue $= n$, & la vîteſſe de la galere $= c$; là deſſus nous aurons d'abord $svv = ncc$, parce que la force motrice doit être égale à la réſiſtance, & par conſequent

$v = c\sqrt[3]{\frac{n}{s}}$. Mais dans cette manœuvre l'effet n'eſt plus ſimple. Celui qui réſulte du mouvement qu'on donne aux eaux par la ſurface n, & que nous avons démontré au §. 12 devoir être exprimé par $\frac{7}{6} n c^3$, il ſurvient un autre effet qui conſiſte dans le mouvement qu'on donne aux eaux par la ſurface s, & qui eſt pareillement $= \frac{7}{6} s v^3$. Ce ſecond effet n'eſt pas eſſentiellement compris dans le cinglage ; mais il devient eſſentiel auſſitôt qu'on ſe propoſe de produire ce cinglage moyennant une ſurface plane s, qu'on pouſſe directement & ſans interruption uniformement contre les eaux avec une vîteſſe rélative v : ſi on nomme donc le premier effet E, le ſecond effet acceſſoire ſera $= \frac{sv^3}{nc^3} E$, ou $= \frac{v}{c} E$, ou bien $= E\sqrt[n]{\frac{n}{s}}$. Si donc par exemple, on ſuppoſoit $s = n$, cet effet acceſſoire ſeroit égal à l'autre effet eſſentiel ; on voit en effet que ce ſeroit comme faire aller deux galeres égales avec des vîteſſes égales, l'une vers l'orient, l'autre vers l'occident.

XXVIII.

Ce que nous venons de démontrer ſur le rapport entre les deux dits effets, nous pouvons auſſi le déduire du rapport qu'il y a manifeſtement entre les travaux ; imaginons-nous encore qu'on trouve en tous lieux des points fixes d'appui, contre leſquels on puiſſe appuyer directement des perches, & donner par-là à la galere la vîteſſe c ; un tel travail ſeroit entiérement utile, puiſque ce ſeroit enlever immédiatement & directement une certaine réſiſtance ſans qu'on perde la moindre partie de ſon travail. J'appellerai ce travail T, qui eſt eſſentiellement réquis ; qu'on conçoive après cela d'autres points d'appui mobiles, (au lieu de points fixes) dont la vîteſſe ſoit v en ſens contraire, ou des points d'appui qui

qui cedent avec la vîteſſe v, on voit manifeſtement que c'eſt la vraie maniere d'enviſager notre queſtion. Or il faudroit tant pour les points d'appui fixes que pour les mobiles, pouſſer les perches avec la même force pour donner à la galere la même vîteſſe, mais dans le premier cas, on les pouſſeroit avec la vîteſſe c, & dans le ſecond cas avec la vîteſſe $c + v$; & les travaux étant en ce cas proportionels aux vîteſſes (§. 2.), il s'enſuit que le travail dans le ſecond cas, ſera $= \frac{c+v}{c} T$; ainſi le travail acceſſoire eſt $= \frac{v}{c} T$, ou bien $= \frac{v}{c} E$, puiſque T, exprime un travail, qui produit ſon effet E tout entier. C'eſt préciſement la même valeur que nous avons trouvée dans le précédent article; nos principes ſont trop fondés dans ſa nature pour ſe dementir.

XXIX.

Pour appliquer notre Théorême à la queſtion dont il s'agit d'évaluer l'effet acceſſoire que la chiourme produit ſur la galere, il faut tâcher de ſubſtituer aux lettres E, n & s leur juſte valeur; conſidérons pour cet effet que la ſurface reunie de toutes les pales eſt 130 pieds quarrés ſur 52 rames; mais comme les rames ne ſont plongées dans les eaux que pendant environ le $\frac{1}{3}$ du tems, il faudra enviſager la choſe comme s'il n'y avoit que 17 à 18 rames pouſſées ſans interruption contre les eaux; donc la ſurface des pales ne ſera plus que d'environ 43 pieds quarrés; on voit enſuite qu'il y a naturellement encore pluſieurs petites diminutions à ſuppoſer pour ces 43 pieds, toutes m'engagent à ſuppoſer finalement $s = 36$ pieds quarrés. Je ſuis perſuadé que c'eſt la plus grande valeur qu'on doive admettre, mais une ſi petite correction n'eſt pas aſſez importante pour nous engager là-deſſus dans de grandes

diſcuſſions ; nous ferons donc $s = 36$ pieds quarrés, $n = 16$ pieds qurrés, & $E = 0,446$ (§. 25.) & nous aurons $E \nu \frac{n}{s} = \frac{4}{9} E = 0,297$, c'eſt-là l'effet acceſſoire produit par le travail des rameurs, qu'on exprime par l'unité, lequel effet acceſſoire prend ſa ſource dans le mouvement qu'on donne aux eaux par le corps de pale ; & pour etre perſuadé, que ce n'eſt-là qu'un effet acceſſoire, on n'a qu'à ſuppoſer la ſurface de toutes les pales, comme infinie, ou extrêmement grande, ce qui n'implique aucune contradiction, & cet effet s'évanouira entiérement ou ſe réduira à très-peu de choſe.

XXX.

Si nous ajoutons enſemble les deux effets provenans du travail de la chiourme, & déja indiqués, la ſomme ſera $= 0,743$ de l'effet entier que 260 hommes peuvent produire lorſqu'ils employent toutes leurs forces utilement, & ces 0, 743 parties conſiſtent uniquement dans le mouvement qu'on imprime, & communique continuellement aux eaux, tant par la proue de la galere que par la ſurface des pales.

XXXI.

Il nous reſte à découvrir en quoi peut conſiſter le reſte de l'effet entier qui ſe réduit à 0, 257 ; car je le repete, tout travail doit avoir ſon effet, & nous n'avons encore indiqué que les trois quarts de l'effet entier. Je trouve que le quart reſtant doit être attribué pour la plus grande partie à l'agitation irréguliére des corps des rameſ ; je dis : qu'il faut un travail conſidérable pour remuer les rames de la maniere que les rameurs le font ſur une galere, & cela independamment de la réſiſtance des eaux, conſidérant ici la ſimple inertie

des rames ; ce travail réquis pour remuer les corps des rames eſt ſans doute encore acceſſoire puiſqu'il s'évanouiroit, ſi on pouvoit faire des rames ſuffiſamment roides & fortes avec très-peu de matiere. C'eſt-ici une nouvelle matiere, que je tâcherai déclaircir aſſez pour pouvoir évaluer en quelque façon cette perte, que les rameurs ſur une galere ſont de leur force, & de leur travail.

XXXII.

Les rames ſur les galeres ayant 36 pieds de longueur, & étant en même tems aſſez fortes pour ſoutenir des efforts de plus de ſoixante livres, à la diſtance de $21\frac{1}{2}$ pieds (§. 16.) depuis l'apoſtis, ne ſauroient manquer d'être des corps fort lourds & peſants, ce ſont cependant ces corps qu'il s'agit de remuer fortement par des mouvemens réciproques & répétés vingt-quatre fois dans une minute de tems ; ſi ces agitations des rames ſe faiſoient d'une maniere que les forces vives une fois imprimées aux rames ſe conſervaſſent d'elles-mêmes, comme cela arrive à tous les corps qu'on abandonne à eux mêmes, nous trouverions très-peu de perte dans l'agitation des rames, & il n'y auroit guere à conſidérer, que le petit frottement de chaque rame contre l'apoſtis. Mais qu'on faſſe bien attention aux mouvemens que les rameurs donnent aux rames, & on verra auſſitôt qu'il s'agit alternativement de leur imprimer une certaine viteſſe, & enſuite de les arrêter ; chacun de ces changemens réciproques demande un certain travail, que nous devons conſidérer comme acceſſoire, & qui eſt en pure perte. Il eſt difficile d'évaluer au juſte cette perte, parce que nous ne connoiſſons pas exactement les changemens en direction & en viteſſe des rames, en tant que ces changemens ſont produits

par les efforts des rameurs. C'eſt pourquoi je me contenterai d'enviſager le mouvement des rames ſous la forme la plus ſimple & la plus ſuſceptible de calcul, mais qui ne laiſſe pas d'imiter aſſez bien le vrai mouvement tel qu'il eſt.

XXXIII.

Je conſidérerai dans les palades deux mouvemens, celui qui ſe fait hors de l'eau, & celui qui ſe fait ſous l'eau ; dans le premier mouvement il faudra faire attention à la force vive imprimée à la rame, lorſque cette force vive eſt la plus grande, & je ferai conſiſter dans cette ſeule force vive tout l'effet inutilement produit par les rameurs ; enſuite le mouvement de la rame ſera retardé, & enfin entierement arrêté ; je n'attribue aucun travail à cela, parce que les rameurs n'ont qu'à laiſſer entraîner leur corps pour retarder, & pour arrêter les rames vers la fin de ce premier mouvement ; quant au ſecond mouvement, il eſt vrai que les rameurs impriment d'abord un nouveau mouvement aux rames ; mais ce mouvement eſt enſuite employé utilement à pouſſer les eaux vers la pouppe ; & pourvu qu'on ſuppoſe que les rames n'ayent plus aucun mouvement ſenſible dans le moment qu'on retire les pales hors de l'eau, on n'aura fait aucune perte de ce côté-là : on voit bien qu'en enviſageant de cette maniere notre ſujet, je ſuis bien éloigné de ſurcharger la perte des forces cauſée par l'inertie des rames. Voici à préſent un Théorême, qui nous ſervira à évaluer cette perte.

Fig. II. Soit $A\,C$, ou $a\,c$ la longeur de la rame agitée réciproquement de $A\,C$ en $a\,c$, & $a\,c$ en $A\,C$, autour du point B, qui eſt la place de l'apoſtis ; qu'on marque par $A\,I$, le poids, ou la maſſe de toute la rame, qu'on pourra ſuppoſer inégalement chargée de matiere d'une

façon quelconque ; ſoit enſuite le centre de gravité de la rame entiere en D ; il faut auſſi s'imaginer la rame être ſuſpendue par le point B, en forme d'un pendule ſimple, & en chercher le centre d'oſcillation, que nous ſuppoſerons en E ; qu'on faſſe enfin $B\ G$ égale à la moyenne proportionelle entre $B\ D$ & $B\ E$: après cette conſtruction, je dis qu'on pourra conſidérer toute la matiere de la rame, comme concentrée au point G, qu'on peut appeller le centre des forces vives ; connoiſſant le point G, il faudra examiner quelle eſt la vîteſſe de ce point G, pendant que la rame eſt pouſſée de $A\ C$ en $a\ c$, ſoit la hauteur verticale génératrice de cette vîteſſe $= h$, & on a démontré que la force vive de la rame eſt égale à $M\ h$.

XXXIV.

On voit donc que pour chaque rame les rameurs produiſent ſur chaque palade inutilement une force vive exprimée par $M\ h$, & par conſéquent $24\ M\ h$ pendant chaque minute, ou $\frac{2}{5}\ M\ h$ pendant chaque ſeconde ; & comme on applique cinq rameurs à chaque rame, on aura $\frac{2}{25}\ M\ h$ pour chaque homme par ſeconde. Si on veut exprimer le poids de la rame M, par livres, & la hauteur verticale h, par pieds, il faudra comparer la quantité trouvée $\frac{2}{25}\ M\ h$ avec 60, qui eſt la meſure du travail entier d'un homme pour chaque ſeconde de tems. Ainſi ſi le travail abſolu de la chiourme eſt exprimé par l'unité, nous dirons que le travail inutilement employé cauſé par l'inertie des rames eſt $\frac{1}{750}\ M\ h$.

XXXV.

Je ſuis bien ſûr, que ladite perte eſt pour le moins $\frac{1}{750}\ M\ h$; mais je ne ſuis pas ſûr, qu'elle ne ſoit pas plus

grande. Or après avoir fait attention a toutes les circonſtances décrites par M. Chazelles, de même qu'à celles qui déterminent le point G, conformement au Théorême du §. 33, j'eſtime h de $\frac{5}{4}$ de pieds, & ſur cette eſtime la perte en queſtion ſera $= \frac{1}{600} M$; mais j'avoue que je n'ai aucune idée ſur le poids d'une rame de galere; ſi ce poids eſt ſuppoſé de 100 livres, la perte en queſtion ſera 0, 167; en tous cas nous voyons qu'elle eſt conſidérable. Suppoſons-là en attendant d'en être inſtruit $=$ 0, 167, & ajoutons cette valeur à celle de 0, 743, que nous avons adoptée à la fin du §. 30, & nous aurons 0, 910. De cette maniere nous aurons déja trouvé les 0, 910 parties de l'effort total du travail de la chiourme.

XXXVI.

Nous ne nous mettrons pas beaucoup en peine pour découvrir à quoi peuvent avoir été employés les 0, 090 dernieres parties, il eſt facile de voir qu'il y aura encore pluſieurs autres petites pertes; la principale, à mon avis, de toutes ces petites pertes conſiſte en ce que ſans doute la partie extérieure de la rame ſera un peu plus peſante que la partie intérieure, ce qui fera qu'à chaque palade, on eſt obligé d'élever un certain poids, & ce travail doit encore être conſidéré comme entierement inutile. Nous connoiſſons donc à préſent à-peu-près tout l'emploi que les rameurs font de leur force. Le principal & eſſentiel conſiſte à déplacer les eaux qui s'oppoſent à la proue, c'eſt ici le ſeul utile, & il doit être égal à 0, 446. Le ſecond conſiſte à deplacer les eaux, que rencontrent les ſurfaces des pales; je traite celui-ci d'acceſſoire, & inutile, & je le fais $=$ 0, 297. Le troiſieme ſert à remuer le corps des rames, & à ſurmonter leur inertie; il eſt de même ac-

ceſſoire & inutile, & je l'eſtime = 0, 167. Enfin le dernier emploi des efforts des rameurs pareillement inutile conſiſtera à lever quelques autres obſtacles accidentels & ſur tout celui qui provient du défaut d'équilibre dans les deux bras de la rame. Je ſuis auſſi bien perſuadé, que ſi on pouvoit éviter tous ces effets inutiles ſans tomber dans d'autres pertes, on atteindroit par-la à la meilleure maniere qu'il ſoit poſſible de naviger par les efforts des hommes, car nul travail ne reſte ſans effets, & ſi tout l'effet eſt utile, on tire le meilleur parti qui ſoit poſſible du travail des hommes. Mettons ces principes à profit dans notre ſeconde Partie.

XXXVII.

Avant que de finir cette Premiere partie, nous ferons encore quelques réflexions ſur le moyen fondamental, qui eſt le ſeul dont les hommes puiſſent profiter pour faire cingler un navire par leur travail en pleine mer. Ce moyen unique eſt l'inertie des eaux, quand on ſe trouve en pleine mer, mais on peut mettre à profit cette inertie de pluſieurs manieres, qui ſont fort différentes entre elles Dans l'uſage ordinaire des rames on pouſſe les pales contre les eaux, & ce mouvement ſe fait avec une vîteſſe finie & comme uniforme, dans cette action, on donne pendant chaque inſtant une vîteſſe *finie* à une nouvelle maſſe d'eau *infiniment petite*, mais on peut changer la choſe de maniere que pendant chaque inſtant on donne un incrément de vîteſſe infiniment petit à une maſſe *finie*; cette conſidération pourroit bien nous induire à faire quelque changement à la ſtructure des rames, ou même à leur ſubſtituer quelqu'autre moyen, en tout cas ce nouveau ſujet appartient de trop près à notre queſtion principale pour le paſſer ſous ſilence.

XXXVIII.

Imaginons-nous d'abord toute la ſurface de la mer parſemée de corps flottans, mais qui n'empêchent pas le ſillage, de maniere qu'au lieu d'enfoncer les pales dans l'eau, on puiſſe ſimplement appuyer l'extrêmité de la rame contre un de ces corps, & le pouſſer vers la pouppe, & ſuppoſons que ces corps flottans ne reſiſtent à la rame que par leur inertie; ſur ces ſuppoſitions, nous nous trouverons dans le cas, duquel j'ai fait mention dans le précédent article, qui eſt de donner à chaque inſtant une accélération vers la pouppe infiniment petite au corps flottant qui fait une maſſe finie. Si chacun de ces corps flottans avoit une maſſe comme infinie, il ne céderoit pas ſenſiblement à l'effort de la rame, & le rameur ne perdroit rien à cet égard de ſa force; mais ſi ces corps ſont conſidérés, comme ayant une certaine maſſe, ils céderont par un mouvement accéléré, & la perte du travail des rameurs eſt la force vive qu'auront acquis ces corps dans le moment qu'on les quitte pour appuyer la rame contre un nouveau corps flottant. Nous ſubſtituerons enſuite à ces corps flottans des maſſes d'eau aſſujetties à ne pouvoir être déplacées que toutes entieres à la fois.

XXXIX.

Maintenant je me propoſe de chercher la proportion qu'il y auroit entre le travail, ſi le poids p de chaque corps flottant étoit infini, & qui ſeroit eſſentiel, à celui qu'on eſt obligé d'employer lorſque le poids p eſt d'une certaine valeur déterminée, ce calcul ſe fera à peu-près comme au §. 28. Il n'y a que cette différence, qu'ici la vîteſſe avec laquelle le corps flottant eſt

eſt pouſſé vers la pouppe eſt uniformément accéléré, pendant que cette vîteſſe étoit conſidérée, comme uniforme dans le §. 28. Soit la vîteſſe du corps flottant relative aux eaux calmes, dans un inſtant quelconque $= v$, que ce corps ſoit preſſé avec une force quelconque π pendant un tems infiniment petit dt, & il faudra toujours eſtimer le travail proportionel à $\int \pi v\, dt$. Cette conſidération nous conduit d'abord à cette propriété, que le travail eſſentiel eſt au travail acceſſoire provenant du mouvement qu'on donne aux corps flottans, comme $P\, c\, t$ à $\int P\, v\, dt$; mais pour avoir une idée plus nette de cette proportion, conſidérons les eſpaces parcourus; ſuppoſons que depuis le moment qu'on à commencé à toucher le corps flottant, ce corps ait parcouru l'eſpace s, pendant que le navire parcourt l'eſpace S, & alors on pourra mettre ds à la place de $v\, dt$, & S à la place de $c\, t$; après quoi ladite proportion ſera comme $P\, S$ à $\int P\, ds$, ou P étant conſtante comme S à s. Nous voyons donc qu'à préſent le travail eſſentiel & entiérement utile eſt au travail acceſſoire duquel il eſt ici queſtion, comme le chemin que fait le navire pendant tout le temps qu'on employe à pouſſer en arriere chaque corps flottant, eſt au chemin parcouru par le corps flottant pendant le même tems. Ce Théorême ſeroit le même que celui du §. 28, ſi nous avions pu ſuppoſer ici la vîteſſe v conſtante, parce que en ce cas les eſpaces s & S, ſeroient comme les vîteſſes v & c.

XL.

Connoiſſant la perte qu'on ſouffriroit par une telle ſorte de travail, je crois que cette connoiſſance pourroit bien nous fournir quelques nouveaux moyens d'épargner les forces des rameurs, & d'en tirer plus de

fruit. C'eſt dans cette vue que j'ajouterai quelques réflexions ſur notre Théorême.

I Soit la force, avec laquelle chaque corps flottant eſt pouſſé en arriere $= \pi$, le poids de ce corps $= p$, le petit tems, pendant lequel ces corps ſont preſſés à chaque fois $= t$ exprimé par ſecondes, & alors on aura $s = \frac{\pi}{p} \times t\,t \times 15$ pieds, pendant qu'on a $S = t\,c$ pieds, en entendant par c le nombre de pieds que le navire fait dans une ſeconde de tems; donc le rapport de s à S devient égal au rapport de $15\,\pi\,t$ à $p\,c$.

II. Comme il y a ſur une galere 52 rames, qui agiſſent par intervalles en 3 tems, nous pourrons leur ſubſtituer $\frac{52}{3}$ rames qui agiſſent ſans interruption, & la preſſion continuelle que chaque rame exerce contre les eaux, doit être cenſée d'environ cinquante-ſix livres, qui font $\frac{3}{52}$ de la réſiſtance d'un plan de 16 pieds quarrés mus contre les eaux, avec une vîteſſe de $7\frac{1}{5}$ pieds par ſeconde. Outre cela le tems employé à pouſſer les pales contre les eaux ſur les galeres eſt le tiers d'une palade ou $\frac{1}{6}$ de ſeconde; ſuppoſons donc qu'on pouſſe pareillement chaque corps flottant avec une force de cinquante-ſix livres, en y employant chaque fois un tems de $\frac{1}{6}$ de ſecondes, & on trouvera $s = \frac{\pi}{p} \times t\,t \times 15 = 5$, $83\frac{1}{3}$ pieds, pendant qu'on auroit S ou $t\,c = 6$ pieds: ſi on veut donc faire enſorte que le travail inutile ne faſſe que les deux tiers du travail utile, qui eſt la proportion que nous avons trouvée au §. 29 pour la maniere ordinaire de ramer ſur la galere, il faudra faire $\frac{5}{S} = \frac{2}{3}$, & par conſéquent $p = 145\frac{5}{6}$ livres, ce qui fait environ le poids de chaque corps flottant de deux pieds cubes d'eau. Cette ſuppoſition rendroit le travail entiérement égal pour la maniere ordinaire

de ramer, & pour celle d'appuyer l'extrémité des rames contre des corps flottans.

Qu'on faſſe à préſent attention à la maniere dont nous avons trouvé tous les réſultats de cet article, & des deux précédentes rémarques, ſi différentes en apparence de nos méthodes antérieures, & on ſera ſurpris de l'admirable accord qu'il y a de part & d'autre pour les réſultats abſolus. J'ai dit que le travail inutile eſt toujours la force vive inutile qu'on en tire; dans notre cas c'eſt la force vive que l'on donne à chaque corps flottant, cette force vive eſt pour chaque corps flottant $= \pi s = \pi\left(\frac{\pi}{p} \times t\,t \times 15\right)$, faiſons $\pi = 56$, $p = 145\frac{5}{6}$, $t = \frac{5}{6}$, leſquelles poſitions ſont le travail de pouſſer en arriere les corps flottans, le même que celui de ramer ſur la galere, & nous trouverons $\pi s = \pi\left(\frac{\pi}{p} \times tt \times 15\right) = 224$. Ainſi la force vive de chaque corps flottant devient $= 224$, mais comme il y a cinq hommes à chaque rame, nous aurons pour chaque homme $\frac{224}{5} = 44\frac{4}{5}$, qui ſont la force vive que chaque homme produit inutilement à chaque palade qui dure $2\frac{1}{2}$ ſeconde, ce qui fait par ſeconde pour chaque homme $17\frac{3}{5}$ de perte; cette perte étant comparée avec le travail entier que nous eſtimons toujours 60 par ſeconde, on trouvera la perte $= \frac{428}{1500}$ parties du travail entier, ou en fraction décimale 0, 298, & nous avons trouvé à la fin du §. 29. Cette perte en tant quelle eſt produite par l'action ordinaire des rameurs $= 0, 297$. Un auſſi parfait accord prouve inconteſtablement la vérité de tous les principes, dont nous nous ſommes ſervis.

IV. Rémarquons enfin que l'effet inutile conſiſtant dans la force vive imprimée aux corps flottans, étant

à l'effet eſſentiel & inevitable comme s à S, ou comme $\frac{\pi}{p} \times t t \times 15$ à $t c$, ou enfin comme $15 \pi t$ à $p c$, on peut diminuer ce rapport de deux manieres ſans rien changer à la valeur π néceſſaire pour entretenir la vîteſſe uniforme du navire ni à cette vîteſſe même exprimée par c, la *premiere* maniere conſiſte à augmenter le poids des corps flottans exprimé par p, & la *ſeconde* maniere eſt de diminuer le tems t; cette ſeconde maniere a beſoin de quelque explication.

Suppoſons, comme dans la ſeconde remarque $\pi = 56$, $p = 145\frac{5}{61}$, $t = \frac{5}{6}$, & on aura $5 = 4$ pieds, pendant que S ſera $= 6$ pieds; mais ſi on faiſoit $t = \frac{5}{12}$, on trouveroit $s = 1$ & $S = 3$, & l'effet inutile ne feroit plus que le tiers de l'effet utile & eſſentiel. Mais on dira que de cette façon, les palades s e ſuccéderoient avec trop de rapidité, & qu'au lieu de 24 il en faudroit 48 dans une minute; à cette objection je réponds, que cela n'eſt point néceſſaire; car, comme nous entendons par t le petit tems, pendant lequel l'extrêmité de la rame reſte appuyée contre chaque corps flottant, il n'y a qu'à ſuppoſer les corps flottans plus ſerrés, de maniere à pouvoir appuyer à chaque palade ſucceſſivement contre deux corps flottans. Ainſi notre ſeconde maniere de diminuer l'effet inutile conſiſte proprement à changer dans un même coup de rame le plus ſouvent qu'il eſt poſſible de corps flottans. Si par un ſeul coup de rame on pouſſoit ſucceſſivement dix corps flottans, l'effet inutile deviendroit par-là dix fois plus petit, que ſi on employe tout le coup de rame à pouſſer un ſeul corps, parce que chacun des dix corps ne recevra que la centieme partie de force vive.

XLI.

M. Bernoulli expoſe à la fin de ſon Hydrodynamique une idée ſinguliere de voguer ſans rames; elle conſiſte à pomper des eaux pour les laiſſer écouler enſuite vers la pouppe, ſi M. Bernouilli avoit examiné la choſe ſuivant nos principes, il auroit jugé comme moi, qu'il faut attendre moins d'effet du travail des hommes qui pompent, que de ceux qui rament; car en adoptant toutes les proportions qu'il trouve les plus avantageuſes, je remarque que tous les effets inutiles ſont au moins trois fois auſſi grands que l'effet utile, de ſorte que l'effet utile n'eſt que le $\frac{1}{4}$ de l'effet entier, il y auroit donc $\frac{3}{4}$ de perte, pendant que nous n'avons trouvé que $\frac{144}{260}$ de perte ſur la galere (§. 17.), en ſuppoſant $n = 16$, & $\frac{18-\frac{1}{3}}{260}$ (19), en ſuppoſant avec M. Bouguer $n = 10$. Il faut cependant avouer, qu'on donneroit à la galere preſque autant de vîteſſe en pompant, qu'en ramant; & je ſuis ſurpris que M. Bernouilli, après pluſieurs poſitions, qu'il ne pouvoit faire qu'avec une certaine eſtime, ait pu ſi bien former la même concluſion finale. Je ne ferai donc aucun uſage dans ma ſeconde partie de cette nouvelle idée.

XLII.

On ſera peut-être ſurpris de voir, que dans tout le corps de cette premiere partie, je n'aie rien dit ſur la longueur & les proportions les plus avantageuſes des rames; c'eſt que ſuivant nos principes, la longueur abſolue, & la proportion de la partie extérieure à l'intérieure ſont par elles-mêmes indifférentes, puiſque faiſant abſtraction de l'inertie des rames, & de la trop

grande obliquité dans le mouvement des rames trop courtes, il y a toujours la même proportion entre l'effet utile & inutile, quelles que ſoyent les longueurs des parties extérieures & intérieures des rames. Il n'y a dans ce choix aucune économie eſſentielle à obſerver, & toutes les conſidérations qu'on doit faire ſur cette queſtion ne ſauroit tendre qu'à éviter quelques inconveniens accidentels qui ſurviennent, les uns aux rames trop courtes, & les autres aux rames trop longues; je ne m'étonne donc pas, que ceux qui ont traité cette queſtion l'ayent décidée tout différemment les uns des autres. J'aurai occaſion, dans la ſeconde Partie, de faire ſur ce ſujet quelques réflexions paſſageres.

SECONDE PARTIE.

I.

L'ACADÉMIE propoſe de trouver la maniere la plus avantageuſe de ſuppléer à l'action du vent ſur les grands vaiſſeaux, ſoit en y appliquant des rames, ſoit en y employant quelquautre moyen que ce puiſſe être. Jeſpere bien qu'un bon uſage de nos principes nous apprendra ce que cette illuſtre Compagnie demande; mais je crois devoir prévenir le lecteur, que le plus grand effet poſſible qu'on puiſſe ſe promettre du travail des hommes étant fort borné, la maniere la plus avantageuſe de ſuppléer à l'action du vent ſur les grands vaiſſeaux par le travail des hommes pourroit facilement paroître aſſez defectueuſe à en juger autrement que par nos principes. Je me propoſe donc avant toutes cho-

ſes d'examiner, quelle eſt la plus grande vîteſſe poſſible qu'un certain nombre d'hommes puiſſent donner à un grand vaiſſeau donné.

II.

Pour me conformer davantage à l'intention de l'Académie, je m'attacherai aux vaiſſeaux du premier rang, & je ſuppoſerai, qu'un tel vaiſſeau a une réſiſtance égale à celle d'un plan de 150 pieds quarrés. C'eſt ainſi que M. Bouguer détermine ce plan dans ſon Traité du Navire, pag. 419; non ſur une ſimple eſtime, comme il a fait par rapport aux galeres, mais par une méthode qui ne pouvoit guere tromper ce grand homme auſſi parfaitement inſtruit de tout ce qui pouvoit contribuer à rendre cette détermination plus exacte. Il n'y a donc qu'à ſuppoſer $n = 150$ dans l'équation générale que nous avons donnée au §. 14. de la premiere partie ſçavoir:

$$c = \sqrt[3]{\frac{360N}{7n}}$$

& nous aurons $c = \sqrt[3]{\frac{12}{7}}N$, qui nous marque quel eſt le nombre de pieds c, que le vaiſſeau peut faire dans une ſeconde de tems par le travail ordinaire d'autant d'hommes qu'il y a d'unités en N, en ſuppoſant tout leur travail utilement employé. Cette vîteſſe n'eſt donc poſſible que dans la théorie pure, & plus on s'en approchera, plus la maniere de voguer ſera parfaite.

III.

Si les hommes, au lieu d'un travail ordinaire, ſoutenable pendant huit heures par jour, vouloient faire un travail forcé, tel qu'ils puiſſent ſoutenir tout au

plus une demi-heure de ſuite, ils pourroient alors faire un effet double à-peu-près, & ils augmenteroient la vîteſſe du vaiſſeau preſque en raiſon de 1 à $\sqrt[3]{2}$, ou plus exactement en raiſon de 1 à $\sqrt[3]{\frac{175}{92}}$; voyez la premiere & la quatrieme expérience du §. 21. de la premiere partie, & la note (*b*) du §. 22; on aura donc en ce cas $c = \sqrt[3]{\frac{105}{161}} N$. Sur ce deux équations, qui expriment les plus grandes vîteſſes poſſibles, tant pour le travail ordinaire, que pour le travail forcé, j'ai conſtruit la Table ſuivante.

Table

Table fondamentale des vîteſſes poſſibles d'un vaiſſeau du premier rang.

Nombre d'hommes employés à la navigation.	Vîteſſes poſſibles entieres pour un travail ordinaire & durable.	Vîteſſes poſſibles entieres pour un travail extrêmement forcé.
10	1, 50 pieds par ſeconde	1, 86 pieds par ſeconde
20	1, 90	2, 35
30	2, 17	2, 69
40	2, 39	2, 96
50	2, 58	3, 19
60	2, 74	3, 39
70	2, 88	3, 57
80	3, 01	3, 72
90	3, 13	3, 87
100	3, 25	4, 03
120	3, 45	4, 27
140	3, 63	4, 49
160	3, 80	4, 70
180	3, 95	4, 89
200	4, 09	5, 06
220	4, 22	5, 22
240	4, 34	5, 37
260	4, 46	5, 51
280	4, 57	5, 65
300	4, 68	5, 79
350	4, 93	6, 10
400	5, 16	6, 38
450	5, 36	6, 63
500	5, 55	6, 86
550	5, 73	7, 09
600	5, 90	7, 31
650	6, 06	7, 50
700	6, 21	7, 69
800	6, 50	8, 04
900	6, 76	8, 37
1000	7, 00	8, 68

Cette Table nous apprend quelle vîteſſe un certain nombre d'hommes pourroient donner à un vaiſſeau du premier rang, ſoit par un travail ordinaire & durable, ſoit par un travail forcé, en ſuppoſant qu'il fût poſſible de mettre à profit tous leurs travaux ſans la moindre perte. Je m'aſſure qu'on trouvera ſans difficulté, dans ces vîteſſes de l'une & de l'autre eſpece, tout cet air de vérité qu'on peut attendre ſur ces ſortes de matieres, quand on ne conſidere la Table, que depuis environ 200 hommes juſqu'à 1000; mais cette apparence de vérité ſe perd peu-à-peu, à meſure qu'on diminue le nombre d'hommes, elle s'évanouit enfin entiérement, & prend tout l'air d'une fauſſeté manifeſte. En effet, il ſera bien difficile à ceux qui n'auront pas compris toute la force de nos principes, de ſe perſuader qu'il ſoit poſſible, ſuivant notre Théorie, à dix hommes de donner à un vaiſſeau du premier rang une vîteſſe à faire un pied & demi par ſeconde par un travail ordinaire, & une vîteſſe à faire $1\frac{6}{7}$ pieds par un travail forcé; ils ſe récrieront contre ces énormes vîteſſes pour un ſi petit nombre d'hommes, & laiſſeront-là toute cette théorie; j'aurois peut-être été tenté de donner une autre tournure à mes penſées, ſi j'avois pû quitter pour un moment cette haute opinion que j'ai de mes Juges. Raſſuré par leurs lumieres, je ne crains point d'avouer, que ce ſont préciſement ces réflexions qui me paroiſſent les plus favorables à nos idées. J'eſpére qu'on en portera la même opinion après qu'on aura vu les changemens que l'action de ramer demande par la Table des vîteſſes que nous venons de donner.

V.

L'objet de cette Table n'eſt qu'un être de raiſon, auquel on n'atteindra j'amais, mais qui doit nous gui-

der dans nos recherches, & duquel on approchera d'autant plus, qu'on emplovera plus utilement le travail des hommes. La table ſuppoſe un travail entiérement utile, mais elle prendra une toute autre face auſſitôt que nous conſidérerons la choſe autrement qu'*in abſtracto*, & que nous appliquerons notre théorie à un travail déterminé, duquel nous connoiſſons déja les effets pour de certains cas. Choiſiſſons ici l'action de ramer ordinaire, enviſageons donc notre grand vaiſſeau de premier rang comme une grande galere, ſur laquelle les hommes puiſſent ramer auſſi commodement qu'ils le font ſur les galeres ordinaires, on conviendra que c'eſt ici une ſuppoſition bien libérale & avantageuſe, & on ſeroit ſans doute aſſez content, ſi quelqu'un indiquoit une maniere de faire aller les grands vaiſſeau ſur mer ſi peu défectueuſe. Voyons donc quelles vîteſſes réelles on donneroit par ce travail au grand vaiſſeau en queſtion.

VI.

J'imiterai ſur ce grand vaiſſeau toutes les circonſtances que nous avons remarquées ſur la galere. La ſurface réunie de toutes les pales ſur la galere étoit de 130 pieds quarrés, ce qui fait la moitié d'un pied quarré pour chaque homme; c'eſt pourquoi nous donnerons pareillement la moitié d'un pied quarré pour pale à chaque homme ſur le vaiſſeau. Nous avons enſuite réduit ſur la galere les 130 pieds quarrés à 36 pieds quarrés (Part. 1. § 29.), qui ſeroient pouſſés contre les eaux, ſans aucune interruption, & tout à fait directement. Ce n'eſt donc plus que $\frac{36}{200}$ pieds quarrés de pale pour chaque homme, mais conſidérée comme agiſſant ſans interruption, & nous ſuppoſerons la même choſe pour les vaiſſeaux du premier rang. Si le nom-

bre des rameurs eſt $= N$, on aura $\frac{4}{100} N$, pieds quarrés, qui pouſſent continuellement les eaux en arriere pour avancer le vaiſſeau. C'eſt ce plan que nous avons nommé S, au §. 27 de la premier Partie : il eſt d'autant plus petit qu'il y a moins de rameurs, & nous avons démontré aux §§. 26 & 27, que plus ledit plan eſt petit, plus la perte du travail des rameurs eſt grande. Voilà pourquoi les vîteſſes de la table du §. 3, excédent de beaucoup les vîteſſes réelles qu'un petit nombre de rameurs peuvent donner au grand vaiſſeau ; cependant on comprendra aiſez, qu'il n'eſt pas abſurde de dire que dix hommes puiſſent donner à un vaiſſeau du premier rang une vîteſſe à faire un pied & demi par ſeconde ; on n'a qu'à s'imaginer ce vaiſſeau attaché à un poteau par une longue corde, que dix hommes tireroient à ſoi ; le vaiſſeau mu avec ladite vîteſſe ſouffriroit une réſiſtance d'environ 400 livres ſuivant la théorie commune ſur la réſiſtance des fluides, ainſi le travail de chaque homme ne conſiſteroit qu'à ſurmonter une réſiſtance de quarante livres, avec la vîteſſe d'un pied & demi par ſeconde, ce qui fait préciſément le travail naturel d'un homme. Si par une telle manœuvre les dix hommes ne pouvoient donner au vaiſſeau ladite vîteſſe, ce ſeroit une marque infaillible, que la théorie ſur la réſiſtance des fluides, s'écarte ſenſiblement de la vérité pour les grands corps mus avec peu de vîteſſe, cela changeroit bien les calculs à faire, mais non pas nos principes, ni les maximes que nous en tirerons pour employer le travail des hommes à la navigation avec plus de profit. Il eſt donc viſible, que ſi les vîteſſes que la Table marque pour un petit nombre d'hommes paroiſſent d'abord exceſſives & même abſurdes, ce n'eſt que parce qu'on conſidére ces hommes ſur le pied d'autant de rameurs, & nous allons voir qu'il s'en faut de beaucoup qu'un pareil

nombre de rameurs puiſſe donner au vaiſſeau toute la vîteſſe poſſible.

VII.

Pour connoître à préſent la vîteſſe réelle de notre grand vaiſſeau produite par un nombre de rameurs quelconque N, nous nommerons E, l'effet utile de ces rameurs, & nous aurons, en vertu des § §. 27 & 28, Partie premiere, $E\sqrt[n]{\frac{n}{5}}$ pour cet effet inutile, qui conſiſte dans le mouvement qu'on donne aux eaux par les coups de rame; dans cette expreſſion $E\sqrt[n]{\frac{n}{5}}$ il faut pour un vaiſſeau du premir rang faire $n = 150$ pieds quarrés, & $S = \frac{36}{260} N$ (§. 6. Part. 2.), & de cette maniere ledit effet inutile devient $= \sqrt[3]{\frac{150.260}{36N}}$, ou à-peu-près $= \frac{22}{\sqrt{N}} E$; ainſi la ſomme des deux effets eſt $= E + \frac{33}{\sqrt{N}} E$. Outre cette perte exprimée par $\frac{33}{\sqrt{N}} E$, nous avons remarque au §. 31. Part. prem. que l'action de remuer les corps des rames, & de vaincre leur inertie fait encore une perte, laquelle jointe à quelques autres petits défauts peut faire environ le quart de l'effet total, ce qui fait un tiers des deuxdits effets, ou un tiers de $E + \frac{33}{\sqrt{N}} E$; donc la ſomme entiere de tous les effets eſt $= \frac{4}{3} E + \frac{44}{\sqrt{N}} E$. Ainſi l'effet utile eſt à la ſomme de tous les effets comme E eſt à $\frac{4}{3} E + \frac{44}{\sqrt{N}} E$, ou comme f eſt à $\frac{4}{3} + \frac{44}{\sqrt{N}}$. Il faut donc diminuer chaque vîteſſe de la Table en raiſon de $\sqrt[3]{\left(\frac{4}{3} + \frac{44}{\sqrt{N}}\right)}$ à f, parce que les vîteſſes ſont en raiſon des racines cubiques de travaux utilement employés (§. 13. Part. prem.) ou eſſentiellement requis, & que la Table ſuppoſe le travail entier utilement employé, ce qui donne cette

analogie ; comme la racine cubique de l'effet total, ou $\sqrt[3]{(\frac{4}{7}E + \frac{3}{\sqrt{7}}E)}$ eſt à la racine cubique de l'effet utile, ou $\sqrt[3]{E}$, ainſi chaque vîteſſe de la Table fondamentale a la vîteſſe réelle, que les rameurs donneront au vaiſſeau ; ainſi on déterminera les vîteſſes réelles, en diviſant chaque viteſſe de la Table fondamentale, par le nombre $\sqrt[3]{(\frac{4}{7} + \frac{3}{\sqrt{7}})}$. Comme je ne doute pas que ces nouvelles vîteſſes ne repondent aſſez bien aux expériences qu'on pourra faire, je ne me ſuis point fait de peine de conſtruire ſur cette regle la Table ci-jointe ; mais on ſe ſouviendra que cette Table n'eſt faite que pour les vaiſſeaux du premier rang, dont les réſiſtances répondent à un plan de 150 pieds quarrés, qu'on ſuppoſe pour chaque rameur la moitié d'un pied quarré de pale, & que ces rameurs travaillent de la même maniere, que ſur les galeres, quoique cette derniere ſuppoſition ne ſoit pas fort eſſentielle ; voici cette nouvelle Table.

Table des viteſſes réelles qu'on peut donner à un vaiſſeau du premier rang, par le moyen des rames.

Nombre de rameurs.	Viteſſes pour un travail ordinaire & durable.	Viteſſes pour un travail extrêmement forcé.
10	0, 60 pieds par ſeconde.	0, 75 pieds par ſeconde.
20	0, 85	1, 05
30	1, 03	1, 27
40	1, 18	1, 46
50	1, 31	1, 62
60	1, 43	1, 77
70	1, 54	1, 91
80	1, 64	2, 03
90	1, 73	2, 14
100	1, 81	2, 24
120	1, 96	2, 43
140	2, 10	2, 60
160	2, 23	2, 76
180	2, 36	2, 92
200	2, 48	3, 07
220	2, 59	3, 21
240	2, 69	3, 34
260	2, 79	3, 46
280	2, 89	3, 58
300	2, 98	3, 69
350	3, 19	3, 95
400	3, 39	4, 20
450	3, 57	4, 43
500	3, 73	4, 63
550	3, 88	4, 82
600	4, 03	5, 00
650	4, 17	5, 17
700	4, 30	5, 34
800	4, 55	5, 65
900	4, 79	5, 94
1000	5, 01	6, 21

VIII.

Cette Table corrigée sur la précédente, conformément à nos principes, & à nos calculs sur la perte, que les rameurs font de leur travail en ramant sur les galeres, ne me paroît plus rien renfermer qui puisse blesser l'estime naturelle qu'on peut se former là-dessus. On voit à présent par cette Table, que dix rameurs ne pourront plus donner au vaisseau qu'une vîtesse à faire $\frac{3}{5}$ de pieds par seconde, ou environ sept pouces par un travail naturel, & neuf pouces par un travail forcé. Ces deux vîtesses font $\frac{2}{7}$ des vîtesses totales correspondantes, mais les effets utiles ne font, que la quinzieme partie des effets totaux, d'où l'on voit la grande perte que les dix rameurs font de leurs travaux. Mais lorsqu'il y a mille rameurs sur le vaisseau, ils lui donnent les $\frac{5}{7}$ de la vîtesse totale, & ils employent plus que le $\frac{1}{3}$ de leurs travaux utilement ; ces grandes différences proviennent uniqument de ce qu'en augmentant le nombre des rameurs, on augmente en même tems la surface réunie de toutes les pales, c'est aussi-là la raison pourquoi les quatre rameurs dans la cinquieme expérience du §. 21. Part. prem. ont donné aux bateaux rélativement aux deux rameurs dans la premiere expérience du même §, une vîtesse un peu plus grande, que ne demande le Théorême du §. 13. Part. prem. Voyez la note (*c*) du §. 22. Part. prem.

On voit enfin par chacune des deux Tables, combien peu de profit on fait en augmentant de beaucoup le nombre des rameurs, puisqu'une différence de neuf-cent à mille rameurs ne fait qu'environ trois pouces de différence dans les vîtesses.

IX.

IX.

Je m'en rapporte à préſent à ceux qui pourront juger de nos réſultats par leur propre expérience : ils n'auront pas manqué ſurtout de remarquer à-peu-près les vîteſſes des grands vaiſſeaux qu'on remarque ſur une chalouppe, ou ſur une galere, ſi nous faiſons abſtraction de la petite réſiſtance, qui ſurvient en attachant la chalouppe au vaiſſeau, & même de celle qui ſurvient en y attachant la galere ; notre Table nous enſeigne que dix hommes ſur une chalouppe pourroient remarquer le vaiſſeau par un travail naturel, avec une vîteſſe de ſept pouces par ſeconde, & vingt hommes avec une vîteſſe de dix pouces. J'aurois ſouhaité ſur tout, de trouver là-deſſus quelques expériences ou obſervation dans quelque auteur ; je préſume, que ces viteſſes ſont encore un peu trop grandes à cauſe d'une autre réſiſtance, à la quelle nous navons par fait attention, & qui ne ſauroit preſque ſe manifeſter que dans les très-petites vîteſſes ; c'eſt l'adhéſion des eaux contre la carene du vaiſſeau, qui vraiſemblablement ne croît qu'en raiſon ſimple des vîteſſes, pendant que la réſiſtance eſſentielle des fluides croît en raiſon du quarrée des vîteſſes ; mais comme je ne fais ces remarques, que pour faire voir tout l'uſage de nos principes, & que dans l'application il ne s'agit pas des petites vîteſſes qu'un petit nombre de rameurs peuvent donner aux grands vaiſſeaux, nos concluſions ne ſeront pas beaucoup changées par l'adhérence des fluides, quand même l'expériencs démontreroit, qu'elle eſt aſſez conſidérable dans les mouvemens très-lents. La derniére Table nous apprend encore que 260 hommes, ſur une galere pourroient remorquer un vaiſſeau du premier

rang avec une vîteſſe d'environ deux pieds neuf pouces par ſeconde, ou même avecune vîteſſe de preſque trois pieds $\frac{1}{2}$ avec un travail extrêmement forcé; ces deux vîteſſes doivent pourtant être diminuées en raiſon de $\sqrt[3]{11}$ a $\sqrt[3]{10}$, parce que la galere attachée au vaiſſeau augmente la réſiſtance à-peu-près en raiſon de 11 a 10, après leſquelles diminutions le vaiſſeau ne ſeroit plus remorqué, qu'avec une vîteſſe d'environ deux pieds huit pouces, ou en faiſant force de rames, avec une vîteſſe d'environ trois pieds quatre pouces. Je ne doute pas que ces vîteſſes ne ſe confirment aſſez bien par l'expérience, ce qu'on trouvera peut-être de moins doit encore être attribué a l'adhérence des eaux, laquelle cependant, je préſume ne pouvoir plus être guerre conſidérable en ce cas.

X.

Je fais avec plaiſir toute les remarques, qui pourront ſervir de pierre de touche à notre théorie, & comme il eſt faute d'eſſayer les vîteſſes d'une galere ſemblable à celle dont parle M. Chazelles pouſſée ſucceſſivement par 10, 20, 30, juſqu'à 260 rameurs, en obſervant ſimplement les tems employés à parcourir un même eſpace, je mettrai ici encore la formule, qui marque généralement combien de pieds la galere parcourra dans une ſeconde de tems. Pour trouver cette formule, on n'a qu'à faire tout ce que nous avons fait dans cette ſeconde partie avec cette ſeule différence qu'au lieu d'avoir ſuppoſé $n = 150$ pieds quarrés, il faut ici faire $n = 16$ pieds quarrés, là-deſſus on trouvera pour le travail ordinaire,

$$\sqrt[3]{\frac{405\ N}{168 + 112\sqrt{\frac{260}{N}}}}$$

& pour le travail forcé il faudra multiplier cette formule par 1, 24. Si l'Académie, aux heureux auſpices de laquelle la République des Lettres eſt redevable de toutes les grandes découvertes de notre ſiécle, trouvoit mes réflexions aſſez dignes de ſon attention pour engager quelque Capitaine de galere entendu à faire ces expériences, j'oſerois me flatter, qu'elles s'accorderoient aſſez, avec ladite formule, pour conſtater entiérement toute notre théorie; je trouve, par exemple, que dix rameurs en travaillant avec la même fatigue, qu'ils le font lorſque toute la chiourme fait parcourir à la galere $7\frac{1}{5}$ pieds par ſeconde, pourront lui donner la viteſſe 1, 765 il n'y a que la force de l'adhérence des eaux qui pourra un peu diminuer cette viteſſe. Mais il eſt tems que nous nous approchions de notre ſujet principal.

XI.

Suppoſons un certain équipage deſtiné au travail, comme par exemple 500 hommes. La Table fondamentale nous fait voir, que toute la viteſſe poſſible du vaiſſeau du premier rang ſera alors de 5, 55 pieds, pour un travail ordinaire & durable, ou de 6, 86, pour un travail extrêmement forcé. C'eſt donc-là une viteſſe de laquelle on peut bien tâcher d'approcher, mais qu'il ne faut pas eſperer d'atteindre entiérement. On conviendra même que ce ſera bien aſſez, que d'obtenir le même effet ſur les grands vaiſſeaux, qu'on obtient par l'uſage des rames ſur les vaiſſeaux de basbord. Cependant les 500 hommes ne pourront donner alors même au vaiſſeau qu'une viteſſe de 3, 73, 4, 635 & nous avons vu, que les deux ſources principales de ce défaut conſiſtent dans l'inſuffiſante grandeur des pales, & dans l'inertie des rames: ainſi toute

la perfection qu'on peut donner à l'uſage commun des rames conſiſte uniquement à augmenter la ſurface des pales autant qu'il eſt poſſible ſans tomber dans de nouveaux inconveniens, & à diminuer l'inertie des rames; on donne aux pales des grandes rames cinq pieds de longueur, ce ſeroit peut-être outrer la choſe que de les faire plus longues, mais j'avoue que je ne vois pas aſſez, pourquoi on ne leur donne qu'un demi-pied de largeur, il me ſemble plutôt, qu'il n'y auroit aucun inconvenient conſidérable à leur donner un pied de largeur; cela ſuppoſé, car j'avoue que c'eſt avec peu d'aſſûrance que je touche aux choſes qu'un ſi long & univerſel uſage à établies; voici les avantages qu'on en rétireroit. Sans rien changer aux preſſions que les rameurs exercent contre les rames, ni aux tems qu'ils employent, tant aux palades entieres qu'aux coups des pales contre les eaux, ou aux faccades, les agitations des rames en deviendroient plus petites, & en même tems l'inertie des rames en auroit moins d'effet, on ménageroit doublement le travail, & la perte en deviendroit plus petite : quand a l'inertie des rames, on en diminuera les effets en choiſiſſant le bois le plus fort, & le plus leger, & en ne la chargeant dans aucun endroit inutilement de matiere, il ne faut pas lui donner près de l'apoſtis plus d'épaiſſeur qu'il en faut pour pouvoir ſoutenir ſans ſe caſſer un poids d'environ 100 livres appliqué au milieu de la pale; depuis l'apoſtis il faut diminuer les épaiſſeurs, de maniere que les cubes des diametres ſoient proportionels aux diſtances depuis le milieu de la pale, car les forces des cylindres d'une même matiere ſont à-peu-près en raiſon triplée des diamétres. C'eſt auſſi ſuivant cette regle, qu'il faudroit diminuer les épaiſſeurs depuis l'apoſtis vers l'autre bout de la rame; mais comme de cette façon le défaut de l'équilibre

ſeroit trop grand je voudrois qu'on remédiât à ce défaut en chargeant de plomb la partie interieure de la rame, ou ſon manche tout près de l'apoſtis.

XII.

C'eſt peut-être la ſeule raiſon de ne point ſurcharger les rames de matiere, ſur tout aux pales, le mouvement deſquels eſt le plus rapide qui a empêché les mariniers de donner plus de largueur aux pales; ſi c'étoit-là la raiſon, je voudrois qu'on tentât tout avant que de renoncer à un avantage ſi eſſentiel, peut-être vaudroit-il mieux de ſubſtituer aux pales de bois des quadres, ou bordures de fer avec de la groſſe toile étendue deſſus, on diminueroit par-là en même tems un autre inconvenient, qui eſt que l'équilibre dans les deux parties de la rame eſt trop dérangé par les immerſions & émerſions alternatives des pales, ce qui emporte certainement une force vive, qu'on perd entiérement, je voudrois même que la toile fût aſſez ample pour former un eſpece de ſac, pendant la faccade, qui pût contenir trois ou quatre pieds cubes d'eau. Ces trois ou quatre pieds cubes d'eau tiendroient lieu de ces corps flottans, dont j'ai parle dans notre premiere Partie aux §§ 38, 39 & 40. L'inertie de cette maſſe d'eau qu'il faut mettre en mouvement augmente conſidérablement la réſiſtance contre les pales, ce qui doit toujours faire l'objet principal de ces recherches. En ce cas il faudroit faire enſorte que ces ſacs ſe vuidaſſent parfaitement ſur la fin de la faccade, & il ſeroit bon dimaginer quelqu'obſtacle pour chaque rame, qui l'arretât bruſquement à la fin de la faccade, & jettât en même tems la pale hors de l'eau; un tel choc jetteroit encore les eaux vers la pouppe,

& ces eaux par leur réaction donneroient, en ce moment un coup vigoureux au navire.

XIII.

J'ai n'ai fait ces remarques paſſageres, que pour ſuivre le fil de nos principes. Je n'ignore pas qu'on ne doit pas eſperer de pouvoir appliquer avec ſuccès les rames ordinaires ſur les grands vaiſſeaux. Voici comme en parle M. Bouguer dans ſon excellent Traité du Navire, pag. 118. » Juſques à préſent (dit-il) on n'a » appliqué les rames avec ſuccès qu'aux ſeuls navires » de bas-bord, quoiqu'on ait ſenti combien, il ſeroit » important de pouvoir les appliquer auſſi dans certains » cas aux vaiſſeaux proprement dits, la hauteur de ces » derniers a rendu inutiles les différentes tentatives » qu'on a faites de tems en tems pour tâcher de leur » procurer ce ſecours. On a principalement inſiſté ſur » ce que les rames fuſſent tournantes, comme les rames » des moulins à eau, mais comme on n'a pas pu leur » donner aſſez de vîteſſe, elle n'ont point eu d'effet, » ou n'en ont eu que très-peu.

L'idée des rames tournantes, comme les aîles des moulins à eau, eſt trop naturelle, pour ne pas ſe préſenter d'elle-même. M. Chazelles en parle auſſi dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1702. Cela m'engage à examiner tout le ſuccès qu'on peut s'en promettre; ce ſera enſuite aux mariniers de voir s'ils voudront ſe contenter d'un tel ſuccès.

XIV.

Il faut d'abord examiner qu'elle eſt la ſurface entiére de toutes les ailes qui pouſſent ſans interruption

les eaux directement en arriére, ſi les parties de chaque aile ont une obliquité, & une inégalité de vîteſſe ſenſible, on pourra toujours par un juſte calcul ſubſtituer aux ailes une ſurface plane équivalente pouſſée perpendiculairement contre les eaux. Je nommerai cette ſurface s, comme nous avons fait ci deſſus, & la lettre n, exprimera de même le plan, dont la réſiſtance ſoit égale à celle de la proue du vaiſſeau. Là-deſſus, je dis que ſans faire attention à la maniere de mettre en mouvement les rames tournantes, qu'on pourra varier à l'infini, on aura toujours par cette manœuvre deux effets, l'un utile & eſſentiellement requis, l'autre inutile & ſimplement acceſſoire par la nature de la manœuvre, & cela entiérement dans le même ſens que nous l'avons démontré au ſujet des rames ordinaires Ainſi l'effet utile étant encore E, l'autre ſera néceſſairement $E, \sqrt{\frac{n}{s}}$ (§§ 27 & 28. Part. prem.). C'eſt-là un principe conſtant & infaillible; Il faudroit donc donner aux ailes une ſurface infinie, ſi on vouloit éviter entiérement cette perte.

La plupart de ceux qui ont écrit ſur cette matiere, n'ont pas aſſez approfondi ce quelle renferme en quelque façon de Méthaphyſique. Ils ont bien vu que la preſſion totale des ailes contre les eaux, doit être égale à la réſiſtance du vaiſſeau, & qu'on peut produire telle preſſion que l'on ſe propoſe, moyenant une ſurface quelconque; que plus cette ſurface eſt petite, plus il faut lui donner de vîteſſe; ils ont donc voulu reparer par la vîteſſe, ce qu'ils ne pouvoient obtenir commodement par la grandeur de la ſurface; mais il ſemble qu'ils n'ont pas fait aſſez attention, qu'il coûte plus de travail pour obtenir une même preſſion moyennant une petite ſurface que moyennant une grande. Il eſt même à remarquer que ce ſurplus de travail de-

vient eſſentiel & inévitable auſſitôt qu'on s'eſt déterminé à une certaine ſurface indiquée par s, & que ce ſeroit tenter l'impoſſible d'y vouloir rémédier autrement qu'en augmentant cette ſurface.

XV.

Nous avons vu au § 29. Part. prem., que cette perte faiſoit les $\frac{2}{7}$ du travail utile pour la galere en y ſuppoſant $\frac{v}{t} = \frac{16}{36}$. Outre cette perte on en fait quelques autres ſur la galere par l'uſage ordinaire des rames, leur ſomme peut aller à un quart du travail total; Il eſt vrai qu'à examiner les ſources que nous en avons indiquées, nous ne voyons rien de ſemblable dans les rames tournantes. Leur inertie n'eſt plus d'aucun empêchement auſſitôt que ces rames, ont acquis leur plein mouvement il n'y a ici non plus aucun défaut d'équilibre qui puiſſe cauſer quelque travail inutile, mais il y aura en échange des frottemens qui ne ſe trouvent pas dans une machine auſſi ſimple que celle d'une rame ordinaire, outre cela les impulſions des ailes contre les eaux ſe feront naturellement avec plus d'obliquité vers le commencement & la fin de leurs immerſions, que celles des pales. Nous ſuppoſerons donc ces dernieres petites pertes de part & d'autre égales, ou plutôt nous en ferons abſtraction en ne conſidérant que la perte eſſentiellement attachée à une ſurface déterminée s.

XVI.

Après ces remarques nous verrons auſſitôt quel effet on peut ſe promettre tout au plus ſur les ſuppoſitions que fait M. Chazelles pag. 100, des Mémoires de l'Academie 1702. » On ne doit pas douter (dit-il) » que

» que la force de cent hommes par exemple, pouſſant » continuellement un volume d'eau de 18 pieds quar- » rés de chaque côté, ne mette bientôt en mouve- » ment le plus gros vaiſſeau, puiſqu'une ſimple cha- » louppe ſe fait ſentir &c. « Si nous faiſons donc, conformément aux ſuppoſitions de M. Chazelles $S = 36$ & $n = 150$, comme il convient pour les plus gros vaiſſeaux, dont il parle, il eſt impoſſible que le travail inutile ſoit moindre que $E\sqrt{\frac{150}{36}}$, ou que $2,04\ E$. Ainſi ſur 304 hommes il n'y auroit que 100, d'utilement employés, & le travail de 204 hommes ſeroit entiérement perdu, pendant que ſur une galere pouſſée par 260 hommes l'effet inutile n'étant que $E\sqrt{\frac{16}{36}}$, ou $\frac{2}{3}E$, on peut dire dans le même ſens, que du travail de cinq hommes, on ne perd que celui de deux. Cette grande diſproportion fait voir combien cette navigation propoſée par M. Chazelles ſeroit déſavantageuſe & déffectueuſe. Je trouve effectivement, que moyennant les deux roues, qui portent les rames tournantes, cent hommes ne pourroient donner au grand vaiſſeaux dont il eſt queſtion que la vîteſſe marquée dans la Table fondamentale du § 3, qui repond ou nombre de cent hommes multipliée par $\sqrt[3]{\frac{100}{304}}$, c'eſt-à-dire, pour le travail ordinaire $3,25 \times \sqrt[3]{\frac{100}{304}}$, ou 2, 24 pieds par ſeconde, & pour le travail extrêmement forcé $4,03 \times \sqrt[3]{\frac{100}{304}}$, ou 2, 77. Voilà pour les deux cas toute la vîteſſe qu'il eſt poſſible de donner au vaiſſeau ſur les hypothèſes de M. Chazelles. Il eſt vrai que ces vîteſſes ſont ſenſibles, qu'elles vont même juſqu'aux $\frac{2}{3}$ des vîteſſes totales, ou des vîteſſes que cent hommes pourroient donner au vaiſſeau, s'ils ne faiſoient aucune perte de leur travail, mais il eſt vrai auſſi que dans cette hypothèſe, 100 hommes pourroient fournir le même effet, que 304 hommes fourniſſent dans le cas propoſé par M. Chazelles. C'eſt que les pertes des travaux ſont beau-

coup plus grandes, que les pertes des viteſſes, puiſque les travaux utiles ſont en raiſon triplée des viteſſes réelles. Encore doit-on remarquer, que dans les évaluations que nous venons de faire, nous avons fait abſtraction de pluſieurs autres petites pertes qu'on fera néceſſairement, outre celle que nous avons indiquée qui eſt la principale, & qui eſt ſi eſſentiellement attachée aux hypothèſes, qu'une plus petite perte impliqueroit une contradiction contre les loix de la nature. Je repete ſouvent ces ſortes d'expreſſions de peur qu'on ne confonde les défauts eſſentiellement attachés aux différentes manœuvres, avec ceux qui ne ſont qu'acceſſoires, on ne doit pas eſpérer de diminuer les premiers défauts ſans changer les hypothèſes, mais on peut bien l'eſperer par rapport aux défauts acceſſoires ou accidentels. Je ne crois pas, après ces réflexions & ces évaluations, qu'on s'aviſe d'employer les rames tournantes avec les proportions que M. Chazelles leur donne.

XVII.

Après l'examen que nous venons de faire des ſuppoſitions de M. Chazelles, je vais examiner ce qui ſeroit eſſentiellement requis pour tirer des rames tournantes ſur un vaiſſeau du premier rang autant de profit qu'on obtient par le ſecours ordinaire des rames ſur une galere. Or dans une galere, allant de toutes rames nous avons eu $\frac{S}{n} = \frac{36}{16}$. Il faut donc, pour faire travailler l'équipage du grand vaiſſeau avec un avantage égal, rendre la valeur de $\frac{S}{n}$ auſſi $= \frac{36}{6}$, comme nous ſuppoſons pour un vaiſſeau du premier rang $n = 150$, nous aurons $S = 337\frac{1}{2}$ pieds quarrés. Il faudroit donc de néceſſité abſolue faire enſorte, que les

rames tournantes préſentaſſent continuellement aux eaux une ſurface de $337\frac{1}{2}$ pieds quarrés. Une telle ſurface ſeroit requiſe ſans aucune interruption, quand même elle ſeroit pouſſée contre les eaux dans une direction parfaitement parallele à la quille, ce qui cependant n'eſt pas, & la nature du mouvement circulaire dans un plan vertical demanderoit cette ſurface encore plus grande. De là nous voyons qu'il faudroit ſur notre grand vaiſſeau dix-neuf ou vingt moulins, que M. Chazelles demande. Si on faiſoit ces moulins deux fois plus grands, il en faudroit encore dix, & quel ſeroit enfin le ſuccès de ces énormes tentatives; ce ſeroit de ſe procurer autant d'avantage, qu'en ont les rameurs ſur une galere, qui va à toutes rames; ſuppoſons encore qu'on ſe ſoit procuré tout cet avantage, & voyons qu'elle ſeroit alors la vîteſſe que 500 hommes pourroient donner au vaiſſeau. Je dis que pour trouver cette viteſſe, il faut dans la Table fondamentale du § 3. multiplier les deux vîteſſes qui répondent au travail de 500 hommes par $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$, parce que ſur cinq parties de travail il y en auroit trois d'utilement & deux d'inutilement employées § 29. Part. prem., & cette regle donne la vîteſſe du vaiſſeau par le travail ordinaire des 500 hommes = 4, 68 pieds par ſeconde, & pour le travail forcé = 5, 78 pieds Nous avons cependant ſuppoſé dans ces réſultats, qu'il ne ſe fait aucune autre perte, que celle qui provient de l'inſuffiſante étendue de la ſurface totale S; ainſi ces vîteſſes ſeront encore trop grandes, & on ne pourra jamais y atteindre entiérement, ſi les frottemens & quelques autres empêchemens emportoient encore le quart de travail entier; il faudroit multiplier leſdites vîteſſes par $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$, après quoi on auroit pour le travail ordinaire la vîteſſe 4, 25, & pour le travail forcé 5, 25; voilà les vîteſſes finales qu'on eſt fondé à attendre de

tout cet appareil ; il eſt vrai que ces viteſſes ſont conſidérables, & qu'elles ſont plus que les $\frac{3}{4}$ des viteſſes poſſibles totales, je laiſſe juger les gens de marine, ſi on doit ſe donner ſur un grand vaiſſeau tout l'embarras que ces moulins cauſeroient, & ces embarras pourroient bien être beaucoup plus grands, qu'il ne paroiſſent d'abord. Si cependant on ne vouloit pas rénoncer à ces rames tournantes, je ſerois d'avis qu'on ſe relâchât un peu ſur la grandeur de la ſurface S, quand même la perte du travail en deviendroit plus grande, & qu'on ſe procureroit l'avantage que nous fournit l'idée éxpoſée au § 38. Part. prem., en faiſant que les moulins, au lieu de pouſſer ſimplement les eaux par les ailes, puiſent en même tems de grandes maſſes d'eau qu'ils emportent à la fois. Il y auroit enſuite un grand nombre de regles à obſerver pour occuper les hommes par un eſpece de travail qui leur ſoit naturel, tel qu'eſt celui d'exercer une force d'environ vingt livres avec une vîteſſe d'environ trois pieds par ſeconde, mais j'avoue que je ne fais pas aſſez grand cas des rames tournantes pour entrer dans toutes ces diſcuſſions.

XVIII.

Tâchons plutôt de trouver quelques nouveaux expédiens moins embarraſſants & plus profitables, mais ſans perdre jamais de vue les principes que nous avons ſi bien établis. S'il ne faut pas eſpérer de pouvoir ſe ſervir des rames ordinaires ſur les vaiſſeaux de haut-bord, il ne faut pas pour cela renoncer entiérement à ce principe de mouvement ; il n'eſt pas difficile d'imaginer pluſieurs manieres de ſe ſervir commodement de rames ſur les grands vaiſſeaux, en leur donnant une autre façon. En voici une qui me paroît aſſez commode & utile, je n'en ferai qu'une ébauche fort

légere, *A B C* eſt une piece de bois perpendiculaire Fig. III.
à la quille, & d'abord horizontale, qui repoſe au point *B* ſur l'apoſtis: *C D* repréſente une barre de fer mobile autour du point *C*, moyennant une charniere dans un plan vertical; à cette barre on affermiroit la pale *m n p q*; au point *E* on attacheroit un ou pluſieurs bouts de corde, par leſquels pluſieurs hommes tireroient la barre de fer vers la pouppe, & pouſſeroient la pale *m n p q* contre les eaux. Voici à préſent comme il faudroit manier cette eſpece de rames; au moment qu'on auroit fini de tirer la pale avec force contre les eaux, & même un peu plutôt, un homme peſeroit au point *A C*, & retireroit la pale entiérement hors de l'au, ſur quoi la barre & la pale par leur propre poids ſe remettroient dans la poſition verticale, & la paſſeroient même: au moment que ce balancement ſe finiroit, l'homme en *A*, ceſſeroit de peſer ſur *A*, & laiſſeroit par-là replonger la pale dans les eaux, & au même inſtant les hommes recommenceroient à tirer fortement la pale contre les eaux.

XIX.

Il s'en faut ſans doute de beaucoup que cette deſcription ſoit ſuffiſante pour voir en detail tout ce qu'il faudroit faire pour l'exécution de ces nouvelles rames, auſſi n'ai-je prétendu, qu'expoſer ſimplement leur façon d'agir; il y auroit bien de la matiere, ſi l'on vouloit entrer dans tout le détail que cette idée demande; mais je ſuis fermement perſuadé, que ſi on obſerve tout ce que je vois qu'il faut, & que l'on peut faire pour tirer le meilleur parti de l'uſage de ces nouvelles rames, le travail des hommes pourra être plus utilement employé, que n'eſt celui de la chiourme ſur une galere. On pourra placer facilement ſur un grand vaiſ-

ſeau cinquante de ces rames, appliquer dix hommes à chacune, & donner vingt pieds quarrés à chaque pale, ce qui feroit en tout 1000 pieds quarrés; & ſi toute la manœuvre ſe faiſoit en deux tems égaux, nous aurions 500 pieds quarrés qui agiroient ſans interruption, pendant qu'il n'en faudroit que $337\frac{1}{2}$ pour ſe procurer autant d'avantage qu'on a en ſe ſervant de toutes les rames ſur une galere. Il eſt vrai qu'ici le travail qu'il faut employer au point A, pour retirer chaque fois la pale hors de l'eau eſt en pure perte; mais quand il faudroit employer deux hommes pour cet effet, cette perte ne feroit que la cinquime partie du travail entier; & nous avons vu par raport aux galeres qu'on y perd juſqu'au $\frac{1}{4}$ du travail entier. La plus grande difficulté ſera de placer les hommes, & de les mettre à même de tirer le point E, dans une direction horizontale, & perpendiculaire au plan du ſyſtême; il me ſemble qu'on pourra remédier à cet inconvenient, s'il eſt néceſſaire, moyenant des poulies, qu'on trouvera toujours où placer, & qui ſerviront à conduire les cordes là où l'on voudra placer les hommes deſtinés au travail. Cet expédient me paroîtroit aſſez convenable, s'il ne falloit pas craindre les frottemens; ceux qui penſeront là-deſſus comme moi, préféreront peut-être cet autre moyen: au lieu d'attacher au point E une corde, par le moyen de laquelle on tire fortement la pale contre les eaux, on pourroit ſe ſervir d'un autre levier E, M, N, dont le point d'appui ſeroit en M, & qui entreroit dans l'entre-deux des ponts. Les hommes agiroient ſur le manche M N, à-peu-près de la même maniere que les rameurs le font ſur les rames, & ſeroient mis par-là en état de pouſſer fortement les pales contre les eaux par le moyen d'un plat M E. Dans cette maniere de ramer, le mouvement du levier A C ſe feroit conſtamment dans un

plan vertical, & celui du levier *E N*, dans un plan horizontal, & ces mouvemens ſeroient beaucoup plus commodes, que ne ſont ceux d'une rame ſimple ſur une galere. Il y auroit ſur tout cela un grand nombre d'explications à donner, ſi d'abord les lumieres de mes juges, & puis celle des articles, au cas que mes idées euſſent merité quelqu'attention favorable, ne m'en diſpenſoient.

XX.

Voilà ce qui peut ſuffrire ſur la perfection de l'uſage des rames, & ſur la meilleure maniere de les appliquer aux grands vaiſſeaux; mais remarquons que nous n'avons encore conſidéré que l'action des rames en tant que les pales ſont pouſſées directement contre les eaux, c'eſt-à-dire, dans une direction perpendiculaire à leur plan. Il y a cependant une infinité d'autres mouvemens, qu'on peut donner aux pales pour pouſſer les navires, & je ſuis ſurpris que perſonne ne ſe ſoit encore aviſé d'en examiner le mécaniſme; le mécaniſme infiniment diverſifié des différentes ſortes de poiſſons dans leur action de nager, & même l'exemple des oiſeaux, dans leur façon de battre des ailes pour voler, étoient bien propres pour exciter cette Idée. J'ai donc cru, pour ſatisfaire entiérement à la queſtion de l'Académie, devoir entrer dans cette nouvelle diſcuſſion. Elle nous fournira une maniere toute nouvelle de voguer, préférable, à mon avis, à tout autre, les rames pourront être appliquées très commodement aux plus grands vaiſſeaux en auſſi grand nombre qu'on voudra, ſans que les rames s'embarraſſent les unes les autres, comme cela arrive même ſur les galeres, à moins que la mer ne ſoit calme.

Mais comme c'eſt ici un ſujet tout nouveau, il nous faut néceſſairement remonter à nos principes, ſans leſquels il me paroît abſolument impoſſible de traiter ces matieres avec aucune préciſion. Rien n'eſt communement plus vague que l'examen des machines qu'on propoſe pour de certains effets, on les réduit à rien quand on a formé l'intention de les réjetter, & on en groſſit les effets à l'infini quand on veut faire valoir ſes nouvelles idées. Mais ſuivant nos méthodes, on n'eſt plus maître de rien, on conſulte la nature, & on eſt obligé de s'en tenir ſimplement & purement à ſa déciſion. Je ne me propoſe point de forcer la nature à nous donner ce qui n'eſt pas en ſon pouvoir; voyons donc ce que nous pouvons nous promettre de l'action oblique des rames

XXI.

Fig. IV. Soit $A\ B$ la quille d'un vaiſſeau, mu avec une vîteſſe C de A vers B dans des eaux calmes; qu'on ſuppoſe en ſuite une pale verticalement plongée dans les eaux, mais obliquement à la quille, cette pale eſt répréſentée par la ligne $C\ D$; ſoit enfin cette pale pouſſée avec une vîteſſe v, de $C\ D$ en $c\ d$, ſous une direction $C\ c$, ou $D\ d$, perpendiculaire au plan vertical de la quille, de maniere que la pale conſerve conſtamment le paralleliſme, il eſt clair que de cette façon la pale aura un double mouvement, l'un parallele à $A\ B$ avec une vîteſſe C, qui reſulte du mouvement du vaiſſeau, & l'autre perpendiculaire au premier avec une vîteſſe v; & il faut, avant toutes choſes, examiner quels efforts la pale ſouffrira par la réſiſtance des eaux en conſidérant ce double mouvement. De ces efforts connus, il faudra tirer l'effort utilement employé, pour entretenir le vaiſſeau

vaiſſeau dans ſon mouvement, & enfin le travail requis pour cette nouvelle maniere de voguer. Dans l'application de cette nouvelle théorie il faudra des deux côtés du navire un nombre égal de ces pales obliques, & je ferai voir que toutes ces pales obliques pourront agir ſans aucune interruption ; je répréſenterai la ſomme des pales tout d'un coup par la ſurface dont $c\,D$ fait une ſection horizontale, & j'appellerai cette ſurface S, pendant que le plan qui meſure la réſiſtance du vaiſſeau eſt exprimé par n.

XXII.

Soit à préſent la vîteſſe v, avec laquelle on pouſſe la pale oblique perpendiculairement vers le plan vertical de la quille exprimée par $C\,c$, & la vîteſſe c, avec laquelle tout le ſiſtême avance dans la direction parallele à $A\,B$, exprimée par $C\,m$, ſoit le ſinus total $= r$, le ſinus de l'angle $n\,C\,c = s$, ſon coſinus $= \sqrt{rr - ss} = \varsigma$, là-deſſus il faut réſoudre le mouvement $C\,c$ en $C\,n$, qui eſt inutile, & $n\,c = \frac{s}{r}\,v$, de même le mouvement $C\,m$ doit être réſolu en $C\,o$, qui eſt inutile, & $o,m = \frac{s}{r}\,e$, par là on voit que la pale eſt pouſſée perpendiculairement contre les eaux en deux ſens directement oppoſés, ſcavoir de n vers c, & de o vers m ; ici il faut voir lequel des deux mouvemens perpendiculaires au plan de la pale prenant ſur l'autre, ſi $n\,c$ eſt plus grand que $o\,m$, la configuration de la ſurface de la pale du côté du point m ſeroit tout à fait indifférente, quand même cette ſurface ne ſeroit pas plane, & ſi le mouvement $n\,c$ étoit plus petit que le mouvement $o\,m$, alors la ſurface qui regarde le point c ſeroit indifférente ; pour notre maniere

de naviguer le mouvement $n\,c$ doit toujours être plus grand que ſon mouvement contraire, & enfin $n\,c - o\,m$ exprimera le mouvement perpendiculaire abſolu de la pale contre les eaux; ce mouvement perpendiculaire abſolu eſt donc $= \frac{s}{r}\,v - \frac{s}{r}\,c$: enſuite le quarré de cette vîteſſe, multiplié par la ſurface S, marquera l'effort perpendiculaire des eaux contre la pale, lequel par conſéquent ſera $= \left(\frac{s}{r}\,v - \frac{s}{r}\,c\right)^2 S$. Enfin cet effort perpendiculaire doit pour notre deſſein être encore réſolu en deux preſſions latérales, l'une perpendiculaire au plan vertical de la quille, qui ſera $= \frac{s}{r} \times \left(\frac{s}{r}\,v - \frac{s}{r}\,c\right)^2 S$, & l'autre parallele à la quille qui ſera $= \frac{s}{r} \times \left(\frac{s}{r}\,v - \frac{s}{r}\,c\right)^2 S$. La premiere marque la force avec laquelle il faut pouſſer la pale de $C\,D$ en $c\,d$, & ſi nous la nommons π, nous aurons $\pi = \frac{s}{r} \times \left(\frac{s}{r}\,v - \frac{s}{r}\,c\right)^2 S$. La ſeconde marque la force avec laquelle tout le ſiſtême eſt pouſſé de A vers B, & celle-ci doit être égale à la réſiſtance des eaux contre la proue du vaiſſeau; ſi donc cette réſiſtance eſt nommée P, on aura $P = \frac{s}{r} \times \left(\frac{s}{r}\,v - \frac{s}{r}\,c\right)^2 S$. Comme la réſiſtance du vaiſſeau P, eſt égale au quarré de la vîteſſe c multipliée par la ſurface n, nous aurons $n\,c\,c = P = \frac{s}{r} \times \left(\frac{s}{r}\,v - \frac{s}{r}\,c\right)^2 S$. De cette équation nous pourrons tirer la relation entre v & c puiſqu'elle nous donne $v = \left(\frac{s}{s} \times \frac{r}{s} \sqrt{\frac{n}{S} \times \frac{r}{s}}\right) c$. Enfin remarquons auſſi que $\pi : P = s : s$, ou $\pi = \frac{s}{s}\,P$, on pourra employer chacune de ces équations ſuivant les différentes queſtions qu'on ſe formera.

XXIII.

Voici à préſent les réſultats, qui nous ſont néceſſaires.

I. Le travail eſſentiellement requis doit être exprimé par $P \times c$, puiſqu'il s'agit d'enlever une réſiſtance P avec la vîteſſe c.

II. Le travail actuel par la même raiſon eſt $= \pi \times v$, puiſqu'on exerce continuellement une preſſion π contre la pale, & que la pale eſt pouſſée avec la vîteſſe v.

III. Ainſi le travail actuel eſt au travail eſſentiellement requis comme $\pi \times v$ eſt à $P c$, ou comme $\frac{s}{\varsigma} P v$ à $P c$, ou comme $s v$ à ςc, ou enfin, (ſi on ſubſtitue pour v ſa valeur déterminée au précédent §) comme $f + \frac{r}{\varsigma}\sqrt{\frac{\pi}{S} \times \frac{r}{\varsigma}}$ eſt à f.

C'eſt cette derniere Anologie, qui faiſoit l'objet principal de ces recherches.

XXIV.

J'admire ici laconſervation perpetuelle des travaux & de leurs effets, puiſque le travail actuel devient parfaitement égal au travail eſſentiellement requis auſſitôt qu'il n'y a point d'effet inutile. L'effet inutile eſt ici la force vive qui réſulte du mouvement qu'on donne aux eaux par le coups de pale; mais ſi l'on ſuppoſe la ſurface S infinie, on rétranche entiérement cet effet inutile parce qu'alors on ne fait que preſſer la pale contre les eaux, ſans donner à ces eaux aucun mouvement, & la vîteſſe v devient ſimplement $= \frac{\varsigma}{s} \times c$. Ceci eſt

confirmé par notre derniere analogie, puiſque faiſant $\frac{n}{S} = o$, elle nous donne le travail actuel au travail eſſentiellement requis comme 1 à 1; ce qui marque une parfaite égalité entre ces deux travaux. Cette égalité entre le travail actuel, & le travail eſſentiellement requis ſubſiſtera en ce cas toujours, quelque valeur qu'on donne à $\frac{r}{c}$, c'eſt-à-dire, quelqu'inclinaiſon qu'on donne aux pales avec la quille du vaiſſeau. Mais auſſitot qu'on donne à la ſurface S une grandeur déterminée par celle de n, le travail actuel ſera compoſé de deux parties, l'une utile & égale au travail eſſentiellement requis, l'autre inutile, & qui eſt en pure perte. Ces deux parties ſeront en raiſon de 1 à $\frac{r}{c}\sqrt{\frac{n}{S}\times\frac{r}{c}}$; & comme tout travail a ſon effet, avec cette ſimple différence, qu'il y a des effets inutiles par rapport à celui qu'on ſe propoſe, on n'a qu'à diminuer autant qu'il eſt poſſible le travail inutile pour obtenir le plus grand effet poſſible.

Cette conſidération nous conduit à cette regle pour la ſurface S non infinie, qu'il faut rendre le coſinus de l'angle $n\,C\,c$, preſqu'égal au ſinus total r, c'eſt-à-dire, que la pale $C\,D$ doit être dirigée preſque perpendiculairement à la quille & n'être inclinée que très-peu; alors le travail utile ſera au travail inutile preſque comme 1 à $\sqrt{\frac{n}{c}}$. Ce qui fait entiérement le même rapport que celui que nous avons trouvé au § 7. Part. prem. pour l'uſage ordinaire des rames.

XXV.

Nous voyons donc qu'en ſe ſervant de cette eſpece de rames, le travail inutile eſt par rapport au travail

total ſenſiblement le même que dans l'uſage des rames ordinaires, ſi on fait la ſurface S de part & d'autre la même, pourvu que le plan de la pale ſoit preſque perpendiculaire à la quille du vaiſſeau; mais d'un autre côté nous verrons de plus en plus, que les rames obliques ont un avantage infini ſur les rames ordinaires & directes, lorſque les rames doivent être appliquées à un grand vaiſſeau. Cependant comme il arrive ſouvent que les préceptes de la théorie, pour ſe mettre dans le plus grand avantage, ſont ſujets dans l'exécution à de certains inconveniens accidentels, j'examinerai les différentes circonſtances que la diverſité de l'angle formé par le plan de la pale avec la quille entraîne, je commencerai cet examen en ſuppoſant d'abord la ſurface S infinie.

(a) Plus cet angle eſt grand, plus il faudra donner de vîteſſe à la pale, puiſque $v = \frac{5}{3} c$; cette vîteſſe devroit être infinie ſi ledit angle étoit droit; pour un angle de 80^{d}, on auroit $v = 5,67\ c$; pour un angle de 70^{d}, ou aura $v = 2,74\ c$, ou $= 1,73\ c$. Si on ſuppoſe la vîteſſe du vaiſſeau par exemple de quatre pieds par ſeconde, on aura pour les angles de 80, 70 & 60 degrés les vîteſſes v de 22, 68; de 10, 96; & 6, 92. pieds par ſeconde.

(b) Si on deſtine une ſeconde de tems à chaque excurſion, les pales doivent parcourir un eſpace de 22, 68. de 10, 96. ou de 6, 92. pieds, ſuivant que l'angle $m\,C\,o$ eſt de 80, de 70, ou de 60 degrés; & ſi au lieu d'une ſeconde, on en prenoit une & demie, leſdites eſpaces deviendroient encore plus grandes en raiſon de 2 à 3.

(c) En ſuppoſant la vîteſſe du vaiſſeau du premier rang de quatre pieds par ſeconde, on obtient $P =$

2800 livres, & comme (§ 22.) $\pi = \frac{s}{r} P$; nous aurons pour les angles de 80, 70 & 60 degrés, pour π les valeurs de 494, de 1022, & de 1618 livres. Ces poids marquent pour chacun des différents cas la preſſion totale, ou la ſomme de toutes les preſſions que l'équipage doit exercer contre les pales ; ainſi pour avoir la preſſion contre chaque pale, il faut diviſer ceſdits poids par le nombre des pales, en ſuppoſant que celles-ci agiſſent ſans interruption, ce que nous verrons pouvoir ſe faire.

(*d*) Si la ſurface S n'eſt pas aſſez grande pour pouvoir être cenſée infinie, la viteſſe v, devient plus grande que $\frac{s}{5} c$, le ſurcroit de vîteſſe ſera exprimé par $\frac{r}{s}\sqrt{\frac{n}{s}} \times \frac{r}{5} \times c$. C'eſt ce ſurcroit de vîteſſe, qui n'augmente aucunement la vîteſſe du vaiſſeau, tant que les hommes agiſſent avec la même force ſur les pales, & qui rend une partie du travail inutile ; & comme les travaux, quand les preſſions ſont égales, ſont en raiſon des vîteſſes, il s'enſuit que le travail utile eſt au travail inutile comme $-\frac{s}{5} c$ eſt à $\frac{r}{s}\sqrt{\frac{n}{s}} \times \frac{r}{5} \times c$, c'eſt-à-dire, en raiſon compoſée réciproque de la raiſon ſeſquipliquée des coſinus de l'angle $n C c$, & de la raiſon ſouſdoublée de la ſurface S, comme nous avons déja dit dans le précédent article : ſuppoſons, par exemple, $S = 600$ pieds quarrés, ou $\frac{n}{s} = \frac{1}{4}$, en retenant $c = 4$ pieds par ſeconde, nous aurons en faiſant ſucceſſivement l'angle $m C n$ de 80, 70 & 60 degrés, la vîteſſe néceſſaire v égale à 22, 68 + 11, 60. ou 10, 96 + 6, 01. ou 6, 92 + 4, 29. ou bien $v = 34$, 28. ou 16, 97. ou 11, 21 pieds par ſeconde ; ſi on employe une ſeconde de tems pour chaque faccade, chaque excur-

ſion des pales aura le même nombre de pieds; & comme il ne convient pas de faire ces excurſions exceſſivement grandes, il faudra encore ſe relâcher un peu ſur l'avantage qu'on obtient de la grandeur de l'angle de l'inclination des pales.

(*e*) Nous verrons, dans l'application de cette théorie, qu'il n'eſt pas difficile de donner à S la valeur de 600 pieds quarrés, & ſi mon deſſein étoit de ne faire voir que le beau côté de ma nouvelle maniere de naviger, j'aurois pu la ſuppoſer plus grande ſans tomber dans des inconveniens conſidérables, mais j'aime mieux prendre les choſes au pis; la même maxime m'engage à ne donner à l'angle $m\ C\ n$, que la valeur de 60d, quoique j'euſſe peut-être pu le ſuppoſer de 10d, car l'étendue des excurſions n'eſt pas un inconvenient fort eſſentiel, d'autant moins qu'on peut y employer auſſi peu de tems qu'on le trouve à propos: le travail que je propoſerai ſera fort ſemblable à celui de ſcier du bois, dans lequel on fait facilement deux mouvemens dans une ſeconde de tems, & chaque mouvement de deux pieds. Or en ſuppoſant $S = 600$ pieds quarrés, & l'angle $m\ C\ n$ de 60d, nous avons vu dans la note (*d*), que le travail utile eſt au travail inutile comme 10 96 eſt à 6, 01. & par conſéquent le travail utile au travail total comme 10, 96 à 16, 97. Donc dans ces ſuppoſitions le travail utile fait $\frac{1096}{1697}$, ou 0, 645. du travail total, & il y a à remarquer, que c'eſt-là dans notre maniere de voguer preſque l'unique perte qu'on fait, comme je le ferai voir dans la ſuite.

Après avoir bien peſé toutes les circonſtances, je ſuis bien perſuadé que le travail utile ſera au moins 0, 550 du travail entier, pendant que nous n'avons trouvé dans notre premiere Partie § 25 que 0, 446 pour les galeres voguant à toutes rames.

Il ſuit donc de là que notre nouvelle navigation eſt plus profitable, quoique appliquée aux grands vaiſſeaux, que n'eſt l'uſage ordinaire des rames ſur les galeres, & on a certainement tout lieu d'être content d'un tel réſultat. Encore eſt il certain que le travail utile ſur les galeres exprimé par 0, 446, eſt pris tout au plus haut, car il eſt fondé ſur la grandeur du plan de réſiſtance de 16 pieds, pendant que M. Bouguer ne donne à ce plan que 10 pieds, & ſi nous avions ſuivi l'eſtime de M. Bouguer, nous n'aurions trouvé pour le travail utile ſur les galeres, que 0, 279, ce qui ne feroit qu'environ la moitié du travail utile qui provient de l'emploi de nos rames obliques.

(*f*) Si le travail utile eſt 0, 550 du travail entier, le vaiſſeau prendra par le travail ordinaire de 500 hommes la vîteſſe $5, 55 \times \sqrt[3]{0, 550}$. ou 4, 54. & par un travail forcé 5, 63. Ces vîteſſes ſont ſans doute conſidérables puiſqu'elles ſont plus, que les $\frac{4}{5}$ des vîteſſes poſſibles entiéres; & comment pourroit-on ne pas s'en contenter, quand on fait réflexion que 500 hommes ſur notre grand vaiſſeau ne font pas plus, que 53 hommes ſur les galeres, qui tout au plus ſouffrent pour des vîteſſes égales $\frac{16}{150}$ de la réſiſtance du grand vaiſſeau, ce ſeroit donc n'être pas content, que 53 hommes donnaſſent par un travail ordinaire aux galeres une vîteſſe à faire plus de quatre pieds & demi par ſeconde.

XXVI.

J'ai prevenu dans la note (*e*), du précédent article, que j'ai imaginé une maniere de rendre l'action des pales contre les eaux continuelles, cela demande une explication préalable. Nous avons vu, que pendant que la pale

C D

$C\,D$ eſt pouſſée en $c\,d$, le vaiſſeau ſera pouſſé ſuivant la direction $A\,B$; pour obtenir le même effet en repouſſant la pale, & en l'éloignant des bords du vaiſſeau, il n'y a qu'à imaginer un mecaniſme, qui faſſe tout d'un coup un peu tourner la pale, & lui faire prendre la poſition $c\,d$, à la place de ſa poſition précédente $c\,d$; je propoſerai un moyen aſſez facile pour obtenir ce renverſement préciſement aux momens qu'on commence à pouſſer ou à repouſſer la pale. Dans ce mecaniſme l'angle $c\,r\,c$ doit être double de l'angle $n\,C\,c$, & par conſéquent de 60^{d}, pour l'hypothèſe de la note (*e*).

XXVII.

Les rames, qui ſoutiennent les pales ſeront ſuſpendues verticalement, la pale enfoncée dans l'eau, & le reſte dans l'air, chaque rame aura au bout deux tourillons qui entreront dans des viroles, ces tourillons ſerviront à ſoutenir la rame, ils ſeront parfaitement horizonteaux, & paralleles à la quille, & ne permettront à la rame d'autre mouvement que celui de balancer dans un plan vertical perpendiculaire à la quille ; les viroles deſtinées à recevoir les tourillons ſeront menagées dans des ſolives ou pieces de bois, qui ſortent hors du vaiſſeau aſſez pour permettre aux rames leur jeu ; le maniement conſiſtera à approcher & éloigner alternativement les rames des bords du vaiſſeau moyennant une longe manivelle. Le hommes deſtinés à ce travail pourront être également placés ſur le tillac, ou dans les entreponts, il y en aura pluſieurs appliqués à la même manivelle, qu'ils tiendront horizontalement, & avec laquelle ils tireront & pouſſeront alternativement la rame ; la diſtance depuis les tourillons juſqu'à la manivelle ne ſera que le tiers, ou le quart de toute

la longueur de la rame; de cette façon chaque allée & venue ſera d'environ trois pieds, qui ſe feront dans une ſeconde de tems avec un effort d'environ vingt livres pour chaque homme, ce qui fait, à mon avis, le travail le plus naturel des hommes.

XXVIII.

Il ne nous reſte plus qu'à donner quelqu'idée de la façon de renverſer à propos les pales, de façon que la ſurface qui pouſſe les eaux ſoit toujours tournée du côté de la poupe. On pourra pour cet effet compoſer la rame de deux pieces, une partie de la piece inférieure entrera dans la ſupérieure, de maniere que celle d'enbas tourne librement ſur ſon axe. Soit *A B C D* le bout de la piece ſupérieure creuſée pour recevoir le bout de la piece inférieure *E F G H*, qu'on faſſe dans la piece ſupérieure une rainure *m n p q*, & que l'amplitude de l'arc *m q* ou *n p* ſoit d'un peu plus de 60d, qu'on ajoute à la piece inférieure *E F G H* une eſpece d'arrêt formé en boſſe repréſenté par *r s*, dont la hauteur *r s*, ſoit tant ſoit peu plus petite, que la hauteur de la rainure. Cet arrêt eſt deſtiné à toucher & heurter alternativement contre les bords *m n* & *p q* de la rainure, & il avancera un peu hors de la rainure, la manivelle qui doit ſervir à pouſſer & repouſſer la rame pourra être appliquée en *o* au millieu de l'arrêt *r s*, de maniere que la direction de la manivelle ne paſſe pas par l'axe de la rame, mais qu'elle la raſe; ſoit la manivelle *o x*, & que les hommes la tirent vers eux, alors l'arrête *r s* viendra auſſitôt à heurter le bord *m n*, & *y* reſtera comme collée pendant tout le tems qu'on tire la rame; mais auſſitôt qu'on commence à la repouſſer, l'arrêt *r s* ſe mettra contre l'autre bord *q p*, & *y* reſtera pen-

Fig. V.

dant tout le tems qu'on employe à repouſſer la rame, & ce mouvement de l'arrêt $r s$, ſervira à renverſer alternativemeet la pale. On voit que ce mecaniſme demande que la verticale $t u$, qui partage également l'amplitude de m, ou $n p$ prolongée reponde préciſement à l'axe des tourillons, par leſquels la rame eſt ſuſpendue. Je n'ay expoſé ce mecaniſme que pour faire voir que je ne ſuppoſe rien, qui ne ſoit facile dans l'exécution ; les artiſtes ſçauront peut-être ſubſtituer à cet artifice un autre beaucoup plus convenable & je demande à ceux-ci de l'indulgence ſur la maniere de m'être énoncé ſur cet article. J'ai ajouté la planche ſeconde pour expliquer mieux mes penſées. *Pl. 2. Fig. 6. 7. 8.*

XXIX.

J'ai dit préalablement dans la note (f) du § 25, que 500 hommes pourront donner au vaiſſeau par cette manœuvre une vîteſſe à faire $4\frac{1}{4}$ pieds par ſeconde ; c'eſt-là ſans doute un réſultat, dont ont a tout lieu d'être content, mais que nous n'avons trouvé que par la méthode analytique ; procédons à préſent ſynthétiquement ; quand notre grand vaiſſeau fait $4\frac{1}{2}$ pieds par ſeconde, il ſouffre une réſiſtance continuelle de 3500 livres ; s'il y a 50 rames, 25 de chaque côté, chaque pale doit ſurmonter une réſiſtance de 70 livres ; ſi la pale eſt inclinée de 60d, il faut pour avoir la force avec laquelle on attire ou repouſſe la pale, multiplier 70 livres par le rapport du ſinus de 30d à ſon coſinus, c'eſt-à-dire par $\frac{50000}{86602}$, ce qui fait à-peu-près 44 livres, ſi on fait $\frac{n}{5} = \frac{1}{4}$, c'eſt-à-dire ſi on fait la ſomme de toutes les pales $= 600$ pieds quarrés ou chaque pale de 12 pieds quarrés, l'équation $v = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{5 \times \frac{1}{5}}\right)c$ du § 22, fait $v = 12,33$; ainſi en employant une

ſeconde pour chaque agitation, la pale fera chaque fois une excurſion de 12, 33 pieds. Si on fait la diſtance depuis l'axe des tourillons juſqu'à l'endroit, où la manivelle eſt appliquée à la rame égale à $\frac{400}{411}$ parties de la diſtance du même axe des tourillons juſqu'au milieu des pales, la manivelle parcourra à chaque ſeconde une eſpace de trois pieds, & l'effort requis ſera $= \frac{411}{100} \times 44$ livres $= 180$ livres; & comme il y aura dix hommes à chaque manivelle, le travail de chaque homme conſiſtera à élever à chaque ſeconde un poids de 18 livres à la hauteur de trois pieds, & un tel travail ne fait encore que les $\frac{9}{10}$ du travail ordinaire d'un homme, j'ai reſervé cette dixieme partie pour reparer quelques pertes de très-peu d'importance qu'on pourroit encore faire de ſes forces, car pour les pertes eſſentielles, nous y avons déja eu égard en donnant à chaque pale des excurſions de 12, 33 pieds, pendant qu'elles ſeraient plus petites, ſi on donnoit plus d'étendue aux pales, ce qui diminueroit le travail requis.

XXX.

Finiſſons cette matiere par un petit parallele entre la maniere ordinaire d'employer les rames ſur les galeres, & ma nouvelle maniere de voguer, & par quelques autres réflexions. Le principal avantage de nos rames, & de la façon de les mettre en œuvre eſt ſans contredit celui de pouvoir être appliquées fort commodement à toutes ſortes de navires, depuis les plus petits juſqu'au plus grands. Il me ſemble que c'eſt-là tout ce que l'Académie demandoit; le ſecond avantage eſt de pouvoir facilement employer à cette manœuvre autant d'hommes qu'on voudra, ſans qu'ils s'embarraſſent le moins du monde, puiſqu'on pourra

multiplier le nombre des manivelles tant qu'on voudra. Le troiſieme avantage eſt que chaque homme peut-être mis dans une ſorte de travail qui lui eſt le plus naturel, & qui demande que les hommes faſſent des mouvemens d'environ trois pieds à chaque ſeconde; le vogue-avant ſur les galeres fait un mouvement beaucoup trop grand, & le rameur le plus proche de l'apoſtis fait un mouvement beaucoup trop petit. Le quatrieme avantage eſt, qu'il n'y a ici aucune interruption dans le travail, pendant que ſur une galere de trois mouvemens il n'y a qu'un ſeul d'utile; les hommes menagent donc l'inertie de leur propres corps. Le cinquieme avantage eſt que l'inertie des rames ne cauſe ici aucune perte ou très-peu, car les balancemens ſont d'une nature à ſe conſerver d'eux-mêmes. Cet article demanderoit cependant une grande diſcuſſion, ſi on vouloit le traiter avec autant d'exactitude qu'il peut l'être. Le ſixieme avantage, qui eſt encore très grand, eſt qu'on peut-ici remédier beaucoup mieux que par l'uſage des rames ordinaires à cet inconvient, ſi eſſentiel & ſi opiniâtre, qui conſiſte dans l'inſuffiſante étendue des pales; par la ſeule continuité de l'action, on triple tout d'un coup la ſurface des pales, & rien n'empêche, dans notre nouvelle navigation, d'aggrandir conſidérablement chaque pale. Tout ces avantages manifeſtes m'encouragent à propoſer avec beaucoup de confiance l'uſage des nouvelles rames dont je viens de donner la deſcription, & ne me laiſſent abſolument point douter de leur ſuccès. Il ne ſera pas difficile d'en faire des expériences préalables ſur des bateaux, & pour peu que celles-ci ſoient favorables, le ſuccès ſera certain ſur les grands vaiſſeaux. Mais tant d'avantages ne peuvent guere s'obtenir ſans tomber en même tems dans quelques petits déſavantages, que je ſuis bien éloigné de vouloir pallier. J'avoue

donc qu'on fait une petite perte du travail par l'obliquité des pales qu'on eſt obligé de leur donner pour éviter les trop grandes vîteſſes avec leſquelles il faudroit remuer les pales en les faiſant trop perpendiculaires à la quille. J'avoue encore qu'on employe inutilement le petit travail qu'il faudra employer pour renverſer les pales, en les faiſant incliner tantôt d'un côté, tantôt de l'autre. On pourroit remédier à ce petit défaut, en donnant aſſez de mouvement aux pales pour ſortir des eaux, & pour pouvoir les renverſer dans l'air, mais une telle manœuvre rendroit déja le travail un peu interrompu, & feroit en même tems, que les pales ne ſeroient pas toujours entiérement plongées dans les eaux, ce qui diminueroit la vraie ſurface *S*. On ſe contentera de la précaution d'augmenter la ſurface des pales plutôt en hauteur qu'en largeur. Voilà tout ce que j'ai pu trouver de déſavantage, & je ſuis bien perſuadé, que ces deux petites pertes ne valent pas à beaucoup près celles qu'on fait par l'uſage ordinaire des rames, lors-même qu'on eſt à portée de les employer avec toute la commodité qu'on peut déſirer. Je vois même qu'on peut ſans grand inconvenient rendre les pales plus perpendiculaires à la quille que nous ne les avons ſuppoſées dans notre évaluation, ſi on ne ſçauroit donner aſſez de mouvement aux pales en les tirant vers les bords, rien n'empêche de les en éloigner tant qu'on voudra; j'aurois pu donc ſuppoſer les pales inclinées de 70^d, ou lieu de 60^d, & par-là j'aurois diminué d'environ la moitié, la petite perte qu'on fait à cet égard; mais j'ai mieux aimé m'en tenir au plus ſûr que de pouſſer trop loin les hypothèſes du plus avantageux. Je dirai encore deux mots ſur la nature de la manœuvre; le jeu de nos rames n'eſt pas ſi arbitraire que celui des rames ordinaires, mais on n'en pourra pas moins gouverner le

vaiſſeau ſelon que les circonſtances l'exigent par les différentes combinaiſons que les rameurs peuvent faire de pluſieurs façons, les uns en arrêtant les rames, les autres en tenant les pales hors de l'eau, & d'autres encore en redoublant de force. Au reſte on voit bien que lorſqu'il s'agit ſimplement de faire du chemin, on doit être fort attentif, que les rames ne ſoient pas un ſeul moment en repos, tant que les pales ſont ſous l'eau; Le vaiſſeau en ſeroit auſſitôt rétardé; c'eſt à quoi il faut ſur tout faire attention dans ces inſtans, ou il s'agit de faire rebrouſſer les rames, ce ſont des momens, ou les hommes appliqués à la même manivelle doivent agir avec un grand concert. Je dirai à cet égard au hazard d'être traité de vetilleur, qu'il ne ſera peut-être pas inutile de menager des obſtacles des deux côtés, qui non ſeulement arrêtent tout d'un coup les rames, mais qui les rejettent même vers l'endroit d'où elles étoient venues; par un tel ou ſemblable artifice, on obtient en même tems un autre avantage, c'eſt celui de ne rien perdre abſolument du travail qu'on fait par l'inertie des rames, pourvu que leſdits obſtacles ſoient propres à faire rebondir les rames; c'eſt-là une réflexion qu'on ne doit pas négliger.

XXXI.

Voilà ſans doute la meilleure maniere de ſuppléer à l'action du vent ſur les grands vaiſſeaux par le travail des hommes, & je me flatte que tous ceux qui ſeront entrés dans nos principes en conviendront avec moi. Nous avons indiqué une maniere d'obtenir les $\frac{4}{5}$ parties de toute la vîteſſe poſſible, & cela d'une maniere qui n'a aucun inconvenient par rapport aux autres avantages, qu'on doit tâcher de conſerver. Les cinquante nouvelles rames avec tout leur appareil n'oc-

cuperont, pas plus d'eſpace que les rames ſur une ſimple galere, elles ſeront ôtées & remiſes avec beaucoup de facilité & de promptitude.

L'application & la manœuvre de ces nouvelles rames ne demandent pas le moindre changement à la conſtruction ordinaire des grands vaiſſeaux, pendant que la commodité des rameurs fait un des principaux points de vue pour la conſtruction des galeres; ſi quelqu'un s'étoit attendu a une plus grande viteſſe, il auroit eu certainement grand tort, & il quittera bientôt ce préjugé en conſidérant ſeulement que le grand vaiſſeau que nous avons pris pour exemple ſouffre une réſiſtance preſque dix fois plus grande, que n'en a une galere, & même quinze fois plus grande, ſuivant l'eſtime de M. Bouguer: ſi l'on vouloit donc prétendre, qu'un équipage de 500 hommes donnât à notre grand vaiſſeau une plus grande vîteſſe que celle que nous avons démontrée lui pouvoir être donnée, ce ſeroit prétendre que cinquante-trois rameurs, ſuivant notre eſtime, ou trente-trois, ſuivant l'eſtime de M. Bouguer, fiſſent parcourrir à une grande galere plus de $4\frac{1}{2}$ pieds par ſeconde, en n'employant qu'un travail ordinaire & ſoutenable pendant huit heures par jour, ou plus de $5\frac{1}{2}$ pieds avec un travail extrêmement forcé, car cette vîteſſe peut auſſi être imprimée au grand vaiſſeau avec un tel travail.

On ne peut donc plus s'empêcher de réconnoître notre nouvelle navigation pour la meilleure qu'on poiſſe raiſonnablement eſperer, à moins qu'on ne trouve à rédire à ce quinzieme de vîteſſe qu'on y perdra encore ſur la vîteſſe totale poſſible; mais voici une réflexion, qui nous fera bientôt perdre toute eſpérance d'obtenir jamais un plus grand ſuccès de quelque maniere qu'on s'y prenne; c'eſt qu'on aura toujours

jours indiſpenſablement beſoin de quelque choſe, qui tienne lieu de pale, puiſqu'on n'a pas hors du vaiſſeau un point fixe qui puiſſe ſervir d'appui, & on ne pourra jamais donner une étendue infinie à ce qui eſt ſubſtitué aux pales; d'où il réſultera conſtamment une perte de forces inévitable par ſa nature. Outre cette perte on en fera néceſſairement quelques autres, il y aura toujours quelque frottement, & quelques mouvemens inutiles, qu'il faille continuellement réproduire dans la matiere, qui ſera ſubſtituée aux rames, ſans parler des pertes qu'on fait lorſqu'on applique les hommes à un genre de travail peu conforme à leur conſtitution, par lequel ils ſont ſouvent bien éloignés de produire tout cet effet, que nous leur avons ſuppoſé, & duquel ils ſont très-capables, s'ils ſont duement employés. Je ne crains donc plus de propoſer notre derniere maniere de naviger par le travail des hommes, comme fort approchante de la meilleure qu'il ſoit poſſible d'imaginer, ce que j'ajouterai pourra faire voir avec combien d'attention j'ai examiné tout ce qui appartient à notre queſtion, & peut-être en même tems utile pour pluſieurs circonſtances particulieres dans leſquelles on peut ſe trouver.

XXXII.

Imaginons-nous d'abord un grand plan vertical flottant dans les eaux à une certaine diſtance depuis la proue perpendiculaire à la quille, & qu'on tire ce plan moyennant une corde d'une longueur ſuffiſante vers la proue du vaiſſeau, il arrivera que le vaiſſeau, & ce plan s'approcheront l'un de l'autre; & faiſant abſtraction de l'inertie du vaiſſeau, la vîteſſe de celui-ici ſera à la vîteſſe du plan, comme la racine du plan ſuppoſé eſt à la racine du plan, qui meſure la réſiſtance

du vaiſſeau. Ainſi la vîteſſe du plan ſuppoſé ſera encore, $= c\,v\frac{n}{S}$, ſi nous entendons, par c la vîteſſe du vaiſſeau par S le plan ſuppoſé, & par n le plan qui meſure la réſiſtance du vaiſſeau. Si on conſidéroit le plan S comme infini, ſa vîteſſe ſeroit comme o, & les hommes ne perdroient abſolument rien de leur travail, que j'exprimerai par l'unité, mais ſi le plan S n'eſt pas conſidére comme infini, on aura pour le travail utile $\frac{c}{c+v}$, & pour le travail inutile $\frac{v}{c+v}$, ou bien $\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S}+\sqrt{n}}$ pour le petmier, & $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S}+\sqrt{n}}$ pour le ſecond. Comme rien n'empêche ici de donner une très-grande étendue au plan S, & même de multiplier le nombre de ces plans à ſon plaiſir, il ſera facile d'anéantir preſque éntiérement la qualité $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S}+\sqrt{n}}$, qui marque la perte du travail, ce n'eſt pas-là la plus grande difficulté; mais ce travail preſque entiérement utile ne durera que juſqu'au moment que le vaiſſeau aura atteint ce plan contre lequ'el on l'aura tiré. Il faudra donc de nouveau éloigner le plan du vaiſſeau; cela pourroit ſe faire moyennant une chaloupe, & il ſera très-facile de faire que pendant ce tranſport le plan préſente ſon tranchant aux eaux de maniere que la chaloupe puiſſe entraîner le plan preſque avec autant de vîteſſe que les rameurs peuvent donner à la chaloupe, en la ſuppoſant entiérement libre. On pourroit auſſi compoſer ces plans de doubles battans, qui ſe replient l'un contre l'autre par la force des eaux pendant tout le tems qu'on employe à ce tranſport; dans cet intervalle il faudroit lacher la corde qui va du vaiſſeau au plan juſqu'à ce que celui-ci ſoit ſuffiſamment éloigné du vaiſſeau; après quoi on lâcheroit la corde qui va de la chaloupe au même plan, l'équipage du vaiſſeau tireroit l'autre corde, les deux battans ſe rouvriroient

pour ne faire qu'un ſeul, & même plan, & le vaiſſeau s'avanceroit vers le plan. Par une telle ou autre ſemblable manœuvre, on feroit aſſez peu de perte du travail; il y auroit pourtant toujours celle qui réſulte du défaut de la ſurface du plan, perte qu'on ne peut jamais éviter entiérement; outre cette perte on feroit encore celle du travail des hommes qui rameroient ſur la chaloupe, comme ne faiſant qu'un travail acceſſoire. Quant à la premiere perte, on a ici au moins autant de commodité pour la diminuer que par toute autre méthode, & la ſeconde perte peut être facilement negligée, à cauſe du peu de proportion qu'il y a entre les rameurs ſur la chaloupe, & les hommes qui travaillent ſur le vaiſſeau; mais le plus grand inconvenient conſiſteroit dans la perte du tems que chaque allée de la chaloupe demanderoit; cependant comme cet intervalle ſeroit en même tems un repos parfait pour l'équipage du vaiſſeau, cet équipage pourra redoubler ſes efforts par un travail forcé pendant tout le tems de leur travail actuel; cette alternative de repos, & de travail forcé remettroit l'équipage dans le cas d'un travail ordinaire, & ſoutenable pendant pluſieurs heures de ſuite, & l'effet d'un tel travail alternativement interrompu ſeroit le même auſſi à-peu près que celui d'un travail ordinaire non interrompu, mais on pourra auſſi prévenir cette interruption en employant deux chaloupes; dont chacune faſſe alternativement avec l'autre la fonction que nous avons expoſée.

XXXIII.

Je me contenterai d'avoir indiqué cette nouvelle maniere de naviguer; je ſerois trop long, ſi je voulois examier en détail tout ce qu'une telle idée demande pour l'exécution, & pour ſa perfection, &

après tout je ne pourrois dire que des choſes qu'il ſera très-facile de voir, ſurtout à ceux qui auroit bien voulu lire avec quelque attention tout ce que nous avons déja dit dans ce Mémoire; pour moi, après avoir peſé toutes les circonſtances, je ſuis entiérement perſuadé, quon pourra de cette maniere donner au vaiſſeau au moins les $\frac{3}{4}$ de la vîteſſe poſſible totale, & on pourroit même eſperer un plus grande ſuccès, ſi au lieu des plans que nous avons ſuppoſés, on vouloit employer des corps creux conoïdiques de la moindre réſiſtance, & fort longs dont la baſe ſeroit tournée du côté du vaiſſeau, & la pointe vers la chaloupe, on pourroit de cette maniere faire les intervalles du travail fort petits, les rameurs ſur la chaloupe ne donneroient que quatre ou cinq coups des rames pour avancer ces corps, & puis l'équipage les retireroit avec beaucoup de vigueur vers le vaiſſeau; il ſeroit même facile de faire enſorte que ces corps coniques creux ſe fermaſſent toutes les fois qu'ils ſeroient tirés par la chaloupe, & s'ouvriſſent lorſqu'ils ſeroient tirés par le vaiſſeau; rien n'empêcheroit d'attacher par une même corde une file de ces ſortes de corps, leſquels offriroient une réſiſtance extrêmement grande quand ils ſeroient tirés vers le vaiſſeau, & cette réſiſtance ſeroit fort augmentée par l'inertie des eaux renfermées dans le creux de ces corps coniques pendant que la réſiſtance ſeroit extrêmement petite durant le retour de ces corps. Enfin une longue expérience ne manqueroit pas de mettre cette maniere de naviguer dans une grande perfection, quand on auroit une fois commencé à s'en ſervir; j'y vois quelques inconveniens, mais je n'en vois point d'eſſentiels qu'on ne pouiſſe eſpérer d'éviter après quelques eſſais quon auroit faits. Il eſt ſûr du moins que dans les occaſions, où l'on ne prétend que de ſimplement remorquer un vaiſſeau, on le fera avec beaucoup de

facilité, & avec un ſuccès incomparablement plus grand que par la maniere ordinaire de le faire. Je vois auſſi qu'une ſemblable manœuvre fournira à l'equipage un moyen d'exercer une plus grande force quand il s'agiroit, par exemple, de remettre un navire à flot qui ſeroit échoué ſur un banc de ſable; il y a des cas où l'on ne ſe propoſe pas de donner au vaiſſeau une grande vîteſſe, mais ſimplement de le remettre en mouvement, & dans ces cas on doit s'appliquer à pouvoir exercer une grande preſſion; quand on a des points fixes, on peut obtenir une preſſion auſſi grande qu'on ſe propoſe avec une preſſion auſſi petite qu'on veuille employer, mais en manquant de points fixes, comme ſur les vaiſſeaux, c'eſt une queſtion toute différente de notre ſujet principal, quelle eſt la maniere de pouſſer le plus vigoureuſement qu'il eſt poſſible un navire; l'action de pouſſer un corps en repos n'eſt qu'une force morte; mais ſur un vaiſſeau on ne ſauroit venir à bout d'exercer une tellelle action qu'avec une force vive, ou avec un certain travail qui demande une preſſion, & une vîteſſe à la fois; parce qu'à la place de points fixes, on n'a que des points, qui cedent avec de certaines réſiſtances: je trouve, par exemple, pour la galere, dont M. Chazelles à fait l'eſpérience, que la chiourme, par un travail ordinaire, ne peut enlever au de-là d'un poids de 1800, ou 2000 livres, c'eſt-à-dire, que ſi la galere étoit attachée par une corde, qui paſſât ſur une poulie, & qu'à l'autre bout il y eût un poids de 1800 à 2000 livres ſuſpendu, un tel poids arrêteroit la galere, & feroit équilibre avec les forces de la chiourme; l'effet de ce travail ne conſiſteroit donc qu'à tenir ſuſpendu un poids de 1800 à 2000 livres, qui ſeroit produit par 260 hommes, de maniere que chaque homme n'exerceroit qu'une preſſion continuelle d'environ ſept livres contre le vaiſſeau quoi-

qu'en repos, pendant que le même homme pourroit faire une preſſion continuelle infinie, ſi la pale & la longueur du manche pouvoient être cenſées infinies.

XXXIV.

S'il eſt ſûr que nous avons indiqué toutes les meſures qu'on peut prendre pour tirer le plus grand ſuccès qui ſoit poſſible du travail des hommes deſtinés à ſuppléer à l'action du vent ſur les grands vaiſſeaux, & s'il eſt vrai que le plus grand ſuccès poſſible ne ſurpaſſe pas ſenſiblement le ſuccès réel qu'on obtient par les manieres de voguer les grands vaiſſeaux, que nous avons expoſées, j'oſe me flatter d'avoir ſatisfait entiérement à la queſtion propoſée par l'Académie. On ne doit pas être moins perſuadé dans la mécanique du plus grand avantage poſſible, que nous avons démontré, qu'on l'eſt dans la géometrie de renfermer le plus grand eſpace poſſible dans une péripherie circulaire; mais la généralité de nos principes eſt telle que nos réflexions ſont encore vraies, quand on ſe ſerviroit, ſur les vaiſſeaux de tout autre principe de mouvement; car de même que les hommes ſont une ſource de forces vives, toutes les choſes dont on pourroit ſe ſervir pour ſuppléer à l'action du vent renferment ſous des apparences différentes une certaine quantité de forces vives; telle eſt l'action du feu, d'un air condenſé, d'un air échauffé, celle des vapeurs, de la poudre à canon &c. Le vent lui-même eſt compris dans cette claſſe; pour tirer le parti le plus avantageux de tous ces principes, il n'y a qu'à éviter tous les effets inutiles autant qu'il eſt poſſible; alors toute la quantité de forces vives renfermées dans les choſes naturelles dont on veut ſe ſervir pour ſuppléer à l'action du vent ſera tranſmiſe dans les eaux pouſſées, & dé-

placées par la proue du vaiſſeau, ce qui fait ſeul tout l'effet utile, comme étant inſéparable d'avec la navigation. Je finirai ce Mémoire par quelques remarques ſur ce ſujet.

XXXV.

Suppoſons qu'on ait ſur le vaiſſeau en ſa puiſſance une certaine quantité de forces vives, qu'on veuille employer à faire aller un vaiſſeau ſur mer, & examinons, quel ſera le plus grand effet qu'on en pourra tirer. Soit cette quantité de forces vives exprimée par MA, c'eſt-à-dire, telle qu'une maſſe M acquiert en tombant librement de la hauteur verticale A: ſoit encore le plan d'une réſiſtance directe égale à celle de la proue $= n$, la vîteſſe du vaiſſeau $= c$, la hauteur verticale génératrice de cette vîteſſe ſera $= \frac{cc}{60}$; là-deſſus on aura la réſiſtance du vaiſſeau égale au poids d'un priſme d'eau, dont la baſe eſt n, & la hauteur $\frac{cc}{60}$, & le poids contiendra autant de livres, qu'il y a d'unités en $\frac{70\,n\,cc}{60}$; je le fais donc $= \frac{7}{6}\,n\,cc$; ſuppoſons enfin que la force vive MA ſe conſume uniformement dans un tems t exprimé en ſecondes, cela fera l'eſpace parcouru uniformement par le vaiſſeau pendant ce tems ou $s = ct$, & la force vive, que le vaiſſeau aura communiquée aux eaux $= \frac{7}{6}\,n\,cc \times s$, ou $= \frac{7}{6}\,n\,c^3\,t$. Cette formule exprime l'effet que j'appelle utile, qui réſulte de la ſomme des forces motrices contenues dans la force vive MA; & ſi toute cette force vive eſt utilement employée, je dis qu'on aura $\frac{7}{6}\,n\,c^3\,t = MA$; ce ſera là le cas du plus grand avantage poſſible, & on ne pourra jamais obtenir un plus grand effet.

Voici à préſent quelques proprietés que cette équation nous enſeigne.

α Les viteſſes c ſont en raiſon réciproque des racines cubiques des tems, pendant leſquels la force vive MA ſe conſume: on obtiendra, par exemple, une vîteſſe double en conſumant ladite force vive dans la huitieme partie du tems.

β Puiſque $S = ct$, on aura auſſi $\frac{6}{7} ncc S = MA$, ce qui marque que les vîteſſes du vaiſſeau c ſont en raiſon réciproque des racines des eſpaces que le vaiſſeau parcourt pendant que la force vive ſe conſume. On pourra donc, par exemple, moyennant une certaine quantité de forces vives, conſerver au vaiſſeau une vîteſſe double, ſi on ne veut lui faire parcourrir que le $\frac{1}{4}$ de l'eſpace.

γ Comme on peut auſſi faire $\frac{7}{6} n \times \frac{S^3}{t^3} = MA$, on voit que les eſpaces parcourus par le vaiſſeau, pendant que la force vive ſe conſume, ſont comme les racines cubiques des quarrés des tems. Il eſt donc poſſible de faire parcourir à un vaiſſeau d'une grandeur quelconque un auſſi grand eſpace qu'on voudra, moyennant une force vive auſſi petite qu'on voudra employer; mais ce ſera en ne conſumant la force vive que dans un tems ſuffiſant pour cela: cela ſuppoſe que les eaux n'ayent abſolument aucune autre réſiſtance que celle qui eſt proportionelle aux quarrés des vîteſſes, & on remarqera auſſi qu'il ne s'agit pas ici de donner au vaiſſeau un certain mouvement, mais de l'entretenir dans un mouvement déja acquis.

δ Enfin, comme la force motrice du vaiſſeau que je nomme P, eſt égale à la réſiſtance exprimée par $\frac{7}{6} ncc$, on aura encore $Ps = MA$, & par conſéquent P réciproquement

proquement proportionel à s; on pourra donc, moyennant une même force vive, obtenir une force motrice auſſi grande qu'on voudra; mais le vaiſſeau ne parcourra qu'un petit eſpace pendant tout le tems que cette force motrice dure.

XXXVI.

Pour voir la vérité de tout ce que je viens de dire, on n'a qu'à s'imaginer que le force vive MA conſiſte dans un long reſſort bandé dont un bout ſoit appuyé contre la pouppe du vaiſſeau, pendant que l'autre bout s'appuye contre un poteau, ou un autre point fixe. Il eſt évident que par une telle maniere d'employer la force vive renfermée dans le reſſort bandé, on en tire tout l'uſage poſſible. Eclairciſſons les regles par un exemple: ſuppoſons un pied cubique rempli de poudre à canon: il y a pluſieurs expériences qui prouvent que la force vive renfermée dans une telle quantité de poudre eſt pour le moins $= 200000000$ livres élevées à la hauteur d'un pied. Cet exemple fait donc $MA = 200000000$. Si on pouvoit employer cette force vive potentielle toute utilement pour faire aller un vaiſſeau du premier rang qui donne $n = 150$, qu'on voulut employer une telle quantité de poudre à chaque heure ou à chaque 3600 ſecondes, il faudroit ſubſtituer dans notre équation $\frac{7}{6} n c^3 t = MA$, pour t, 3600 ſecondes pour n, 150 pieds quarrés, & pour MA, le nombre 200000000, après quoi on trouveroit $c = \sqrt[3]{\frac{6,200000000}{7,150,3600}} = \sqrt[3]{317}$ $= 6,8$, c'eſt-à-dire, qu'on pourroit, par une telle dépenſe en poudre à canon, entretenir un vaiſſeau du premier rang dans un mouvement à faire 6, 8 pieds dans une ſeconde, & cet effet repond dans la table fondamentale à celui de 900 hommes ſuppoſés pareillement d'employer utilement toutes leurs forces avec un travail

naturel. Voici un autre exemple qui ſervira à montrer ce que l'on pourroit attendre des vapeurs & du feu. J'ai lu dans une deſcription de la grande machine hydraulique de Londres, qu'elle élevoit à chaque minute 80 pieds cubes d'eau à la hauteur de 124 pieds, comme c'eſt ici meſure d'Angleterre, je donnerai 58 livres à un pied cube d'eau, & je reduirai la hauteur de 124 pieds à celle de 116 pieds de Paris, ainſi nous aurons $MA = 80 \times 58 \times 116 = 538240$, $t = 60$, & par conſéquent $c^3 = 51261$, ou $c = 3,713$ c'eſt une vîteſſe à faire environ 3 pieds $8\frac{1}{2}$ pouces par ſeconde. Je crois à la vérité qu'il ſeroit facile d'imaginer une machine pour obtenir réellement cet effet, car je trouve que dans la machine de Londres, on perd encore une très-grande partie de l'effet qu'on pourroit, tirer de l'action des vapeurs, mais je n'en ſuis pas moins perſuadé que ces deux exemples calculés ſur des principes infaillibles ſuffiront pour nous faire perdre toute eſpérance de pouvoir ſubſtituer ſur les grands vaiſſeaux avec quelque ſuccès conſidérable les forces motrices renfermées dans les choſes naturelles aux travaux des hommes, à moins que ce ne ſoit dans des cas particuliers, qui ne demandent de ſemblables forces que pour peu de tems. Il y a après cela une autre réflexion à faire, c'eſt qu'il eſt difficile de faire un tel uſage de ces forces motrices, qu'une très grande partie de leurs effets ne ſe perde inutilement. Le principe de l'effet utile conſiſtera toujours dans la réaction d'une matiere pouſſée, & jettée en direction contraire à celle du vaiſſeau; cette matiere ne ſçauroit être que de l'eau, & la force vive qu'on imprimera à ces eaux ſera toujours un effet perdu; cette force vive perdue ſera cependant d'autant plus petite, qu'on pouſſera, ou qu'on jettera une plus grande maſſe d'eau en tems égaux, & ſi cette maſſe étoit infinie, on ne perdroit rien à cet égard. Le recul d'un canon toujours chargé de la même quantité de

poudre deviendroit deux fois plus grand, ſi on le chargeoit de quatre boulets au lieu d'un, & ſi on pouvoit faire un boulet d'un poids infini, toute la force de la poudre ſeroit *à cet égard*, employée utilement pour faire reculer le canon; je dis *à cet égard*, parce qu'on ne laiſſeroit pas de faire encore une autre perte très-conſidérable, c'eſt qu'auſſitôt que le boulet ſeroit ſorti du canon, il n'y auroit plus de réaction, & le reſte de la force de la poudre enflammée ſe perdroit encore inutilement, & ce reſte ſeroit toujours très-grand.

XXXVII.

Les réflexions que je viens de faire ſuffiſent pour voir en quoi conſiſtent les pertes qu'on fait des forces motrices en queſtion, elles ſont toutes compriſes (car je ne parlerai pas de quelques pertes entiérement accidentelles, telles que celles qui proviennent du frottement) dans le mouvement qu'on donne aux corps mobiles, qui ſervent en quelque façon d'appui, & dans la grande quantité des forces motrices qu'on laiſſe inutilement échapper, & cette derniere perte fait le plus grand défaut de toutes les machines à feu qu'on a encore imaginées. La nature de ces deux pertes nous enſeigne d'abord tout ce qu'on peut faire pour nous approcher du plus grande effet qu'on peut tirer de ſemblables forces motrices; mais je vois aſſez que cet effet ne ſauroit jamais être aſſez grand pour mériter beaucoup d'attention. Je conclus donc que ſi nous avons donné la meilleure maniere d'employer le travail des hommes pour ſuppléer à l'action du vent, nous aurons en même tems montré de toutes les manieres praticables, qui ſoient poſſibles, celle dont on tirera le plus de profit.

Fin du N° 3. 1753.

MÉMOIRE

COMPOSÉ A L'OCCASION

DU PRIX PROPOSÉ

PAR L'ACADEMIE ROYALE

DES SCIENCES.

Dont le ſujet eſt : *L'examen des efforts qu'ont à ſoutenir toutes les parties du Vaiſſeau dans le roulis & dans le tangage, & la meilleure manière de procurer à leur aſſemblage la ſolidité néceſſaire pour réſiſter à ces efforts, ſans préjudicier aux autres bonnes qualités du Vaiſſeau.*

Par M. GROIGNARD, Conſtructeur des Vaiſſeaux du Roi, à l'Orient.

Prix. 1759.

MÉMOIRE

Composé à l'occaſion du prix propoſé par l'Académie Royale des Sciences, dont le ſujet eſt : *L'examen des efforts qu'ont à ſoutenir toutes les parties du Vaiſſeau dans le roulis & dans le tangage, & la meilleure manière de procurer à leur aſſemblage la ſolidité néceſſaire pour réſiſter à ces efforts, ſans préjudicier aux autres bonnes qualités du Vaiſſeau.*

Vis unita major.

L'on entend par *tangage*, les balancemens que le vaiſſeau fait dans le ſens de ſa longueur, ou de l'avant à l'arrière; & par *roulis*, ceux qu'il fait dans le ſens de ſa largeur, ou d'un côté à l'autre.

Ces mouvemens peuvent être plus ou moins vifs, ſuivant la variation des impulſions du vent ſur les voiles, & des lames ſur les extrémités, ou ſur les côtés du vaiſſeau.

Pluſieurs géomètres, & ſur-tout M. *Bouguer*, ont traité fort au long des cauſes du tangage & du roulis, & de la figure la plus avantageuſe qu'il faudroit donner aux vaiſſeaux pour diminuer leurs effets. Il ſeroit à

ſouhaiter que leurs écrits, auſſi utiles que ſçavans, fuſſent plus à la portée des perſonnes qui pourroient les appliquer à la pratique, & qui n'ont guères le temps d'étudier les calculs qui en démontrent les vérités.

Mon but, dans cet ouvrage, eſt d'examiner en détail les efforts que chaque partie du vaiſſeau doit reſſentir des mouvemens du tangage & du roulis, & de procurer à chacune de ſes parties le plus de force & de réſiſtance poſſible contre les efforts qu'elle doit ſoutenir.

Pour me conformer à l'intention de l'Académie, qui me paroit avoir en vue de perfectionner la pratique de la conſtruction, je ferai tous mes efforts pour ne rien établir qui ne ſoit démontré par l'expérience, applicable à la pratique, & à la portée de toutes les perſonnes qui devront le pratiquer.

Le ſujet que j'ai a traiter ayant pour objet deux mouvemens différens, j'ai cru qu'il étoit à propos de le diviſer en deux chapitres.

Le premier traitera des efforts du tangage, le ſecond des efforts du roulis. Après avoir détaillé les moyens de fortifier chaque partie du vaiſſeau contre ces efforts, je terminerai chaque chapitre par quelques réflexions applicables à la pratique, ſur la figure du vaiſſeau, & la diſtribution de la charge la plus avantageuſe pour diminuer les effets du tangage & du roulis.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE PREMIER.

Des mouvemens du tangage.

LES mouvemens de tangage que reçoit le vaiſſeau dans le ſens de ſa longueur, peuvent être produits de deux façons : 1°. lorſqu'une lame, en frappant une de ſes extrémités, l'oblige de s'élever, tandis que l'autre s'enfonce : 2°. lorſque, la mer s'abaiſſant tout-à-coup ſous la proue ou ſous la pouppe, cette partie, n'eſt plus ſoutenue, retombe & entraîne avec elle qui n[illegible] vaiſſeau, avec une vîteſſe & des ſecouſſes le reſte du [illegible]rtes, que ſes extrémités ſont plus taillées & chargées d'u[illegible] qui ſe font toujours ſentir ſur d'autant plus fo[illegible]n plus grand poids.

Ces efforts répétés [illegible] tandis que la partie du milieu ſe trouve plus ſoutenue p[illegible]r la pouſſée verticale des extrémités du vaiſſeau, [illegible]eux que recevroit de l'eau, peuvent être comparés a[illegible] recourber en une taſſe en gondole que l'on voudroit [illegible]evroit 1°. deſſous, en peſant ſur ſes extrémités. Elle [illegible]our-s'allonger par en haut, 2°. ſe recourber & ſe rac[illegible]cir par en bas, 3°. enfin ſe retroicir. Ainſi, pour procurer aux vaiſſeaux le plus de ſolidité contre les mouvemens du tangage, on doit s'attacher à empêcher ces trois effets autant qu'il eſt poſſible.

ARTICLE PREMIER.

Des moyens d'empêcher que le vaiſſeau s'allonge par en haut.

LE vaiſſeau ne peut s'allonger par en haut, ſans que toutes ſes parties cédent en raiſon des efforts qu'elles ont à ſoutenir : d'où on peut conclure que moins il

aura de parties ſuſceptibles d'allongement, plus il aura de difficulté à s'allonger. Examinons en détail quelles ſont les parties du vaiſſeau qui peuvent s'allonger dans le ſens de ſa longueur ; & voyons s'il ne ſeroit pas poſſible de leur donner une nouvelle forme plus avantageuſe, & de les lier plus étroitement, en diminuant le nombre de leurs écarts ou de leurs joints dans le ſens de la longueur du navire, ſans qu'il ſoit néceſſaire d'augmenter la peſanteur ni la force des pièces qui ſont déjà proportionnées à chaque rang de vaiſſeau, & que l'on ne ſçauroit admettre aux petits navires, ſans les rendre plus lourds & ſans faire tort à la conſtruction des gros vaiſſeaux.

De la partie de l'avant du vaiſſeau, qu'on nomme la proue.

En jettant les yeux ſur la *figure 1ere.*, qui repréſente le plan d'élévation de la proue du vaiſſeau, on voit que cette partie de l'avant eſt compoſée d'une infinité de pièces A, qu'on nomme *allonges d'écubier.* Ces pièces ne ſont liées les unes aux autres que par des chevilles à pointes perdues, & peuvent ſe déſunir toutes dès que ces chevilles ont le moindre jeu, qu'elles acquerent très-facilement par le poids & le frottement des allonges d'écubier qui ſe trouvent, pour ainſi dire, en l'air, & portent à faux, à cauſe de l'élancement de l'*étrave P.*

Pour procurer à ces pièces plus de liaiſon entr'elles, on met en dedans des *guirlandes* ou fortes pièces horizontales & obliques B, qui les recroiſent vis-à-vis des ponts dans la calle, &c. Mais ces pièces ne ſont de liaiſon avec les allonges d'écubier, que par les chevilles qui les traverſent, qui ont de la peine à ſoutenir leur peſanteur ; & ces guirlandes ne ſont jamais aſſez longues pour dépaſſer les allonges d'écubier,

& les lier avec les membres : de ſorte que cette partie de l'avant n'a de liaiſon avec le reſte du vaiſſeau, que par les bordages extérieurs & intérieurs, & ſe délie d'autant plus aiſément dans les mouvemens du tangage, qu'elle eſt extrêmement lourde & maſſive, ſans que ſes parties ſoient liées entr'elles ni avec le reſte du vaiſſeau.

Au lieu de terminer la partie de l'avant du vaiſſeau, comme on l'a pratiqué juſqu'aujourd'hui, j'ai imaginé une nouvelle façon de former cette partie, où l'on trouvera non ſeulement plus de légèreté & une meilleure liaiſon pour diminuer & réſiſter aux efforts du tangage, mais encore les autres avantages que j'ai cru devoir détailler à la fin de cet ouvrage, en démontrant les inconvénients de la méthode ordinaire.

De la partie de l'arrière qu'on nomme l'arcaſſe.

La partie de l'arrière du vaiſſeau, telle que l'exécutent les plus habiles conſtructeurs, ne laiſſe rien à deſirer : auſſi voit-on que cette partie qu'on nomme l'*arcaſſe* ne ſe reſſent preſque plus des efforts du tangage, quand elle eſt telle que la repréſentent les figures 7 & 8, formée par des pièces *A* en forme de varangues acculées & fourcats parallèles à la quille, entaillées & chevillées à l'*étambot B* & prolongées juſqu'à l'*eſtain C*, qui eſt dévoyé & porté le plus en avant qu'il eſt poſſible, pour être recroiſé en dehors par une plus grande quantité de bordages, & en dedans par les vegres, marſoins & courbes d'écuſſon obliques, qui ſont prolongées fort en avant pour lier cette partie de l'arrière avec le reſte du vaiſſeau.

C'eſt la ſolidité de l'arcaſſe ainſi formée, & d'autant plus grande qu'on diminue la ſaillie de la voûte & de l'*étambot*, qui autoriſe la nouvelle forme que je propoſe de donner à l'avant ou à la proue du vaiſſeau.

Des membres, ou couples.

Après avoir rendu les parties de l'avant & de l'arrière, qui ſont celles qui fatiguent le plus, auſſi ſolides qu'elles peuvent l'être contre les efforts du tangage, examinons ſi la partie du vaiſſeau compriſe entre ces deux extrêmes ne ſeroit pas auſſi ſuſceptible d'une meilleure forme, pour réſiſter aux mêmes efforts.

Cette partie intermédiaire eſt compoſée, comme on le voit dans les figures 9, 10, 11, d'une quantité d'éléments *A*, qu'on appelle couples ou membres; & ces membres non ſeulement n'ont aucune liaiſon les uns avec les autres, avant que le vaiſſeau ſoit bordé & végré, mais même ils ſont faits de façon, que les parties qui les compoſent, peuvent ſe déſunir ſans peine & faciliter l'allongement du vaiſſeau, bien loin de s'y oppoſer.

Effectivement, chaque membre compoſé de deux rangs de pièces *B C*, miſes bout à bout & à côté les unes des autres pour recroiſer les écarts, & qui ſe joignent, dans le ſens de la longueur du vaiſſeau, par des chevilles qui ne peuvent être rivées ni goupillées, doit ſe déſunir au moindre effort que le vaiſſeau fait pour s'allonger. De la déſunion des membres vient celle des bordages, préceintes, végres, beauquières, ſur leſquels ces pièces ſont clouées & chevillées: de ſorte que les membres doivent être regardés comme la partie eſſentielle à la liaiſon du navire, & que de leur ſolidité & de leur union dépend, en partie, celle de tout le vaiſſeau dans les mouvemens du tangage. On ne ſçauroit donc trop s'attacher à les former de la façon la plus ſolide & la moins ſuſceptible de déſunion ou d'allongement; & j'ai imaginé, en conſéquence, une nouvelle méthode de former les couples ou les membres des vaiſſeaux, (*fig.* 12e, 13e.

14e.) qui ne ſçauroient s'allonger dans le ſens de ſa longueur, en même temps qu'ils ſoutiendront les écarts des bordages, préceintes, beauquières, qui ne pourront ſe déſunir ſans que les chevilles caſſent ou les fibres du bois s'allongent & ſe compriment.

Comme ces nouveaux membres *A*, *fig. 12e, 13e, 14e*, ſeroient également avantageux contre les efforts du tangage & du roulis, j'ai cru devoir détailler à part, & un peu au long, à la fin de ce mémoire, la façon de les former, qui réunit beaucoup d'autres avantages également utiles à la pratique de la conſtruction.

La proue, l'arcaſſe & les membres des vaiſſeaux faits comme je le propoſe, de façon que chacune de ces parties bien & ſolidement liée ne puiſſe céder aux mouvemens du tangage, je pourrois, ſans le ſecours du bordage & du végrage, joindre toutes ces parties les unes avec les autres, pour former un tout depuis l'étrave juſqu'à l'étambot qui peut déjà réſiſter aux efforts que le vaiſſeau voudroit faire pour s'allonger, & même le mettre en état d'être mis à flot & de pouvoir naviguer.

Il ſuffiroit, pour cela, de placer, *fig. 15e*, entre chaque intervalle ou maille des membres, à toutes les empatures ou écarts des pièces, des rempliſſages ou clefs *C*, de quatre à ſix pieds de longueur entaillées à queue dans les deux membres *A*, qu'elles joindroient: & aux endroits où ſont percés les ſabords *I*, on placeroit des feuillets *S*, entaillés auſſi à queue, pour joindre les membres de cette partie.

Toutes ces pièces & feuillets ainſi entaillés, ſerreroient les membres les uns contre les autres, avec les parties de l'avant & de l'arrière, & l'on conçoit que la coque d'un vaiſſeau ainſi formée ſeroit très-difficile à déſunir, & même que ſi ces calles, ou rempliſſages *C* ſe joignoient bout à bout, depuis la quille juſqu'au plat-bord, & ſi on calfatoit les joints, un pa-

reil vaiſſeau pourroit être mis à flot & naviguer peut-être avec ſureté ; au lieu que ceux faits ſuivant l'uſage ordinaire ſont toujours prêts à ſe déſunir, & ne ſçauroient ſoutenir aucun effort dans le ſens de leur longueur avant d'avoir été bordés & végrés.

Des ponts.

Les ponts ou planchers des vaiſſeaux (*fig.* 16e.), peuvent être regardé comme les cordes d'un arc, qui eſt d'autant plus difficile à détendre, que ces cordes ſont plus fortes & moins ſuceptibles d'allongement.

La première attention que l'on doit avoir, c'eſt de diminuer, le plus qu'il eſt poſſible, la courbure des ponts dans le ſens de la longueur du vaiſſeau, parce que cette courbure leur permet de ſe redreſſer & de s'allonger ſans difficulté, & alors ils ne font pas plus d'effet ſur les extrémités du vaiſſeau, qu'une corde lâche ſur l'arc qui voudroit ſe détendre.

Les ponts ſont compoſés de pluſieurs pièces qui doivent toutes contribuer à leur plus grande ſolidité, & dont je vais parler en détail, en eſſayant de les faire & de les ajuſter d'une façon plus propre à réſiſter aux efforts qu'ils ont à ſoutenir.

Des baux.

Les *baux* ou poutres *A* (*fig.* 16e), ſont les pièces principales dont les ponts ſont formés. Ces beaux ſont ordinairement faits de deux pièces *B*, *C*, (*fig.* 17e), jointes de côté & chevillées de même.

On conçoit que les écarts de ces beaux peuvent ſe déſunir dans le ſens de la longueur du vaiſſeau ; ce qui facilite la déſunion des écarts des pièces qui recouvrent les ponts, & l'allongement dudit pont. Il eſt vrai que les illoires renverſées que l'on met ſous

les beaux des premiers ponts, empêchent que leurs écarts s'ouvrent avec facilité ; mais il n'y a point d'illoires renverſées ſous les beaux des ſeconds ponts, qui ſont les plus élevés, &, par conſéquent, les plus avantageuſement placés contre l'allongement du vaiſſeau ; & les illoires, qui ſont ſous les beaux des premiers ponts, ne ſont jamais entaillées avec aſſez de juſteſſe, elles ſèchent dans les calles ; & l'expérience nous apprend que tous les écarts des beaux des vieux vaiſſeaux, quand on vient à radouber & déborder leurs ponts, ſont ouverts & déſunis, ſouvent à paſſer les doigts dans les joints, ce qu'on ne ſçauroit empêcher en faiſant les beaux ſuivant l'uſage ordinaire.

Je ne vois rien de ſi ſimple que d'aſſembler les deux pièces, qui forment le beau de deſſus en deſſous, dans le ſens de leur épaiſſeur, au lieu de le faire dans le ſens de leur largeur (*fig. 17e.*). Le ſeul inconvénient qu'on pourroit y trouver, c'eſt de diminuer la hauteur des calles & entre-ponts des navires, de l'épaiſſeur du renfort qu'on a coutume de laiſſer aux bouts des pièces qui forment les écarts : mais je ne vois pas que cette objection convienne aux vaiſſeaux de guerre, dont les calles ne ſont jamais remplies & les entre-ponts fort élevés : & je penſe qu'on pourroit ſe diſpenſer de laiſſer des renforts aux bouts des écarts *B*, *C*, de ceux-ci (*fig. 18e.*), parce que les pièces qui les forment réſiſtent de toute leur épaiſſeur ; au lieu qu'aux autres (*fig. 17e.*) ce n'eſt que les chevilles & les étances qui s'oppoſent aux efforts qu'ils ont à ſoutenir de haut en bas, & au poids de l'artillerie.

Des arcboutans.

Les arcboutans *B* (*fig. 16e.*) ſont de pièces de bois de trois à quatre pouces d'épaiſſeur au quarré, qui ſont placées d'un beau à l'autre de l'avant à l'arrière. On

met ordinairement à chaque pont trois rangs d'arcboutans, un rang au milieu de la largeur du pont, & un autre de chaque côté entre le bord & le milieu.

Ces arcboutans ne font d'autre effet que d'empêcher les baux de ſe rapprocher & de ſoutenir les barrotins *C*. On les entaille ſeulement d'un pouce dans chaque bau ; de ſorte qu'au moindre jeu tous ces arcboutans deviennent inutiles, & ne font aucun effet pour s'oppoſer à l'allongement des ponts.

Je voudrois, à la place du rang d'arcboutans du milieu (*fig. 16e.*), qui eſt interrompu par chaque écoutille, & étambraie & carlingue des mâts, placés, depuis l'avant juſqu'à l'arrière, entre les coutilles une illoire *B*, qui entailleroit dans chaque beau de l'épaiſſeur des barrotins, & déborderoit, au-deſſus du beau, de l'épaiſſeur du bordage du pont, dont elle feroit partie. Cette illoire *B* (*fig. 19e.*) auroit de chaque côté une rablure ou feilleure de trois pouces, pour recevoir les bouts des barrotins qui ſeroient entaillés à queue dans ladite feilleure, & lieroit enſemble tous les baux qui ſe trouvent entre les mâts & écoutilles. On pourroit même mettre entre chaque bau du premier pont une fourrure bien ajuſtée, pour remplir le vuide qui ſe trouveroit entre l'illoire renverſée & celle-ci, & paſſer des chevilles de deſſus en deſſous ; ce qui feroit une liaiſon bien ſolide.

A la place des deux rangs d'arcboutans, que l'on place entre ceux du milieu & du bord (*fig. 16e.*), je voudrois mettre (*fig. 19e.*) des entremiſes *D* de ſix à à huit pouces de largeur, & quatre pouces d'épaiſſeur entaillées, à queue ſur chaque bau, & clouées de deux cloux à chaque bout, pour empêcher le jeu & l'écartement des baux.

Des barrotins.

Les barrotins *C* (*fig. 16e.*) ſont de pièces de bois de

de chêne ou de ſapin, de huit à onze pouces de largeur, & ſix à huit pieds de longueur, que l'on place entre chaque bau, à la hauteur du deſſus deſdits baux, ſur une feilleure de deux à trois pouces, pratiquée dans l'entaille des illoires & gouttières qui ſupportent leſdits barrotins.

Ces barrotins ne ſervent qu'à remplir une partie du vuide qui ſe trouve entre les baux, pour ſoutenir les bordages du pont, l'étoupe des coutures, & faire un meilleur calfatage.

Au lieu de placer ces barrotins d'une illoire à l'autre (*fig. 16.*), je voudrois les faire venir (*fig. 19.*) depuis le bord où ils ſeroient entaillés à queue & cloués ſur les entremiſes que l'on met à l'extrémité des bouts des baux, juſqu'à l'illoire du milieu *B*, où ils ſeroient auſſi entaillés à queue & cloués, en même temps qu'ils ſeroient entaillés & cloués ſur l'entremiſe *D*, que j'ai placée, au lieu d'arcboutans, entre l'illoire du milieu & le bord.

Ces barrotins ainſi placés, formeroient preſque un ſecond rang de beaux, & ſeroient aſſez ſolides pour y entailler les illoires & clouer les bordages; mais ils ſeroient encore plus avantageux pour s'oppoſer aux efforts du roulis, & j'en démontrerai l'utilité.

Des guirlandes, barres de ponts & courbes d'écuſſon.

On place, ſur l'extrémité des ponts horiſontalement, en arrière, entaillée ſur l'étambot, une forte pièce de bois *P* (*fig. 16e. & 19e.*), qu'on nomme barre de pont, & en avant, ſur l'étrave & allonges d'écubier, de fortes pièces à peu près ſemblables, qu'on nomme guirlandes. Ces deux pièces peuvent être regardées comme les deux derniers baux. C'eſt ſur elles que ſont clouées tous les bouts des bordages & illoires; &, comme elles ſont en même temps chevillées contre les extrémités

du vaiſſeau, elles ſoutiennent les efforts que font les extrémités du navire pour tomber, & les efforts que font les ponts pour s'allonger.

Ainſi, les guirlandes font, dans la partie de l'avant du vaiſſeau, une forte liaiſon ; on en met une à chaque pont, ſous le beaupré, ſous les écubiers, & pluſieurs dans la calle. Mais, comme elles ſont fort difficiles à trouver, & qu'elles ſont ordinairement fort courtes, je voudrois augmenter leur longueur, dont dépend la meilleure liaiſon, par des allonges bien ajuſtées, & les entailler dans le végrage que l'on pourroit laiſſer plus épais dans cette partie, pour lui pratiquer des addents qui ſupporteroient en partie les poids des guirlandes, & réſiſteroient avec les chevilles aux efforts qu'elles ont à ſoutenir.

Je voudrois auſſi entailler & bien cheviller, ſur ces guirlandes & ſur la barre de pont, tous les bouts des illoires & bordages des ponts pour les empêcher de larguer. Mais rien ne me paroit plus ſolide, pour lier les ponts avec les extrémités du vaiſſeau, que de placer, en avant & en arrière (*fig.* 19e.), deux fortes courbes verticales *K*, dont une branche ſeroit chevillée, en avant, contre l'étrave & contre-trave ; &, en arrière, contre l'étambot ; & l'autre branche ſeroit prolongée ſur le pont, portant ſur l'illoire du milieu, à laquelle on laiſſeroit, ſur ces extrémités, plus d'épaiſſeur & des addents, & ſeroit chevillée avec ladite illoire, guirlandes, barres de ponts. Ces deux courbes joindroient les extrémités des ponts avec celles du vaiſſeau ; ce qui, répété à chaque pont, s'oppoſeroit fortement aux effets du tangage.

Pour pouvoir prolonger l'illoire du milieu (*fig.* 19e.) juſqu'à l'étambot *L*, & placer ſur cette illoire la courbe verticale *K*, il faudroit percer l'écoutille de rechange *G* (*fig.* 16e.) du maître canonier à côté de ladite illoire, ſur babord ou ſur tribord (*fig.* 19e.), ce qui

ne ſouffriroit aucune difficulté : on pourroit même prolonger ladite illoire, & lui faire former la carlingue du mât d'artimon, en perçant auſſi de côté l'écoutille aux poudres *H* (*fig.* 16e. & 19e.).

Les courbes d'écuſſon ſont de fortes pièces de bois qu'on place en écharpe, dans la partie de l'arrière, ſur les barres d'arcaſſe & d'écuſſon, au-deſſous du premier pont, pour recroiſer l'arcaſſe & la lier avec les couples de l'arrière. La liaiſon de ces pièces ſera d'autant plus forte qu'on augmentera leur longueur, & qu'elles ſeront bien ajuſtées & entaillées ſur le végrage, & bien chevillées & entaillées contre les barres d'écuſſon & les couples de l'arrière.

Des courbes de pont.

Les courbes de pont ſont des pièces de bois ou de fer en équerre, dont l'angle eſt plus ou moins ouvert ſuivant la figure du vaiſſeau. Une branche de ces courbes eſt chevillée & entaillée contre le bau ; & l'autre contre le côté du vaiſſeau. Leur effet eſt de diminuer la portée des baux, de les empêcher de s'écarter du côté du vaiſſeau, & de fortifier en même temps le membre ſur lequel elles portent ; ces courbes ſont ordinairement placées perpendiculairement, & chevillées ſur un ſeul membre.

Je voudrois donner aux courbes de pont une direction oblique, de façon que la branche d'une même courbe embraſſât pluſieurs membres, & que la tête de l'une répondît à la queue de l'autre ; ce qui formeroit, de l'avant à l'arrière, une eſpèce de chaîne & forte ceinture, qui lieroit le vaiſſeau dans le ſens de ſa longueur, & s'oppoſeroit aux efforts du tangage en même temps quelle empêcheroit les baux de s'écarter du bord, & diminueroit leur portée.

Des fourrures de gouttières, gouttières, illoires, & bordages des ponts.

Les fourrures de gouttières *L* (*fig.* 16e & 19e) ſont des pièces qui s'ajuſtent ſur les bouts des baux & contre le côté du vaiſſeau. Elles ſont taillées en grain d'orge, ont ordinairement dix à douze pouces en quarré, le plus de longueur qu'il eſt poſſible; & entaillent à queue dans tous les bouts des baux, depuis l'avant juſqu'à l'arrière, ainſi que les gouttières *M*, avec leſquels elles ſont chevillées par de longues chevilles que l'on frappe par dehors & qui ſont goupillées en dedans ſur les gouttières, préciſément au-deſſous des bordages du pont. On place ordinairement deux chevilles entre chaque bau; ce qui fait un tout depuis l'avant juſqu'à l'arrière des gouttières, fourrures de gouttières & du côté du vaiſſeau. Les illoires *N*. (*fig.* 16e & 19e.) entaillent auſſi à queue & à tenon dans tous les baux & barrottins, & ſont partie des bordages des ponts.

On met ordinairement, ſur chaque pont, deux rangs de fourrures de gouttière, quatre rangs de gouttières, & huit rangs d'illoires, diſpoſés comme il eſt marqué ſur les *fig.* 16e. & 19e.

Si on joint à la liaiſon que forment toutes ces pièces entaillées, celle qui doit réſulter de la nouvelle façon d'ajuſter les beaux, arcboutants, barrottins, courbes verticales, &c. que je viens de détailler; on conçoit que ce nouveau pont doit être bien plus ſolide & avoir plus de difficulté à s'allonger, ſurtout ſi on a attention de rendre toutes les pièces & bordages, qui recouvrent les ponts, les plus longues & les plus droites en tout ſens, en ne donnant aux ponts que l'arc ou la courbure abſolument néceſſaire pour faciliter l'écoulement des eaux vers le milieu,

& empêcher qu'elles ne ſéjournent ſur les extrémités du navire ; ce qui ſeroit très-incommode & occaſionneroit bientôt la pourriture.

Des bordages intérieurs & extérieurs.

Rien ne s'oppoſe plus aux efforts que fait le vaiſſeau dans les mouvemens du tangage, que les bordages extérieurs & intérieurs qu'on nomme végrage.

On végroit autrefois obliquement la partie du vaiſſeau compriſe entre les végres d'empature & la ſerre beauquière, & l'on prétendoit que ces végres, ou ſerres obliques, étoient autant d'arcboutants qui ſoutenoient le vaiſſeau contre les efforts qu'il fait pour arquer. Mais on ne faiſoit pas attention que, pour placer ces végres ou arcboutants, il faut leur donner une courbure qui facilite l'allongement qu'ils doivent prendre, lorſque les végres d'empature & les beauquières, qui leur ſervent de point d'appui, cédent aux efforts du tangage. D'ailleurs ces arcboutants ou végres obliques, qui ne peuvent avoir, tout au plus, que quatre pouces d'épaiſſeur dans les gros vaiſſeaux, & qui n'embraſſent ordinairement que trois ou quatre membres, ne peuvent pas faire un grand effet ni une liaiſon continue ; parce qu'on eſt obligé de laiſſer, dans la calle, des jours ou intervalles entre les végres, pour pouvoir découvrir les voyes d'eau ; ce qui forme comme une eſpèce de treillis dans la calle, & toute interruption dans les ouvrages de charpente diminue la ſolidité.

J'approuverois beaucoup cette méthode, ſi on pouvoit la pratiquer de façon que toutes les végres, parfaitement droites, euſſent la même obliquité, ſans aucune interruption, depuis l'avant juſqu'à l'arrière ; mais comme la choſe n'eſt pas praticable, on a eu raiſon d'abandonner cette façon de végrer oblique-

ment, quoiqu'elle ſoit plus économe en employant des bordages plus courts. L'on donne à préſent, aux bordages intérieurs, à peu près la même direction qu'aux bordages extérieurs, afin que les deux forces de ces bordages réunies s'oppoſent en même temps aux mêmes efforts.

On entaille ordinairement d'un pouce & demi ou de deux pouces, dans les membres, les deux rangs de végres qui répondent aux empatures des varangues & des genoux, & que l'on nomme pour cela végres d'empature, pour empêcher le jeu & fortifier le vaiſſeau dans cette partie où il porte quand il vient à échouer.

Il y a des conſtructeurs qui entaillent auſſi dans les membres, les beauquières, les préceintes, liſſes & ſerres de platbord, &c. Toutes ces entailles ne peuvent que contribuer à une meilleure liaiſon, mais il en réſulte pluſieurs inconvéniens.

1°. Il faut des bordages d'autant plus épais que l'entaille eſt plus forte. Ces bordages ſont plus rares coûtent plus cher, conſomment plus de bois de plus fort échantillon, qui, étant preſque ſur le retour, ſont moins vigoureux & plutôt pourris.

2°. Il faut employer plus de temps & plus de journées d'ouvriers pour les travailler & les mettre en place.

3°. Ces entailles qui recouvrent les membres & empêchent l'air de les rafraichir, occaſionnent plutôt leur pourriture.

4°. Enfin la rondeur & la figure irrégulière du vaiſſeau ne permettent pas, quelque attention que l'on aie, que l'on puiſſe faire ces entailles avec aſſez de juſteſſe pour qu'il n'y ait pas du jour d'un côté ou de l'autre, quand les pièces ſont miſes en place.

Toutes ces raiſons, confirmées par l'expérience, ont fait prendre le parti de ne plus entailler dans les membres le bordage & le végrage. On pourroit ce-

pendant entailler avec ſuccès les liſſes & ſerres de platbord, parce que, le vaiſſeau n'ayant preſque point de courbure dans cet endroit, les entailles ſeroient plus juſtes, & formeroient une forte liaiſon dans cette extrémité qui tend le plus à s'allonger.

L'attention ſingulière que l'on doit avoir dans le bordage & végrage, c'eſt de donner à toutes les pièces le plus de longueur & la direction la plus horiſontale, afin qu'elles puiſſent moins s'allonger. Il faut auſſi s'attacher à bien recroiſer les écarts, & à les arrêter par deux forts clous & une cheville frappée par dehors & rivée par dedans, à chaque bout de bordage. On peut auſſi pratiquer aux écarts des beauquières & autres pièces de liaiſon, des aadents d'un pouce ſur le quant, en forme de cramaillères, pour que les pièces qui les recroiſent en deſſus & en deſſous les empêchent de larguer.

ARTICLE SECOND.

Des moyens d'empêcher le vaiſſeau de ſe racourcir & ſe recourber par en bas.

LE vaiſſeau ne ſçauroit ſe raccourcir & ſe recourber par en bas, ſans que ſa quille, contrequille, carlingue, &c. de droites deviennent courbes; ce qui ne peut ſe faire ſans que leurs écarts larguent ou ſe compriment. On a donné, en conſéquence, à toutes ces pièces, le plus de longueur & de force poſſible, ſurtout en hauteur, proportionnellement à la grandeur des vaiſſeaux : mais je voudrois qu'au lieu de faire les écarts de la quille, contrequille & carlingue, dans le ſens de la hauteur (*fig. 5e.* & *6e.*) ou de deſſus en deſſous, comme on le pratique ordinairement, on les fit dans le ſens de la largeur (*fig. 15e.*), pour les

cheviller de côté au lieu de bas en haut ; parce qu'alors ſes écarts s'oppoſeroient directement, & avec plus de force aux efforts qu'ils ont à ſoutenir.

Il faut auſſi, pour que le vaiſſeau ſe racourciſſe par en bas, que toutes ſes parties voiſines de la quille, carlingue, &c. ſe rapprochent & ſe compriment. C'eſt pourquoi on a imaginé de placer entre les membres, au-deſſus de la quille, & aux bouts des varangues, des clefs ou rempliſſages (*fig. 15e.*), en forme de coins de dix-huit à vingt pouces de longueur, que l'on frappe à force, par dedans, pour remplir le vuide qui ſe trouve entre les membres, ſeulement au-deſſus de la quille & aux empatures des varangues & des genoux.

Je voudrois remplir en entier tout le fond du vaiſſeau, depuis la quille juſqu'au bout des genoux, en laiſſant d'abord porter aux varangues & genoux toute la largeur que fourniſſent ces pièces avant de les travailler, & en plaçant enſuite, dans le plus petit intervalle qui reſteroit entre les membres, des bordages de la longueur & épaiſſeur qu'elles exigeroient ; ou bien, pour plus d'économie, de bouts de bois de trois ou quatre pieds, bout à bout, pour remplir exactement tout le vuide qui ſe trouveroit depuis l'avant juſqu'à l'arrière, entre la quille & les empatures des varangues. Mais, au lieu de frapper ces pièces ou clefs par dedans, comme on le pratique ordinairement, je voudrois les frapper par dehors, en leur donnant de l'entrée en forme de coin, afin qu'elles fuſſent forcées principalement ſur le quant extérieur des membres, où doit ſe faire le plus grand effort.

Le vaiſſeau ſe trouvant ainſi plein dans cette partie, depuis l'étrave juſqu'à l'étambot, pourroit être regardé comme d'une ſeule pièce, & ne ſçauroit ſe raccourcir qu'autant que toutes ſes parties pourroient ſe comprimer ; ce qui ſeroit d'autant plus difficile qu'elles auroient déjà été placées avec plus de force, & qu'on auroit

auroit eu attention de choiſir les bois les plus ſecs & les plus compactes.

Il ne pourroit réſulter, de cette façon de remplir le fond du navire, aucun inconvénient pour la pratique de la conſtruction, ni pour les qualités du vaiſſeau. La peſanteur en bois que l'on ajouteroit à celle de la coque, ſeroit déduite de celle du leſt, qui ne ſçauroit être placé plus avantageuſement.

En pratiquant en dehors & en dedans, le long des clefs ou rempliſſages, un petit canal de deux à trois pouces de largeur & autant de profondeur, en forme de goutière, les eaux viendroient ſe rendre aux lumières & à la pompe; & comme elles ne pourroient ni ſéjourner ni croupir entre les mailles des membres, qui ſe trouveroient remplies, les calles des navires & les entreponts n'en ſeroient point infectés, & ne communiqueroient point leur mauvais air aux équipages, &c. On n'auroit point à craindre des voyes d'eau dans les échouages qu'un vaiſſeau ainſi conſtruit ſeroit bien plus en état de ſoutenir.

Des illoires renverſées, & étances de la calle.

Les illoires renverſées ſont de longues & fortes pièces de bois, de onze à douze pouces en quarré, que l'on met au-deſſous des baux du premier pont, au milieu de la largeur du vaiſſeau, depuis l'avant juſqu'à l'arrière, entre les écoutilles & les mâts. Ces pièces ſont entaillées & chevillées à chaque bau; & c'eſt ſous elles qu'arcboutent toutes les étances ou épontilles de la calle, que l'on place perpendiculairement ſur la carlingue aux baux qui forment les écoutilles, & de diſtance en diſtance entre les écoutilles, pour ſoutenir les premiers ponts.

Rien ne peut s'oppoſer plus directement à l'arc du vaiſſeau, ou à la courbure qu'il voudroit prendre par

en bas, que ces étances & illoires renverſées. Au moyen de l'illoire renverſée, l'effet des étances ſe communique également à tous les baux du pont qu'elle embraſſe ; & comme les étances portent ſur la carlingue qui eſt chevillée avec la quille, contrequille, varangues, &c. il faut que le premier pont ſe reſſente des efforts que fait la quille pour arquer, & qu'il prenne le même arc ou la même courbure que la quille, ou que les étances ſe raccourciſſent en ſe recourbant, ou en prenant une direction oblique.

Il eſt donc bien néceſſaire de donner aux étances toute la force & la ſolidité pour ſe roidir contre ces efforts, de les multiplier, autant qu'il eſt poſſible, ſans gêner l'arrimage des vaiſſeaux ; enfin, de les ajuſter & entailler, de façon qu'elle ne puiſſent prendre aucune obliquité. On pratique ordinairement à ces étances un tenon à la tête, qui entre dans l'illoire renverſée, & des taquets, ſur la carlingue, qui retiennent le pied.

Je voudrois y joindre des équerres, ou étrieux de fer, & des arcboutans en forme de potence aux endroits où elles ſont trop éloignées ; enfin, porter toute l'attention poſſible, pour qu'au moyen de ces étances & illoires renverſées, la quille, contrequille, varangues, carlingue & les ponts, ne forment, pour ainſi dire, qu'un tout, & réſiſtent enſemble & avec plus de force aux efforts que fait le vaiſſeau pour ſe recourber en deſſous.

ARTICLE TROISIÉME.

Des moyens d'empêcher le vaiſſeau de ſe rétrecir.

ON ne ſçauroit concevoir qu'un corps homogène, fait d'une ſeule pièce, puiſſe s'allonger par en haut, & ſe raccourcir en ſe recourbant par en bas, ſans ſe rétrecir

en même temps ; & l'on ſeroit porté à croire qu'un vieux vaiſſeau arqué devroit être plus étroit que dans le principe de ſa conſtruction. Mais, ſi on fait attention que le vaiſſeau eſt compoſé d'une infinité de parties qui peuvent céder, comme je viens de le démontrer, aux efforts qu'il fait pour s'allonger, & d'une infinité d'autres qui s'oppoſent à ceux qu'il fait pour ſe rétrecir, comme je le prouverai en parlant du roulis, il eſt clair que, ſi les premieres réſiſtent moins que les dernières, il pourra s'allonger ſans ſe rétrecir. L'expérience le confirme, & nous fait voir que tous les vieux vaiſſeaux, ont ordinairement quatre à ſix pouces plus de largeur que lorſqu'ils ont été conſtruits.

Ainſi, bien loin d'imaginer des moyens pour empêcher les vaiſſeaux de ſe rétrecir, je m'appliquerai à en chercher des contraires en traitant des mouvemens du roulis, & je terminerai mes recherches, ſur les mouvemens du tangage, par quelques réflexions ſur la figure de la caréne & la diſtribution de la charge la plus avantageuſe pour diminuer leurs efforts.

Quelqu'attention que l'on apporte à lier les vaiſſeaux, ſi la figure de leur caréne, & la diſtribution de leur charge n'eſt pas telle, que le poids de chacune de ſes parties ſoit égal à ſon déplacement d'eau, ce qui eſt preſque impoſſible, le vaiſſeau, dans le port ou à l'ancre dans la rade, ſans aucun mouvement, tendra à ſe délier.

Il arrive preſque toujours que le déplacement, &, par conſéquent, la pouſſée verticale de l'eau, comparée aux poids des différentes parties du vaiſſeau, eſt plus forte au milieu, à l'endroit de ſa plus grande largeur, qu'aux extrémités qui ſont plus taillées, & plus chargées du poids des œuvres mortes quand le vaiſſeau eſt vuide, & du poids des ancres, cables, &c., quand il eſt chargé.

Il ſuit de-là, que de deux vaiſſeaux qui auroient

même capacité ou même déplacement avec les mêmes proportions & le même tirant d'eau, celui qui auroit un maître gabari fort ouvert & les extrémités fort taillées, arqueroit avec plus de facilité que celui qui auroit le maître gabari plus taillé & les extrémités plus soutenues.

On pourroit corriger en partie le défaut du premier dans son chargement, en ayant attention de rassembler dans le milieu où seroit sa plus grande capacité, la plus grande quantité de lest de fer & de parties lourdes, & de ne laisser, dans ses extrémités, que les choses les plus légères, & qui doivent nécessairement y rester.

Enfin, le principe dont on doit toujours faire usage, dans la construction & dans le chargement ou arrimage des vaisseaux, pour diminuer les efforts & les effets du tangage, c'est de rendre le poids de chaque partie le plus proportionnel au volume d'eau qui lui répond, ce qui dépend, comme on vient de le voir, & de la figure de la carène & de la distribution de la charge.

L'œuvre morte du vaisseau, ou la partie qui est hors de l'eau, peut aussi contribuer à le faire arquer. Nous venons de voir qu'il n'est guères possible que les extrémités du vaisseau ne soient pas plus pesantes que le volume d'eau qu'elles déplacent. Si on joint à la pesanteur, de ce qu'elles doivent porter nécessairement, celle qu'une trop grande hauteur d'œuvres mortes occasionneroit, on conviendra que c'est avec raison que les habiles constructeurs s'attachent à les rendre moins hautes & plus légères, sur-tout vers les extrémités.

Ce poids d'œuvres mortes est plus nuisible aux vaisseaux vuides, dans le port, qu'à ceux qui sont chargés, parce qu'alors ils tirent très-peu d'eau, & leurs extrémités, qui se trouvent presque en l'air à cause des façons de l'avant & de l'arrière, tendent plus à se

délier. Il eſt donc alors plus néceſſaire de charger de leſt la partie du milieu, & de ſubmerger, par ce moyen, le vaiſſeau autant que la profondeur du port peut le permettre.

Il ſeroit auſſi à ſouhaiter que l'on put avoir aſſez de pontons pour y amarrer tous les vaiſſeaux qui ſe trouvent dans les ports, afin de pouvoir ſoulager leurs extrémités des chaînes & cables qui les retiennent ordinairement, & dont le poids & les efforts, dans les hautes marées, tendent beaucoup à les délier.

Au défaut de pontons, on pourroit ſe ſervir, avec ſuccès, de coffres ou corps vuides ajuſtés aux extrémités des vaiſſeaux, dont le déplacement fut à peu près égal aux poids des chaînes, cables & œuvres mortes. Par ces moyens, on conſerveroit les vaiſſeaux dans le port où ils acquièrent ſouvent plus d'arc que dans de longues campagnes.

CHAPITRE SECOND.

Des mouvemens du roulis.

Les mouvemens du roulis ſont ceux qui s'exercent dans le ſens de la largeur du vaiſſeau. Ces mouvemens peuvent être plus ou moins vifs, ſuivant la variation des impulſions du vent ſur les voiles & des lames ſur le côté du navire. La figure du vaiſſeau, la poſition de ſon centre de gravité & la diſtribution de ſa charge, peuvent auſſi beaucoup contribuer à augmenter ou à diminuer la vivacité des mouvemens du roulis. Ils produiſent, dans le ſens de la largeur du vaiſſeau, à peu près les mêmes effets que les mouvemens du tangage dans le ſens de ſa longueur, c'eſt-à-dire, que les roulis tendent à délier & à recourber les côtés du vaiſſeau, & à augmenter ſa largeur.

On ne peut guères concevoir un navire incliné ſur un côté qui porte tout ſon poids, & qui eſt repouſſé avec la même force ſans que ce côté s'applatiſſe, en même temps que le côté oppoſé, qui eſt hors de l'eau, tend à s'allonger par les efforts que font les aubans, & chaînes d'aubans qu'il ſoutient, & qui portent ſeuls du côté oppoſé à l'inclinaiſon, tout le poids des mâts, vergues, voiles, &c.

Nous avons de ceci une preuve bien ſenſible : quand on met un vaiſſeau en caréne, ou les efforts que l'on fait pour l'incliner tout vuide, ſont bien moins grands que ceux qu'il reçoit tout chargé. Quelque attention qu'on ait eu à le bien calfater ſur les chantiers, & quoique le bois & l'étoupe s'enflent lorſqu'il eſt mis à l'eau, on fait néanmoins entrer ſans peine de nouvelles étoupes quand il eſt viré en caréne, du côté oppoſé à l'inclinaiſon, tandis qu'on auroit de la peine à introduire la pointe d'un couteau dans les joints du côté incliné : ce qui ne peut ſe faire, ſans qu'un côté s'allonge, & l'autre ſe comprime en prenant une courbure contraire.

Il n'en eſt pas de même d'un vaiſſeau que l'on caréne dans un baſſin ; les deux côtés ſont également difficiles à calfater étant également reſſerrés par la peſanteur égale du navire : d'où on peut conclure que la caréne d'un vaiſſeau, dans un baſſin, tend moins à le délier ; mais elle n'eſt pas auſſi ſûre ni auſſi ſolide, que celle qu'il reçoit à flot, ſur-tout s'il a fait pluſieurs campagnes.

Des différentes courbures que prennent les côtés du vaiſſeau, dans les mouvemens du roulis, ſuit néceſſairement la déſunion des pièces qui forment leſdits côtés, dont les bordages & vaigres s'ouvrent quelquefois à paſſer les doigts dans les joints, dans les endroits voiſins des porte-aubans ; & des efforts que font les aubans & chaînes d'aubans pour attirer ſucceſſivement les côtés du vaiſſeau, ce qui produit la déſunion des

côtés avec les ponts & la plus grande ouverture, ou largeur du navire. Je vais eſſayer de fournir les moyens pour obvier, autant qu'il eſt poſſible, à ces deux inconvéniens.

ARTICLE PREMIER.

Des moyens d'empêcher la déſunion des côtés du vaiſſeau.

LES principales pièces qui forment les côtés du vaiſſeau, ſont les membres, les bordages, le vaigrage, & les porques *P*. (*fig. 9e. 10e. & 11e.*).

Les bordages & le vaigrage ne peuvent réſiſter aux mouvemens du roulis, qu'autant que les membres qui les portent, & ſur leſquels ils ſont cloués & chevillés, ſont ſolides & n'ont point de jeu. Ainſi la principale force du côté du vaiſſeau contre les roulis, vient de celle des membres; & c'eſt ſur la meilleure façon de lier les membres que nous devons ſur-tout inſiſter.

En examinant la façon dont les membres ſont faits, on ne peut s'empêcher de convenir que leur aſſemblage eſt encore moins avantageux pour réſiſter aux roulis qu'au tangage (*fig. 9e. 10e. & 11e.*): c'eſt ce que je démontre dans la nouvelle façon de former les membres des vaiſſeaux, qui réunit les deux avantages d'être infiniment plus ſolides contre les mouvemens du tangage & du roulis.

Les porques, que l'on met ſur le vaigrage, forment d'abord une bonne liaiſon (*fig. 10.*); mais, comme ce ne ſont que des membres faits comme à l'ordinaire, & qu'ils ſont chevillés ſur les autres, ils ſont ſujets aux mêmes inconvéniens d'être bientôt déliés. Ils ſont d'ailleurs fort éloignés les uns des autres, & cauſent tant de difficulté dans les arrimages & dans les radoubs, que l'on deſire depuis longtemps leur ſuppreſſion.

La meilleure façon de fortifier le côté du vaiſſeau, en faiſant les membres comme à l'ordinaire, ſeroit d'entailler d'un pouce dans leur épaiſſeur au-deſſus des écarts des pièces qui les forment, un ou deux rangs de vaigrès ou bordages, & de faire auſſi entailler d'un pouce ou deux les porques dans les jours que l'on laiſſe entrer les vaigres de la calle. Toutes ces entailles formeroient des arrêts qui réſiſteroient d'autant aux efforts, que font les membres pour ſe déſunir; mais elles ſeroient ſujettes aux inconvéniens que j'ai détaillés en parlant du tangage.

Je ne vois donc rien de plus avantageux, pour rendre le côté du vaiſſeau auſſi ſolide qu'il eſt poſſible contre les mouvemens du roulis, que de former les membres, qui en font la principale force, ſuivant la nouvelle méthode que je détaille à la fin de cet ouvrage, (*fig. 12e. 13e. & 14e.*) & dont l'application, auſſi ſimple qu'économe dans la pratique, convient également pour réſiſter aux mouvemens du roulis & du tangage.

ARTICLE SECOND.

Des moyens d'empêcher le vaiſſeau de s'ouvrir & s'élargir.

RIEN ne peut s'oppoſer avec plus de force à la plus grande ouverture du vaiſſeau que les ponts & gaillards placés à différentes hauteurs.

Les baux ou poutres de ces ponts ſervent de cordes aux membres qui les portent, & à tout le côté du vaiſſeau, par le moyen des ferre-bauquières, fourrures de goutières, &c. Ces membres ne ſçauroient s'ouvrir ſans s'écarter des extrémités des baux qui leur ſont fortement attachés, ſi on pouvoit rendre les baux parfaitement droits, & ajuſter leurs écarts de façon qu'ils ne puſſent pas larguer, quand ils ſont faits de deux pièces,

pièces, ce qui eſt ordinaire aux vaiſſeaux de guerre.

On eſt néceſſairement obligé de donner aux baux une certaine courbure dans le ſens de leur longueur, afin que les eaux, qui tombent ſur les ponts, prennent leurs cours vers les côtés du vaiſſeau où on pratique des ouvertures ou dalots pour leurs écoulemens.

Cette rondeur des baux eſt encore néceſſaire pour s'oppoſer au recul du canon, & diminuer l'effort qu'il feroit ſur le côté du vaiſſeau, ſi le pont horiſontal lui permettoit de reculer avec plus de facilité.

Enfin, on ne peut ſe diſpenſer de donner de la rondeur aux baux, & alors ils facilitent plus qu'ils ne s'oppoſent à la plus grande ouverture du vaiſſeau.

Effectivement, une pièce courbe tend à ſe redreſſer quand on charge ſa partie convexe : elle ne peut ſe redreſſer ſans s'allonger ; & elle ne peut s'allonger ſans écarter les points d'appui qu'elle auroit à ſes bouts.

La même choſe arrive aux baux des vaiſſeaux. Les ponts ſont chargés du poids immenſe de l'artillerie, des cabeſtans, mâts d'hune de rechange, chaloupe & canon, parc à moutons, boulets, cables, coffres & équipages ; ces poids tendent à redreſſer les baux qui, en s'allongeant, font ouvrir les côtés du vaiſſeau, ſans qu'ils ſoient obligés des s'en écarter.

Cet effet eſt moins ſenſible au premier pont qu'au ſecond pont, parce que les fortes étances ou épontilles de la calle, les iloires renverſées, & même les efforts que fait le vaiſſeau pour arquer, ſoutiennent les baux dans le milieu de leur longueur, & les empêchent de ſe redreſſer ; les côtés du vaiſſeau, qui ſont auſſi plus épais dans cet endroit, cédent avec plus de difficultés, & l'effort des porte-aubans en eſt plus éloigné.

On a également ſoin de mettre, ſous les baux des ſeconds ponts, des épontilles à double rang ; mais ces épontilles, qui portent ſur le premier pont, ſuivent

ſon affaiſſement & le communiquent au ſecond pont qu'elles ſoutiennent. On ne peut pas les mettre bien fortes, pour ne pas trop embarraſſer l'entrepont & gêner le ſervice de l'artillerie & de la manœuvre. On eſt ſouvent obligé de les déplacer pour faire jouer le cabeſtan, dont les barres ſont fort longues ; &, en les plaçant & déplaçant, elles ſe recourbent & ſe raccourciſſent ; les charnières, qui les ſoutiennent, s'uſent : ce qui permet aux baux des ſeconds ponts de ſe redreſſer avec plus de facilité que ceux des premiers ponts.

L'expérience nous apprend que tous les baux des vieux vaiſſeaux, & ſurtout ceux des ſeconds ponts & gaillards, ſe redreſſent au point qu'on eſt ſouvent obligé de les changer avant que les vaiſſeaux ſoient uſés, & c'eſt ce qui eſt cauſe que l'on donne plus de courbure aux baux des ſeconds ponts & gaillards ; ce qui facilite la plus grande ouverture & déſunion des côtés du vaiſſeau, dans cet endroit où ils ont moins de force & ſont plus voiſins des porte-aubans.

La première idée qui ſe préſente d'abord pour empêcher l'allongement des baux, en admettant que leur courbure ſoit néceſſaire, eſt de faire les baux parfaitement droits en deſſous, & de ne leur donner de rondeur qu'en deſſus aux dépens du bois ; & ſi on ne trouve pas des pièces aſſez fortes, rapporter en deſſus une fourrure en chêne ou en ſapin, pour rendre le bau moins peſant. Par ce moyen, le bau ne ſçauroit s'allonger ni forcer le reſte du navire.

Cet expédient ſeroit fort bon pour les vaiſſeaux qui n'auroient qu'un pont, & dont la hauteur de la calle ſeroit indifférente ; mais il n'eſt pas applicable aux vaiſſeaux qui ont pluſieurs ponts & gaillards, parce que la hauteur des entreponts ſe trouveroit diminuée au milieu, où elle eſt le plus néceſſaire, de l'épaiſſeur de la fourrure ou de la rondeur qu'on donneroit aux baux. Ainſi, en leur donnant un pied de rondeur, il fau-

droit augmenter de cette quantité la hauteur ordinaire de chaque pont ; ce qui augmenteroit conſidérablement la hauteur des œuvres-mortes, celles des batteries, & de tous les poids qui ſont ſur les ponts, & empêcheroit le vaiſſeau de porter la voile.

Puiſqu'il ne paroît pas poſſible de ſupprimer entièrement la rondeur des *baux* dont on voit les inconvéniens, le conſtructeur ne ſçauroit avoir trop d'attention à la diminuer le plus qu'il eſt poſſible, & à multiplier & augmenter la force des épontilles qui les ſoutiennent. Il faut auſſi que les capitaines, ou officiers qui commandent les vaiſſeaux, ne faſſent ôter ces épontilles que lorſqu'il eſt indiſpenſablement néceſſaire, & les faſſent remettre tout de ſuite en place.

On ne ſçauroit rien ajouter à la liaiſon que forment les entremiſes que l'on entaille à queue ſur les bouts des *baux*, les fourrures des gouttières, gouttières, courbes des ponts, & courbes verticales, que l'on place ſur le premier pont, entre chaque ſabord, à la place des éguillettes de porque. Toutes ces pièces entaillées à queue, à tenon & à crocs, & chevillées ſur les ponts & ſur les côtés du vaiſſeau, les uniſſent ſi étroitement enſemble qu'il eſt bien difficile de les ſéparer. Mais toutes ces liaiſons ne ſçauroient empêcher les *baux* de ſe redreſſer, ni le vaiſſeau de s'élargir. Il ſuffit pour cela que chaque joint ou couture des bordages du pont s'ouvrent un peu, & que les écarts des *baux* larguent ; ſans qu'il ſoit néceſſaire que les *baux*, entremiſes, fourrures de gouttières, courbes, &c. s'écartent du côté du vaiſſeau : ce qui n'arrive que très-rarement & vers la fin de leur durée, qui eſt plutôt terminée par la pourriture de ces pièces que par leur déſunion.

Je ne vois donc rien de plus avantageux pour empêcher les *baux* de s'allonger & retenir les côtés du vaiſſeau, que les barrottins tels que je les ai diſpoſés en parlant du tangage.

Ces barrottins, qui ſont placés entre chaque bau, (*fig.* 19e.) & dont l'épaiſſeur eſt moins forte que celle deſdits baux, pourroient être droits par deſſous & avoir en deſſus la courbure des baux, ſans rien diminuer de la hauteur des entreponts; & ces pièces, bien retenues contre le côté du vaiſſeau, entaillées dans l'entremiſe placée entre le bord & l'iloire du milieu, & entaillées auſſi à queue & clouées ſur ladite illoire du milieu, que j'ai miſes à la place des arcboutans, enfin ces mêmes barrottins, entaillés & cloués dans les fourrures de goutières, goutières & iloires, formeroient autant de tirants qui ne ſçauroient s'allonger, & s'oppoſeroient directement aux efforts que font les baux pour ſe redreſſer & le vaiſſeau pour s'ouvrir; & feroient d'autant plus d'effet qu'on leur donneroit plus d'épaiſſeur & qu'on s'attacheroit à les bien retenir contre l'iloire du milieu & contre le bord, avec des équerres de fer ou pattes d'oie.

Tous ces barrottins ſeroient faits avec des pièces de bois droites, ſans conſéquence, dont on ne fait preſque aucun uſage dans les ports, & qui ne font qu'embarraſſer les chantiers & parcs aux bois: ceux des plus grands vaiſſeaux n'auroient, aux endroits les plus larges des ponts, que 18 à 20 pieds de longueur ſur 8 à 9 pouces d'équarriſſage.

Cette nouvelle diſpoſition des barrottins, répétée à chaque pont & gaillard, & jointe à la nouvelle méthode de former la partie de l'avant, les membres des vaiſſeaux, & aux autres liaiſons que je viens de détailler, & que l'on pratique ordinairement pour unir les ponts le plus étroitement qu'il eſt poſſible avec le côté du vaiſſeau, le mettroit en état de réſiſter bien plus longtemps aux efforts du roulis, ſurtout ſi on diminue la rondeur qu'on eſt obligé de donner aux baux, en augmentant le nombre & la force des épontilles des calles & entreponts.

On peut auſſi placer ſur le ſecond pont, à l'endroit des porte-aubans & entre les gaillards, quelques courbes de fer verticales, dont une branche chevillée ſur le ſecond pont, & l'autre contre le bord, réſiſteroit aux efforts que font les aubans pour attirer le côté du vaiſſeau que l'on pourroit fortifier encore, en bordant ces parties de l'œuvre morte, en dehors & en dedans, avec des bordages de chêne au lieu de ſapin.

ARTICLE TROISIÉME

Des moyens d'augmenter ou diminuer la vivacité des mouvemens du roulis.

APRÉS avoir donné les moyens qui m'ont paru les plus applicables à la pratique de la conſtruction, pour fortifier les vaiſſeaux contre les efforts du roulis, il me reſte à examiner quels effets peuvent produire ſur ces mouvemens la figure du vaiſſeau & la peſanteur & la diſtribution de la charge.

Sans entrer, à ce ſujet, dans des détails qui ont été traités fort au long par M. *Bouguer*, je me contenterai d'établir pour principe ce qu'il a évidemment démontré ; que les mouvemens du roulis ſe font autour du centre de gravité du vaiſſeau, & que ces mouvemens doivent être plus ou moins vifs, ſuivant que ce centre de gravité ſera plus ou moins bas. Or, comme la poſition du centre de gravité du vaiſſeau dépend & de la figure & de la peſanteur & diſtribution de ſa charge ; examinons d'abord quelle eſt la figure du vaiſſeau dont le centre de gravité doit être le plus bas, & de quelle façon il faudroit le charger pour augmenter ou diminuer la vivacité des mouvemens du roulis.

De tous les vaiſſeaux que l'on pourroit comparer, celui qui, avec mêmes proportions & mêmes capacités,

auroit à même hauteur ſa première ligne d'eau & ſa ligne de flottaiſon plus ouvertes, ſeroit celui qui devroit avoir ſon centre de gravité plus bas par rapport à ſon métacentre, où ſe réunit la pouſſée verticale de l'eau, quand le navire s'incline ; &, par conſéquent, celui qui auroit les mouvemens de roulis plus vifs. Si on lui donnoit la même quantité de leſt, & ſi on diſtribuoit ſon chargement de la même façon qu'au vaiſſeau qui auroit ſa première ligne d'eau & ſa ligne de flottaiſon moins ouvertes, le premier fatigueroit davantage ſa mâture & ſes côtés ; ce qu'il faut ſoigneuſement éviter.

Pour rendre les mouvemens du roulis de ce vaiſſeau moins vifs, il faudroit élever ſon centre de gravité en diminuant la quantité de ſon leſt, ou en élevant & plaçant ſur les ponts des parties lourdes qui ſe trouveroient dans la calle ; ce qui produiroit un effet tout contraire à ce qu'on éprouve fort ſouvent, lorſque, dans un gros temps ou autres occaſions, on eſt obligé de faire deſcendre dans la calle l'artillerie ou autres poids qui ſe trouvent ſur les ponts. On s'apperçoit ſur le champ que les roulis deviennent plus vifs, & l'on eſt obligé de remettre bientôt les choſes dans leur premier état.

Si cependant il n'étoit pas poſſible, le navire chargé, de diminuer la quantité de leſt ni de déplacer les autres poids de la calle, ou ſi ce dérangement, en élevant le centre de gravité, empêchoit le vaiſſeau de porter la voile, on pourroit ſe ſervir d'un autre expédient qui n'auroit pas moins de ſuccès, ſans élever le centre de gravité.

Il ſuffiroit d'éloigner de ce centre, ou du milieu du vaiſſeau, toutes les choſes lourdes qui ſe trouvent ſur les faux ponts, ſur les ponts & gaillards, & d'en rapprocher les plus légères ; parce que ces parties plus peſantes, ayant plus d'inertie, auroient d'autant plus

de force pour réſiſter à la vivacité des mouvemens du roulis, qu'elles ſeroient appliquées à un bras de lévier plus long.

On produiroit un effet tout contraire, ſi on rapprochoit du centre les parties lourdes en éloignant les plus légères. Ainſi, pour diminuer ou augmenter la vivacité des mouvemens du roulis, on peut élever ou baiſſer le centre de gravité du vaiſſeau, en élevant ou en baiſſant les poids de la calle & des entreponts; ou bien, ſans baiſſer ni élever le centre de gravité, il ſuffit d'éloigner ou de rapprocher de ce centre, ou du milieu du vaiſſeau, les parties lourdes ou légères qui ſe trouvent dans la calle ou ſur les ponts.

D'où on peut conclure, 1°. qu'un vaiſſeau qui a les mouvemens de roulis trop vifs, après avoir écarté les poids lourds & rapproché les plus légers du centre, doit avoir trop de poids dans la calle & que l'on peut, ſans inconvénient, diminuer la quantité de ſon leſt, ou bien lui donner du leſt de pierre au lieu de leſt de fer; parce que le leſt de pierre, étant d'une peſanteur ſpécifique moins forte, tient plus de volume dans la calle: ce qui élève ſon poids, &, par conſéquent, le centre de gravité du vaiſſeau.

2°. Si un vaiſſeau, après avoir rapproché de ſon centre les poids lourds & écarté les plus légers, avoit des mouvemens de roulis trop lents & reſtoit trop long-temps incliné, ou, ce qui revient au même, s'il ne portoit pas aſſez bien la voile; ce vaiſſeau n'auroit pas aſſez de parties lourdes dans ſa calle, & il faudroit augmenter la quantité de ſon leſt, ou bien lui donner du leſt de fer à la place du leſt de pierre; ce qui baiſſeroit ſon centre de gravité.

3°. Un vaiſſeau qui, toutes choſes placées également, a les mouvemens de roulis plus vifs, doit mieux porter la voile; & comme la rentrée des vaiſſeaux, en rapprochant toutes les parties du centre, doit ac-

caſionner des mouvemens de roulis plus vifs, on peut conclure qu'un vaiſſeau qui a plus de rentrée qu'un autre, toutes choſes égales d'ailleurs, doit mieux porter la voile ; & que, du plus ou moins de vivacité des roulis d'un vaiſſeau, on pourroit déduire la moindre quantité de leſt & la plus grande hauteur de mâture qu'on pourroit lui donner ſans riſques : mais il faudroit que cette opération fût dirigée par une perſonne qui joignît une longue pratique à une ſaine théorie.

CONCLUSION.

On peut conclure de tout ce que je viens de dire au ſujet du tangage & du roulis.

1°. Pour mettre le vaiſſeau en état de réſiſter plus longtemps aux efforts du tangage, il faut diminuer, autant qu'il eſt poſſible, le nombre des parties qui peuvent s'allonger dans le ſens de ſa longueur, en ſuivant les nouvelles méthodes de former la partie de l'avant, les membres & les ponts ; rendre les ponts, ferre-beauquières, goutières, iloires, vaigres, préceintes, &c. les plus droites, en tout ſens, pour augmenter leur réſiſtance & leur difficulté à céder à l'allongement du navire ; ajuſter, comme je l'ai dit, les écarts des quilles, contrequilles, carlingues, clefs ou rempliſſages, entre les membres, iloires renverſées & étances de la calle, de façon que toutes ces pièces s'oppoſent avec plus de force aux efforts que le vaiſſeau fait pour ſe recourber & ſe raccourcir par en bas, en s'allongeant par en haut ; avoir une attention ſingulière, dans la conſtruction & dans l'arrimage, de rendre le poids de chaque partie du vaiſſeau le plus proportionnel au volume d'eau qu'elle déplace.

2°. Pour mettre le vaiſſeau en état de réſiſter plus longtemps

longtemps aux efforts du roulis, il faut augmenter la force de ſes côtés, en faiſant la partie de l'avant, les membres & les ponts comme pour le tangage ; rendre les baux les plus droits dans le ſens de la largeur du vaiſſeau, ainſi que toutes les autres pièces qui peuvent s'allonger dans ce ſens ; fortifier les côtés de l'œuvre morte au-deſſus du ſecond pont, vis-à-vis des porte-aubans, par des courbes verticales & bordages de chêne ; enfin, avoir attention, dans l'arrimage, d'éloigner du centre de gravité, ou du milieu du vaiſſeau, le leſt de fer ou autres parties lourdes qui ſe trouvent dans les calles ou ſur les ponts.

En réſumant les moyens que je viens de détailler, on voit 1°. que les nouvelles méthodes pour former les différentes parties du vaiſſeau, qui s'oppoſent le plus directement aux efforts du tangage, conviennent également pour réſiſter aux efforts du roulis.

2°. Que la différente forme que je donne à ces parties, ne ſçauroit préjudicier aux autres qualités du vaiſſeau, puiſqu'elle ne change point la figure de ſa carène, & qu'elle n'augmente pas la peſanteur de ſa coque.

3°. Au contraire, cette nouvelle forme doit contribuer à conſerver au vaiſſeau ſes bonnes qualités, en lui faiſant garder plus longtemps ſa première figure. L'expérience nous apprend que les vaiſſeaux ſe comportent toujours mieux dans leurs premières campagnes que dans les dernières, où l'arc & la plus grande largeur qu'ils ont acquis ont changé la figure de leur ligne d'eau & augmenté la réſiſtance de la proue.

4°. Enfin cette nouvelle méthode de former l'avant, les membres & les ponts des vaiſſeaux, eſt beaucoup plus économique dans la pratique de la conſtruction, & réunit les autres avantages que j'ai détaillés.

Ainſi les moyens que je propoſe pour procurer aux différentes parties du vaiſſeau la ſolidité néceſſaire

pour réſiſter aux efforts du roulis & du tangage, conviennent à la pratique de la conſtruction, & ne ſçauroient préjudicier aux autres bonnes qualités du vaiſſeau.

NOUVELLE FAÇON DE TERMINER L'AVANT des vaiſſeaux, plus ſolide contre les mouvemens de tangage, moins ſujette à pourrir, plus ſuſceptible de radoub, & plus géométrique que celle dont ont ſe ſert.

LA partie du vaiſſeau compriſe entre le mât de miſaine & l'étrave eſt, ſans contredit, celle qui fatigue le plus dans les mouvemens du tangage, tant par les efforts qu'elle reçoit de la part du fluide, que par les poids qu'elle porte.

Cette partie a toujours été terminée depuis le couple du *coltis C* juſqu'à l'étrave, par des allonges d'écubier *A* (*fig.* 1ere, 3e & 5e), ou des pièces de bois de bout, preſque parallèles à l'étrave, miſes à côté l'une de l'autre. Elles n'ont ni varangues ni genoux, & ne ſont liées les unes aux autres que par des chevilles de fer rondes ou quarrées.

Tout le maſſif qui porte à faux ſur l'étrave ne peut faire corps & être lié avec le reſte du vaiſſeau, que par les bordages extérieurs & intérieurs, qui, à cauſe de la rondeur de l'avant & des écarts qu'il faut croiſer, ſont fort difficiles à trouver un peu longs.

Les guirlandes *B* (*fig.* 3e.), que l'on met en dedans, n'ont pas les branches aſſez longues pour dépaſſer le couple du coltis & croiſer les autres couples : auſſi voit-on que cette partie ſe détache ſans peine du reſte du vaiſſeau, qui a toujours plus d'arc depuis le mât de miſaine juſqu'à l'étrave, que dans tout le reſte de ſa longueur.

On eſt toujours obligé, pour donner aux allonges d'écubier la longueur, la tournure, l'équerrage & l'é-

chantillon néceſſaire, d'employer des pièces de fortes dimenſions, qui ſont ordinairement ſur le retour, & de découvrir le cœur du bois, cauſes prochaines de pourriture.

Ces pièces ſont poſées de façon que l'eau, qui ſubmerge preſque toujours l'avant, les pénètre de haut en bas. Enfin le peu d'air qui eſt entr'elles, & le frottement continuel cauſé par le tangage & leur peu de liaiſon, font qu'elles ſe trouvent ordinairement pourries, tandis que le reſte du vaiſſeau eſt encore en bon état.

L'on ne ſçauroit changer, à flot & ſans beaucoup de difficulté, une allonge d'écubier qui ſe trouve pourrie, puiſque ces pièces vont du haut en bas. On ne peut les ôter & les remplacer, ſans dévaigrer ou déborder entièrement l'avant, ôter les ſerre-bauquières & les guirlandes, dont les chevilles vont du dehors au dedans: ce qui ne peut ſe faire ſans beaucoup de frais & ſans délier le vaiſſeau.

La figure du vaiſſeau, terminée par des allonges d'écubier, ne peut être exactement la même que le conſtructeur ſe le propoſe. On eſt obligé de finir cette partie ſur les liſſes en place, qui ont, dans cet endroit, beaucoup de rondeur. Elles ſont ſujettes à ſe déjetter; elles cédent au poids des pièces qu'elles portent. Un acore plus forcé d'un côté que de l'autre donne une différence. L'intervalle entre les liſſes eſt indéterminé & dépend du charpentier: de ſorte qu'on ne peut pas même aſſurer que les deux côtés ſoient parfaitement égaux.

On faiſoit autrefois l'arrière du vaiſſeau comme l'avant; c'eſt-à-dire que l'on mettoit à l'arrière des pièces de bois de bout, preſque parallèles à l'étambot, qui deſcendoient depuis la liſſe d'ourdy juſqu'à la liſſe des façons, & venoient juſqu'à l'eſtain qui étoit parallèle auxautres couples.

L'arrière, ainſi terminé, étoit preſque auſſitôt pourri & ſujet aux mêmes inconvéniens que l'avant. Il y a même eu des arrières, faits de cette façon, qui ont été enfoncés par un coup de mer.

On eſt parvenu peu à peu à rectifier cette partie. On a ſubſtitué, aux pièces parallèles à l'étambot, des pièces parallèles à la quille (*fig.* 7e & 8e), en forme de varangues acculées & fourcats, dont les extrémités ſont entaillées & chevillées avec l'eſtain & le milieu avec l'étambot.

On a dévoyé l'eſtain, pour lui donner plus de force & diminuer ſon équerrage. On a porté ſon pied en avant, pour faire en ſorte que les bordages extérieurs & intérieurs priſſent plus de parties de l'arcaſſe qui ſe trouve ainſi prolongée, & dont toutes les pièces ſont un tout que l'on lie aiſément & ſolidement avec le reſte du vaiſſeau par la courbe d'étambot, le marſouin de l'arrière, les courbes d'arcaſſe & d'écuſſon qui croiſent les barres, l'eſtain & une partie des couples qui ſont en avant.

Tout le monde convient que cette nouvelle façon de faire l'arrière des vaiſſeaux eſt beaucoup plus ſolide, moins ſujette à pourrir, & plus ſuſceptible de radoub que l'ancienne.

Je propoſe donc de faire l'avant comme on fait actuellement l'arrière. L'étrave repréſenteroit l'étambot; le couple du coltis dévoyé ſeroit l'eſtain; la partie compriſe entre ce couple & l'étrave ſeroit garnie de barres *B* (*fig.* 2e, 4e & 6e), depuis le deſſous du beaupré juſqu'à la liſſe des façons.

Comme les bordages de l'avant ne relèvent pas autant que ceux de l'arrière, les barres ne ſeroient pas parallèles à la quille; mais elles ſeroient un angle preſque droit avec les liſſes *L* (*fig.* 6e) qui ont la même pente que les bordages, pour que ces mêmes bordages priſſent plus de parties & plus de barres à la fois.

Afin qu'aucun bout des bordages qui viennent ſur la rablure ne portât en maille, on mettroit ſeulement, *bâbord* & *tribord*, une allonge d'écubier *A*, qui entailleroit dans toutes les barres & ſeroit chevillée contre l'étrave, (*fig.* 2e).

Tous les bouts des barres entailleroient & ſeroient chevillés au couple du coltis, & le milieu à la contr'étrave, que l'on feroit un peu plus forte pour qu'elle ne fût pas affoiblie par ces entailles.

Les écubiers ſeroient entre deux barres, où l'on mettroit une fourrure dans laquelle on les perceroit. On auroit, ſi on vouloit, la facilité d'y ajuſter un virolet ou rouet pour diminuer le frottement des cables.

Les barres ſeroient en partie faites de deux ou de trois pièces (*fig.* 2e, 4e & 6e), ſuivant que le bois le permettroit, ayant attention de croiſer les écarts. Quand même on voudroit les faire toutes d'une ſeule pièce, elles ne ſeroient pas plus difficiles à trouver, & leur nombre n'excéderoit pas celui des guirlandes qu'on eſt obligé de mettre ſous le beaupré, ſous les écubiers, aux premiers & ſeconds ponts, entre le premier & le faux pont, au faux pont, & depuis le faux pont juſqu'à la carlingue du mât de mizaine.

On épargneroit, à chaque vaiſſeau, dix-huit ou vingt pièces propres pour étraves ou demi-baux, que l'on employe en allonges d'écubier, & l'avant ſeroit d'autant plus léger.

Cette nouvelle façon de faire l'avant ne ſeroit ſujette à aucun des inconvéniens de l'ancienne. L'étrave, la contr'étrave, les barres, le couple du coltis, chevillés & entaillés enſemble, formeroient un tout qu'il ſeroit plus aiſé de lier avec le reſte du vaiſſeau que l'arrière, par le marſouin de l'avant, & les ſerre-bauquières, auxquelles on donneroit, dans cette partie, un peu plus d'épaiſſeur.

On mettroit au-deſſous du premier pont & du faux-

pont des pièces *E* (*fig. 4e*) en écharpe , qui , partant de la contr'étrave , croiſeroient les barres , le couple du coltis & partie des couples qui ſont en arrière. Ces pièces ſeroient preſque droites & de peu de conſéquence.

Les barres ſeroient faites d'un bois d'échantillon ordinaire , qui ſeroit encore dans ſa vigueur : l'équerrage étant moins fort n'en découvriroit pas le cœur.

L'eau qui tombe ſur le coltis ne les pénétreroit pas dans toute leur longueur , & ne feroit que gliſſer ſur leur ſurface ſupérieure que l'on pourroit enduire de quelque maſtic.

En pratiquant de haut en bas , bâbord & tribord , le long de l'étrave , un canal ou anguillière entre les barres & le bordage , on feroit rendre l'eau à la pompe.

Les mailles , ou vuide que l'on laiſſeroit entre les barres , leur donneroient de l'air & empêcheroient le frottement.

On pourroit toujours aiſément changer à flot , ſans beaucoup de frais & ſans délier le vaiſſeau , une barre qui ſe trouveroit pourrie ; puiſqu'elle ne ſeroit recouverte que par trois ou quatre virures de vaigres , que l'on ôteroit & remplaceroit très-facilement.

La figure du vaiſſeau dans cette partie , qui eſt la plus eſſentielle , ſeroit exactement la même que le conſtructeur ſe le propoſeroit , puiſque la figure des barres & leur coupe ſeroit déterminée ſur ſon plan , & exécutée ſur ſes gabaris ; & la pratique de la conſtruction ſeroit pouſſée à un point de perfection qui ne laiſſeroit plus rien à deſirer.

NOUVELLE FAÇON DE FORMER LES MEMBRES ou couples des vaiſſeaux pour les mettre en état de réſiſter plus longtemps aux efforts du tangage & du roulis, diminuer les progrès de la pourriture, & la dépenſe de leur conſtruction par l'économie dans l'emploi des bois, ſupprimer les porques, & mettre les vaiſſeaux à l'abri du canon ſans augmenter leur peſanteur.

LA nouvelle façon de former la partie de l'avant & l'arrière du vaiſſeau ne laiſſant plus rien à deſirer, j'ai travaillé ſur les parties intermédiaires ou le corps du vaiſſeau.

Ce corps ou ſquelette eſt compoſé de membres ou côtes (*fig. 9e, 10e & 11e*) qui s'élèvent en forme de croiſſants ſur la quille, que l'on peut comparer à l'épine du dos.

Ces membres ſont formés de deux rangs de pièces de bois, au nombre de onze à quinze, miſes bout à bout & accouplées de façon que le milieu des unes répond aux extrémités des autres, pour faire un tout & croiſer les écarts. On les appelle *couples*, parce qu'ils ſont doubles de l'avant à l'arrière ; ou *coupes*, parce que chacun d'eux repréſente la figure qu'auroit le vaiſſeau coupé dans ſon endroit. Tout cet aſſemblage n'eſt lié que par des chevilles de fer quarré, qui ne ſont rivées d'aucun côté.

Le couple ainſi formé ne l'eſt pas de la façon la plus avantageuſe contre les efforts qu'il doit ſoutenir. Les plus violens ſont de l'avant à l'arrière, ou dans le ſens de ſa largeur, quand le vaiſſeau tangue ou échoue ; & de bâbord à tribord, ou dans le ſens de ſon épaiſſeur, quand le vaiſſeau roule, que les canons ſont à la ſerre, ou dans le temps du combat.

A tous ces efforts, les pièces qui croiſent les écarts

ne réſiſtent que très-foiblement, & ne font aucun effet, dès que les chevilles qui les lient ont le moindre jeu; ce qui arrive même avant que l'on arme le vaiſſeau, en montant ſes couples, lorſque le bois vient à ſécher, ou en le lançant à l'eau.

Les chevilles ou goujons, d'où dépend la ſeule liaiſon des couples, &, par conſéquent, de tout le vaiſſeau, une fois larguées, les pièces & les écarts ſe déſuniſſent, le vaiſſeau arque, & l'on voit ſouvent, dans les mouvemens du roulis, le vaigrage ou bordage intérieur s'ouvrir à paſſer les doigts dans les joints.

Les vaiſſeaux dans cet état, on imagina, dans l'ancienne marine, de les relier par des *porques* ou des couples plus forts, mis au-deſſus du vaigrage de façon qu'ils croiſent les écarts des couples ſur leſquels ils ſont appliqués & chevillés.

Les porques font ſur le côté du vaiſſeau le même effet que les contreforts ſur les murs; mais leur force ſeroit bien plus conſidérable, ſi elle étoit appliquée ſur tous les couples. On a ſi fort ſenti la néceſſité des porques, qu'on en met, depuis quelque temps, à tous les vaiſſeaux neufs dès leur conſtruction: mais on ne peut en mettre qu'une certaine quantité, &, tout au plus, une entre chaque ſabord. Il reſte ordinairement dix pieds d'intervalle d'une porque à l'autre, & c'eſt dans cet endroit, qui ſe trouve le plus foible, que ſe fait tout l'effort du canon.

On ne ſçauroit multiplier les porques, ſans rencontrer les ſabords de la première batterie qui les couperoient, ſans rendre les vaiſſeaux extrêmement lourds, & ſans couper les membres par une infinité de chevilles qui traverſent le vaiſſeau de part en part, & cauſent des voyes d'eau que l'on ne peut étancher & qui deviennent conſidérables dans les vieux vaiſſeaux. Les porques conſomment des pièces de bois d'un fort échantillon, très-difficiles à trouver, & cauſent tant de

de difficulté dans les radoubs & dans l'arrimage, qu'on a pluſieurs fois, mais inutilement, eſſayé de les ſupprimer.

La difficulté de changer le vaigrage, ſur lequel les porques ſont appliquées, fait qu'on ne peut employer, pour vaigrer les vaiſſeaux, que les bois les plus vigoureux, les plus ſains & les moins ſujets à pourrir. Cette précaution deviendroit inutile en ſupprimant les porques. On pourroit ſe ſervir avec ſuccès des bois de chêne du nord, que l'on changeroit aiſément lorſqu'ils viendroient à pourrir, & dont la longueur & la largeur ſeroient bien avantageuſes contre les efforts du tangage & l'arc du vaiſſeau.

La corruption des bois eſt un autre inconvénient qui naît de l'aſſemblage des couples faits comme à l'ordinaire (*fig.* 9e, 10e & 11e).

On travaille avec ſoin les deux ſurfaces des pièces qui doivent, pour ainſi dire, ſe coller enſemble. L'air n'y paſſe jamais, ſurtout lorſque le joint eſt recouvert par les bordages extérieurs & intérieurs. La ſéve du bois, que l'on employe preſque toujours verd, ne trouvant aucune iſſue, y fermente, & le frottement continuel, cauſé par la déſunion des pièces, accélère la pourriture que l'on eſt toujours ſûr de trouver en cet endroit, quoique la partie du couple, qui eſt rafraîchie par le peu d'air qui eſt dans les mailles, paroiſſe encore en bon état.

Les différens radoubs, que l'on fait aux vaiſſeaux, m'ont toujours convaincu que toutes les parties qui ſont entaillées, ou collées de façon que l'air ne peut pas les rafraîchir, ſont toujours les premières pourries. Cette vérité eſt ſi fort connue de tous les conſtructeurs, qu'on a fait des vaiſſeaux, en Angleterre & en France, dont les deux rangs de pièces qui forment les couples étoient ſéparées par des fourrures ou taquets de quatre à ſix pouces d'épaiſſeur, que l'on

plaçoit à l'endroit des chevilles ; mais, ces taquets ou fourrures venant à fécher ou à fendre, les chevilles ſe trouvent dégarnies, les liaiſons interrompues, & le vaiſſeau en peu de temps hors d'état de ſervir.

Mon projet eſt plus ſimple & plus facile à exécuter. Ce n'eſt pas la largeur qui fait la force du couple, mais l'épaiſſeur & la façon dont il eſt lié. Le mien, (*fig. 12e, 13e & 14e*) au lieu d'être double de l'avant à l'arrière, le ſeroit du dehors au dedans ou de bâbord à tribord, & auroit la moitié plus d'épaiſſeur que l'autre. En diminuant l'épaiſſeur du bout des pièces qui forment les écarts, on pourroit augmenter d'autant la courbure de ces pièces. Celles qui les croiſeroient fourniroient au défaut d'épaiſſeur, & auroient, au moins aux endroits les plus foibles, autant d'épaiſſeur que les anciens couples. Les différens angles, que les pièces feroient entr'elles, formeroient des arrêtes qui augmenteroient la liaiſon & diminueroient le frottement ; & on pourroit ſe ſervir de pièces preſque droites & d'un échantillon ordinaire, pour former celles qui ont le plus de courbure.

Ce couple ainſi formé s'oppoſeroit directement aux efforts qu'il doit ſoutenir. Il ne ſçauroit ſe déſunir ni s'allonger dans les mouvemens du tangage, & ſes écarts ne ſçauroient larguer dans les mouvemens du roulis, ſans que les pièces qui les croiſeroient ne caſſaſſent. Le couple intérieur, ou le rang de pièces du dedans, feroit le même effet qu'une porque, & chaque couple auroit la ſienne ; ainſi il ſeroit inutile d'en mettre ſur le vaigrage : ce qui rendroit les radoubs moins difficiles & moins coûteux, l'arrimage beaucoup plus aiſé, la calle plus ſpacieuſe & plus commode.

Le nombre des couples augmenteroit d'un tiers, ainſi que celui des mailles ; & le vaiſſeau ſeroit néanmoins plus léger, par la diminution de l'échantillon & la ſuppreſſion des porques. Il coûteroit beaucoup moins

cher ; ſon côté ſeroit bien plus fort, & il n'y auroit pas de vaiſſeau de cinquante canons qui ne ſe trouvât à l'abri du boulet, puiſque ſes membres auroient à la flottaiſon treize à quatorze pouces d'épaiſſeur, tandis que ceux du *Tonnant*, qui n'ont qu'un pied, n'ont pas pu être percés.

Tous les couples ainſi liés, & chacun iſolé, ſeroient rafraîchis, de chaque côté, par l'air qui ſeroit entre les mailles. La plus grande diſtance qu'il y auroit entre le bordage & le vaigrage, en augmenteroit la quantité. L'aſſemblage du couple ſe trouveroit au milieu de la maille, & ne ſeroit recouvert d'aucun côté ; ce qui permettroit un libre cours à la deſſudation de la ſéve, qui, n'étant plus renfermée, n'occaſionneroit pas la pourriture.

On pourroit pratiquer à chaque couple, de diſtance en diſtance, aux endroits où il n'y auroit point de chevilles, des entailles à jour, pour laiſſer paſſer & renouveller l'air de maille en maille, de l'avant à l'arrière ; ce qui ſeroit très-avantageux pour empêcher le progrès des champignons.

Les bordages s'ajuſteroient mieux contre les membres, qui, étant moins larges, prendroient mieux la rondeur du vaiſſeau, & n'auroient pas beſoin de ſi forts équerrages, ſurtout en avant & en arrière. On eſt obligé d'employer, dans ces endroits, des pièces de fortes dimenſions, que l'on coupe en ſifflet en ne laiſſant que le cœur du bois, qui eſt la partie la plus ſuſceptible de pourriture.

L'ouvrage du perceur ſeroit plus ſolide & plus aiſé. Tous les clous & chevilles qui ſe trouvent dans le joint des couples ordinaires, tendent à les déſunir & ne font aucun effet. Celles qui les lient ne ſont point rivées, & ne ſçauroient l'être dans les couples de rempliſſage, par le peu de diſtance qu'il y a entre les mailles. On eſt même obligé, pour pouvoir placer ces chevilles,

de percer le couple diagonalement ; ce qui fait une très-mauvaiſe liaiſon, en coupant le fil du bois. Les chevilles que l'on met à tous les bouts des bordages, préceintes, courbes de pont, &c. percent & affoibliſſent les couples ſans les lier. La même pièce eſt percée en dehors par les clous du bordage, & en dedans par ceux du vaigrage ; de ſorte qu'il ne lui reſte plus de force, & qu'elle caſſe au moindre effort.

Aucun de ces inconvéniens ne ſe rencontreroit dans les nouveaux couples. Les clous & chevilles ne ſçauroient ſe trouver dans les joints. Celles qui les lient, étant percées du dehors au dedans, ſeroient rivées ſans difficulté ſur les membres & ſur les rempliſſages, & pourroient ſe repouſſer de même. Leur direction ne couperoit pas le fil du bois, & s'oppoſeroit aux efforts qu'il doit ſoutenir. Les chevilles que l'on met à chaque bout de bordages, courbes, &c. lieroient les membres qu'elles perceroient. Une même cheville, par exemple, pourroit lier, en même temps, le bordage, les deux pièces du membre, le vaigrage & une des branches d'une courbe de pont. Le membre intérieur ne ſeroit percé que par les clous du vaigrage, & celui du dehors par ceux du bordage ; ce qui donneroit la facilité de multiplier ces clous, & d'augmenter la liaiſon.

On auroit attention que les écarts des bordages & des préceintes vinſſent, comme à l'ordinaire, préciſément au milieu des membres, pour y être cloués & chevillés avec la même facilité qu'on l'a pratiqué aux vaiſſeaux dont les couples ſont ſéparés par des taquets ou fourrures.

Les avantages que les nouvelles méthodes de former l'avant & les membres des vaiſſeaux, joignent à ceux de la plus grande ſolidité pour réſiſter aux mouvemens du tangage & du roulis, m'ont engagé à détacher ces deux méthodes du corps de l'ouvrage, pour pouvoir

les détailler plus au long, & faire mieux ſentir la néceſſité & l'utilité de leur application à la pratique de la conſtruction des vaiſſeaux.

EXPLICATION DES FIGURES.

La figure première repréſente le plan d'élévation de la partie de l'avant d'un vaiſſeau, vue de face par dehors & faite ſuivant l'uſage ordinaire.

La figure ſeconde repréſente le même plan, fait ſuivant la nouvelle méthode.

La figure troiſième repréſente le même plan d'élévation coupé dans le ſens de la longueur du vaiſſeau, & vu de côté pour découvrir l'intérieur de la partie de l'avant, faite ſuivant l'uſage ordinaire.

La figure quatrième repréſente le même plan, fait ſuivant la nouvelle méthode.

La figure cinquième repréſente le plan d'élévation de l'avant du vaiſſeau, vu de côté par dehors, & fait ſuivant l'uſage ordinaire avec les liſſes *L*.

La figure ſixième repréſente le même plan, ſuivant la nouvelle méthode.

La figure ſeptième repréſente le plan d'élévation de la partie de l'arrière ou de l'arcaſſe du vaiſſeau, vue de côté ou de profil.

La figure huitième repréſente le même plan, vu de face ou par derrière.

La figure neuvième repréſente le plan d'élévation d'une partie du vaiſſeau, garnie de membres *A*, vu de côté ou de profil pour montrer la façon dont les deux rangs de pièces *B*, *C*, ſont ajuſtées dans le ſens de la longueur du vaiſſeau, avec les jours ou mailles qui reſtent ordinairement entre les membres.

La figure dixième repréſente le plan d'élévation d'un membre *A*, vu de face avec ſa porque *P*, bordages &

& vaigrages, pour faire voir les épaiſſeurs de toutes les pièces, & de quelle façon elles ſont ajuſtées dans le ſens de la largeur du vaiſſeau. La pièce *B* a été détachée pour découvrir l'écart *C* du rang de pièces qui ſont en deſſous.

La figure onzième repréſente le même couple, vu de profil avec la même pièce *B* détachée.

Ces trois figures, neuvième, dixième & *onzième*, repréſentent les différens plans des membres ou couples, fait ſuivant l'uſage ordinaire.

Les figures douzième, treizième & *quatorzième*, repréſentent les mêmes plans des membres ou couples, faits ſuivant la nouvelle méthode.

La figure quinzième repréſente le plan d'élévation d'une partie du côté du vaiſſeau vue par dehors, garnie de membres *A*, faits ſuivant la nouvelle méthode avec des pièces ou fourrures *C*, en rempliſſages dans les mailles, entaillées à queue dans les membres, pour les reſſerrer & les empêcher de s'écarter les uns des autres. Les feuillets *S*, des ſabords *L* ſont auſſi entaillés à queue. On voit auſſi, dans la même figure, la quille *Q*, la contre-quille *R*, la carlingue *K* avec leurs écarts *E*, faits ſuivant la nouvelle méthode.

La figure ſeizième repréſente le plan d'une partie du premier pont d'un vaiſſeau, depuis l'étambot juſqu'au mât d'artimon, où l'on voit la diſpoſition des baux *A*, arcboutans *B*, barrottins *C*, fourrures de goutières *L*, goutières *M*, illoires *N*, barre de pont *P*, membres *Q*, mailles ou jours entre les membres *O*. Ce pont eſt fait ſuivant l'uſage ordinaire.

La figure dix-ſeptième repréſente le plan horiſontal du deſſus d'un bau *A*, tels qu'on les voit ſur le plan du pont, *figure ſeizième*. Ce bau eſt fait de deux pièces *B*, *C*, ajuſtées ſuivant l'uſage ordinaire.

Les figures dix-huitième & *dix-neuvième*, repréſentent les mêmes plans d'un pont & d'un bau, fait de deux piéces, ſuivant la nouvelle méthode.

figure 1re

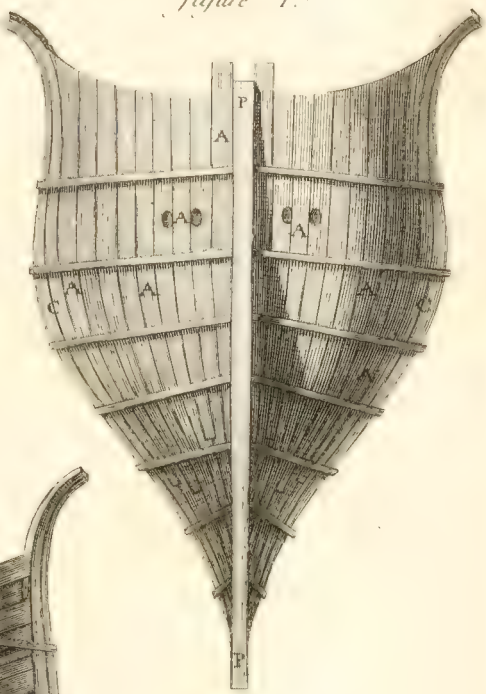
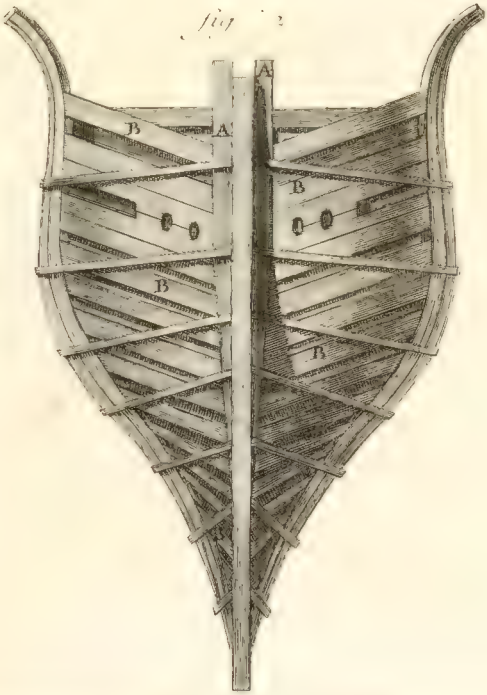


fig 2



Desfhrt Sculpsit

fig 3

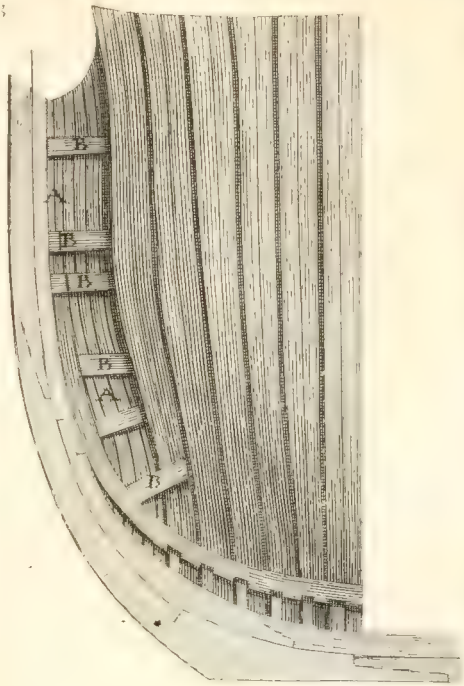
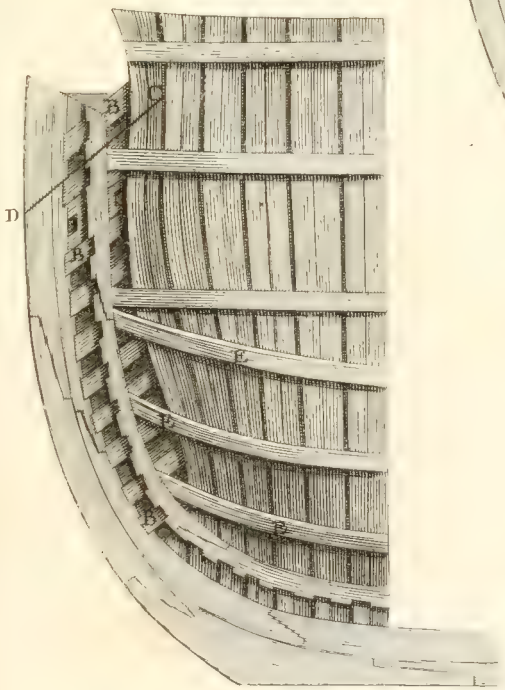


fig 4



Coupe suivant la ligne CD

L. Le Prêtre sculpsit

fig. 5

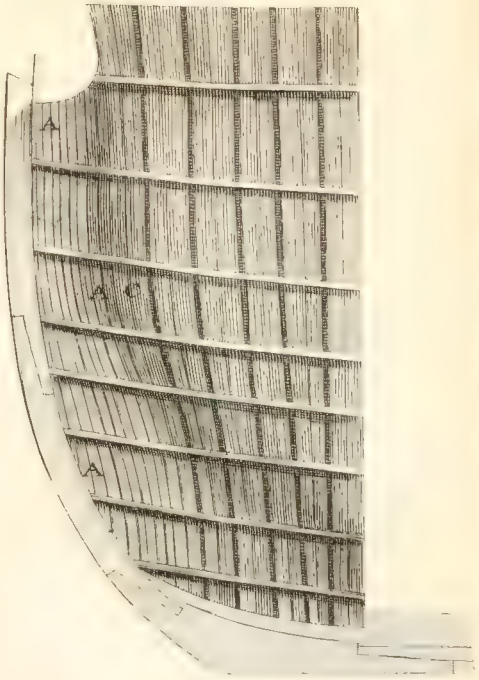
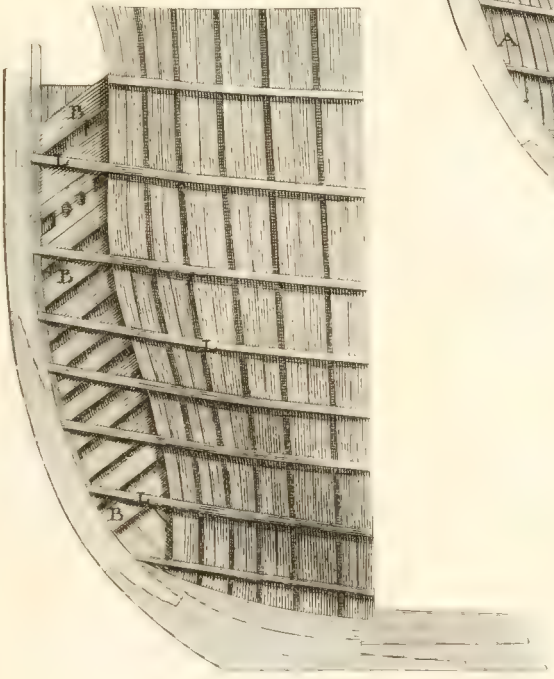
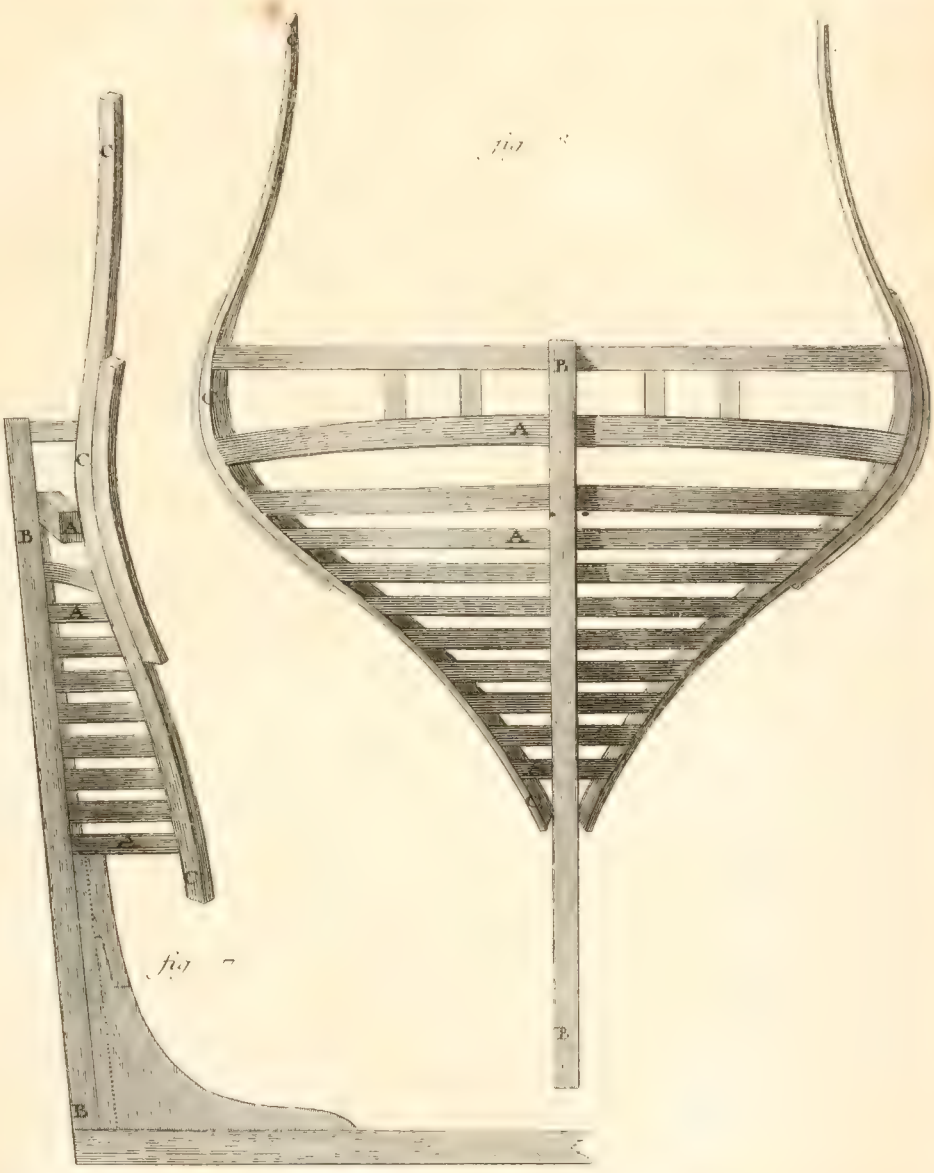


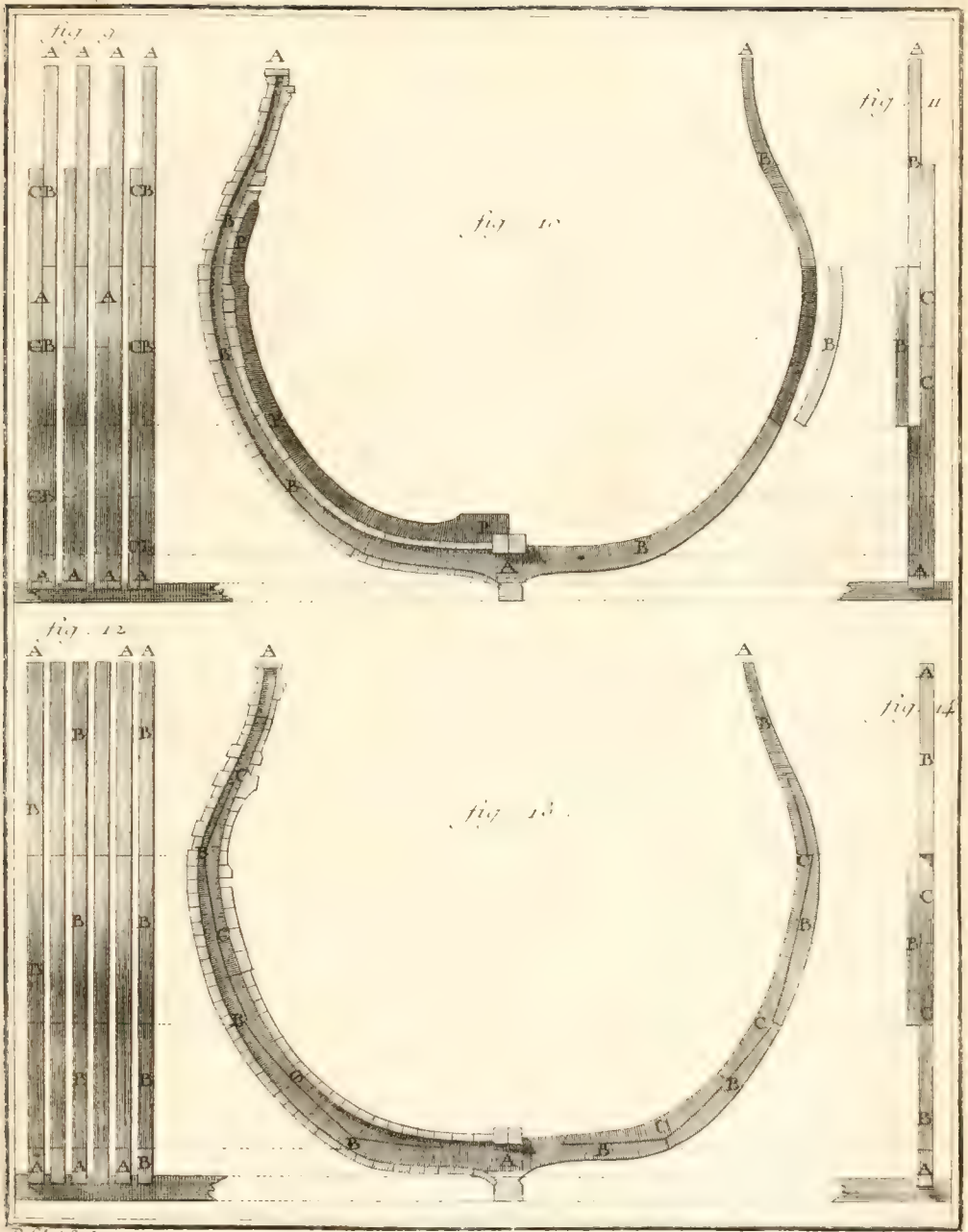
fig. 6



Deschet Sculpsit



Petchert Sculpsit



Desfehrt Sculpsit

fig. 16.

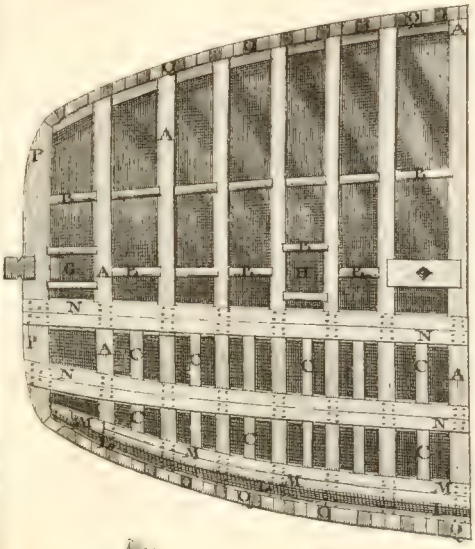


fig. 17.

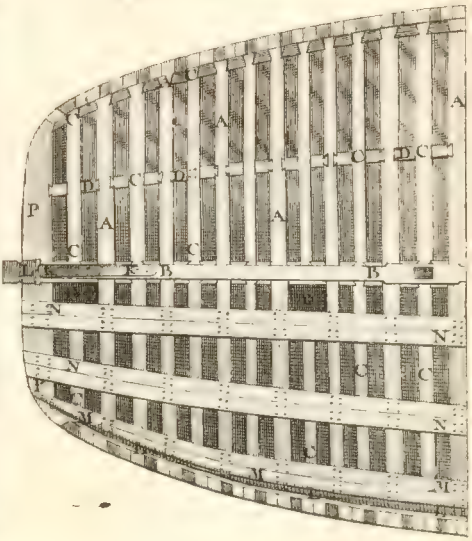


fig. 18.

fig. 15.

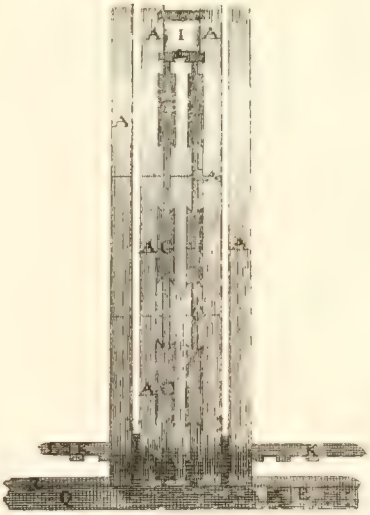
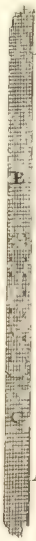


fig. 1[illegible]



MÉMOIRE

QUI A REMPORTÉ LE PRIX

EXTRAORDINAIREMENT PROPOSÉ

PAR

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,

POUR L'ANNÉE 1760.

Quels ſont les moyens les plus propres à porter la perfection & l'économie dans les Verrèries de France?

Par M. Bosc d'Antic, docteur en Médecine & correſpondant de l'Académie Royale des Sciences.

A PARIS,

Chez Durand, Libraire, rue du Foin, la première porte cochère à droite, en entrant par la rue S. Jacques.

M. DCC. LXI.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

ERRATA.

Page 8,	*ligne* 11,	forcés baiſſer,	*liſez* forcés de baiſſer.
14,	31,	un feu,	un froid.
19,	36,	patelle,	palette.
20,	29,	l'attempage,	l'atrempage.
ibid.	31,	groſſe,	graſſe.
40,	35,	de ſmalte,	du ſmalte.
48.	34.	& leur	*ôtez* &.

MÉMOIRE

SUR LE PRIX PROPOSÉ

PAR L'ACADEMIE ROYALE

DES SCIENCES.

Quels ſont les moyens les plus propres à porter l'économie & la perfection dans les Verreries de France ?

MÉMOIRE

SUR le prix propoſé par l'Académie Royale des Sciences : *Quels ſont les moyens les plus propres à porter l'économie & la perfection dans les Verreries de France?*

Non fingendum, aut excogitandum, ſed inveniendum, quid natura faciat aut ferat. BACON.

L'ART de la verrerie eſt un des plus importans dont la chymie ait enrichi les hommes. Il nous fournit les vaſes les plus commodes & les plus agréables. Sans nous priver des charmes de la lumière, il nous donne les moyens de nous mettre à couvert des injures de l'air. La conſervation d'une infinité de liqueurs précieuſes lui eſt uniquement due. C'eſt par ſon ſecours que nous remédions aux défauts de notre vue, ou que nous réparons les ravages que les années manquent rarement d'y produire. D'où nos appartemens tirent-ils leurs plus belles, leurs plus nobles décorations ? c'eſt de l'art de la verrerie. Peu de ſciences, peu d'arts peuvent ſe paſſer de ſon concours. Que ne lui doivent pas l'hiſtoire naturelle, l'aſtronomie, la phyſique expérimentale, & ſur-tout la chymie !

Un art, dont l'utilité eſt ſi étendue & les phénomènes

ſi propres à piquer la curioſité, devroit avoir déjà fait les plus grands progrès. Cette conſéquence paroît naturelle ; mais il eſt certain que l'art de la verrerie eſt très-imparfait. Dès ſon berceau, les chymiſtes l'ont abandonné, pour ainſi dire, à des gens incapables d'en pénétrer la nature, d'en développer les principes, d'en connoître toutes les reſſources. Il a dégénéré en routine aveugle. Un petit nombre de ſçavans ont fait quelques efforts pour l'en tirer. Perſuadés que la nature ſe montre imparfaitement dans les laboratoires ordinaires, ils ſe ſont donné la peine d'aller en étudier les moyens dans les verreries.

Agricola (1) eſt, je penſe, le premier qui ait écrit avec quelque détail ſur cet art : mais ce qu'il dit ſur la matière dont ſe fait le verre, ſur les fourneaux où il ſe fait, & ſur la manière dont on le fait, n'eſt qu'une ſimple deſcription de ce qu'il avoit vu pratiquer dans les verreries de ſon temps. On ne trouve, dans le douzième livre de ſon traité de *métallique*, preſque aucun principe certain, aucune obſervation judicieuſe, aucune vue utile. Il y a même des erreurs groſſières que nous aurons occaſion de relever ; entre autres que le *ſel gemme*, combiné avec le ſable, produit du verre.

Néri eſt regardé comme l'oracle de l'art de la verrerie. Il ne dit cependant pas un mot des fourneaux, ni des creuſets, qui en ſont la véritable baſe. La compoſition que *Kunckel* rapporte en quatre lignes, vaut aſſurément mieux que tout ce que *Néri* a dit ſur les différentes manières de préparer les matières & de faire le cryſtal (2). Ses commentateurs ne nous offrent pas de plus grandes reſſources. *Merret* n'a ajouté à ce qu'avoit écrit *Agricola* ſur les fourneaux, & ſur la manière de travailler le verre, que quelques pratiques Angloiſes de peu de conſéquence. Ses notes ſur *Néri* prouvent

(1) Georg. Ag. de Re metal. lib. 12. & de Nat. foſſil. lib. 5, p. 274, 275.
(2) V. la p. 101 de l'Art de la Verr. trad. fr. in-4°.

qu'il avoit plus lu qu'opéré. *Kunckel*, avec moins de travail, auroit été infiniment plus loin, s'il avoit eu des principes. Tout ſe réduit dans ſes remarques à quelques méthodes particulières, la plupart pratiquées dans les verreries de ſon temps, & à quelques obſervations utiles. *Néri* & *Merret* n'avoient eu en vue que le beau verre, ſans s'embarraſſer de la dépenſe. *Kunckel* a ſenti que la perfection de l'art conſiſtoit à produire la plus belle qualité avec le moins de frais poſſible, ce qui eſt un mérite. Je ne crois pas qu'on puiſſe tirer de plus grandes lumières du précis que le célèbre *Henckel* a donné de *Néri*, *Merret* & *Kunckel*, ni de ce qu'il a ajouté ſur ſes trois eſpèces de verre, minéral, végétal & mixte (1). L'art auroit été ſans doute enrichi d'utiles découvertes, ſi ce ſçavant minéralogiſte avoit été à portée, comme il le dit lui-même, d'opérer dans des fourneaux de verrerie.

L'art de la verrerie d'*Haudiquer de Blancourt* eſt, à quelques changemens & additions près, une traduction de ce qu'*Agricola* avoit écrit ſur cette matière, des ſept livres de *Néri*, & des notes de *Merret*. Cet ouvrage ſe feroit lire avec plaiſir, ſi l'auteur ne donnoit trop fréquemment dans les idées extraordinaires de l'alchymie. *Haudiquer* s'attribue tout, & ne cite pas même *Neri*. Sa traduction ne me paroît pas plus propre à perfectionner l'art de la verrerie que les originaux (2).

Ce que le célèbre *Boerhawe* a écrit ſur cette matière dans ſes *Elémens de chymie*, ne répond pas, j'oſe le dire, à ſa réputation ; il n'y a peut-être pas dans tous ſes ouvrages de morceau plus foible que l'article de la vitrification. Voyez ſes *Elém. de chymie*, tom. VI, pag. 157 & ſuiv. tom. V, p. 276, 277, 316 & ſuiv. trad. françoiſe.

Ne nous flattons point de trouver de plus grands

(1) V. Henckel, Flor. ſaturn. cap. 11.

(2) 2 vol. in-12°. imprim. en 1696 chez J. Jombert ; réimprimés & augm. d'un traité des pierr. préci. & des glaces à miroir, en 1718, chez C. Jombert.

ſecours dans les ouvrages que *Merret* cite vers la fin de ſa préface (1). On ne voit, dans les auteurs dont nous venons de parler, preſque aucun principe ſolidement établi, aucun phénomène clairement expliqué : tout ſe réduit, à peu de choſe près, à des méthodes particulières, à des préceptes relatifs aux matières qu'ils ont eues ſous leur main, ou aux fourneaux dont ils ſe ſont ſervis ; tout cela eſt donc peu utile à ceux qui ont à opérer dans des circonſtances différentes. Ils n'ont rien dit de ſatisfaiſant ſur la matière, la préparation, & la conſtruction des fourneaux ; ſur la compoſition & la forme des creuſets ; ſur la proportion qu'il doit y avoir entre les creuſets & le fourneau ; ſur le dégré de feu le plus avantageux ; ſur la nature des matières à convertir en verre ; ſur les cauſes de la dépuration, de la plus ou moins grande tranſparence des couleurs, du plus ou moins de ſolidité, des *bulles*, des *nuages*, des *graiſſes*, de la *rouille* ou *plombé*, des *ſilandres*, des *veines* du verre ; ſur la nature & les effets de la bonne *recuiſſon*, &c. Eſt-il un art dont la théorie ſoit ſi imparfaite ? Il eſt à préſumer que les lumières qu'on acquiert tous les jours en chymie nous mettront dans peu de temps en état de l'approfondir & de l'étendre. Perſonne ne me paroît nous avoir fourni autant & d'auſſi bons matériaux, que le ſçavant M. *Pott* (2) ; mais il faut être plus que ſimple artiſte pour les mettre en œuvre.

Jettons un coup-d'œil rapide ſur la pratique de l'art de la verrerie. Arrêtons-nous un inſtant ſur les productions de la routine. Voyons quelle eſt la qualité & le prix des ouvrages de verre. Nous aurons occaſion, dans la ſuite de ce mémoire, d'examiner les fourneaux,

(1) V. liber com. alch. part. 1, cap. 20. Ferrant. imper. lib. 14 & 15 : & Port. lib 6, cap. 3, &c.

(2) V. dans les Mém. de l'Ac. de Berlin, les Mém. de ce grand chym. ſur la magnéſie des verriers, ſur les creuſets, ſur le ſel de verre ; & ſur-tout ſa lithog. pyrothec. & continuation.

les creuſets, les compoſitions & les méthodes actuellement en uſage.

Il n'y a point d'endroit où la verrerie ait été ſur un pied plus brillant qu'à *Murano*. Les Vénitiens faiſoient un commerce conſidérable en miroirs, en cryſtal, & en toute eſpèce de verre. Ils ont, pour ainſi dire, entièrement perdu cette branche importante. Il ne reſte à Veniſe qu'un homme qui faſſe du cryſtal eſtimé, & il le vend à un prix exceſſif. Les glaces de *Murano* ſont les plus mauvaiſes de l'Europe; &, quoique moins chères que les nôtres, pour les bas volumes, elles ne ſont pas recherchées.

Les verreries Angloiſes ont une grande réputation. Elles ne ſont pas fort anciennes. Leurs progrès rapides ſont dûs à l'attention ſingulière du gouvernement à ne pas leur donner des entraves, à ne pas confondre l'intérêt du public avec celui du particulier. Les glaces, le cryſtal, le verre blanc & commun, forment aujourd'hui une branche conſidérable du commerce de la Grande-Bretagne. L'étranger conſomme les quatre cinquièmes des glaces Angloiſes. Il n'eſt point de pays où les Anglois ne trouvent moyen d'introduire leurs ouvrages de cryſtal & de verre. Autrefois ils tiroient de France preſque tout le verre dont ils avoient beſoin: aujourd'hui ils nous fourniſſent des luſtres, des lanternes, des verres à boire, des verres d'optique de toute grandeur, &c. La manufacture de Londres ne cède qu'à celle de *Neuſtadt* pour la beauté des glaces. On peut en voir des morceaux chez le ſieur *Sayde*, opticien de la Reine, à Paris, quai des Morfondus. Les grands volumes ſont très-chers. Des glaces de cent quarante-quatre pouces de hauteur ſur quarante pouces de largeur, ſe ſont vendues juſqu'à mille guinées (1). Quelques floriſſantes que ſoient leurs verreries, les An-

(1) V. le prem. vol. chap. 9 de l'eſſai ſur l'état du comm. de la Grande-Bretagne.

glois ne doivent point ſe flatter, avec *John Cary*, qu'elles ſoient *portées à la plus haute perfection*. Leur cryſtal n'eſt pas d'une belle couleur: il tire ſur le jaune ou ſur le brun, pour peu que la couleur rouge de la *magnéſie* domine. Il eſt ſi mal cuit, qu'il reſſue le ſel, ſe craſſit, ſe rouille promptement, eſt rempli de *points* & nébuleux. Un coup-d'œil jetté ſur les gâteaux de cryſtal que les Anglois font pour l'optique, en convaincra. Il a encore un autre défaut capital, c'eſt d'être extrémement tendre. Ils vendent cher leurs ouvrages: peut-être ſeroient-ils forcés baiſſer les prix, s'ils avoient des concurrens pour les lanternes & pour les verres d'optique.

Il ſe fait un grand commerce d'ouvrages de cryſtal & de verre blanc dans pluſieurs parties de l'Allemagne, en Saxe, en Bohême, dans la Franconie, le Palatinat, &c. Il nous vient, de ces différens endroits, pour des ſommes conſidérables, de luſtres, de bras de cheminée, de flaccons, caraffons, verres & gobelets, de cryſtaux de table, de verres à vîtres, à cadran, à eſtampes, ſouflés ſans *boudine*, & coulés en table ſans *boudine*, &c. (1). Le plus beau cryſtal d'Allemagne a deux avantages ſur celui d'Angleterre, d'être plus blanc & moins cher, quoiqu'il ſe vende à Paris depuis trois livres dix ſols juſqu'à cent ſols la livre tout taillé. Il joint aux autres défauts de celui d'Angleterre ceux d'être *filandreux*, & rarement exempt de petites pierres ou grains de ciment. Les verres plats de Bohême & du Palatinat ſont bien éloignés de la perfection dont je les crois ſuſceptibles. Ils ont un grand nombre de défauts; mais le plus déſagréable, c'eſt d'être d'une épaiſſeur inégale, *ondulés*. Les verres coulés en table de Nuremberg, ſont d'un verre commun bien *affiné*, très-bien polis, & ſe vendent au moins vingt-cinq pour

(1) V. les arrêts de conſeil en fait de verrerie.

cent

cent meilleur marché que nos glaces. On en trouve chez pluſieurs Miroitiers de Paris, & chez le plus grand nombre de ceux de province.

Le verre de nos verreries peut être diviſé en quatre eſpèces : verre à bouteilles ; verre commun verd, dit *chambourin ;* verre fin, blanc ; cryſtallin & cryſtal. Je ne connois que trois verreries en France où l'on faſſe de bonnes bouteilles, *Lolembrey* dans la forêt de Coucy, *Anor* dans le Hainault François, & *Sèves* près de Paris. Celles qu'on fait dans le pays de *Bareush* & à *Dellu* dans le Brandebourg, leur ſont ſupérieures pour la qualité & ſe vendent moins cher. A peine notre verre fin paſſeroit-il pour le verre commun d'Allemagne, & notre cryſtal pour le verre blanc étranger. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à comparer le verre plat, fin, ou de *deux feux* de Normandie, avec le verre commun à vîtres du Palatinat ; & le cryſtal de la verrerie de *la Pierre* avec le verre blanc de Bohême, ou avec les morceaux de verre blanc d'Angleterre qu'on trouve chez le ſieur *Sayde*. Il n'y a pas, je crois, de verre à vîtres plus imparfait que celui de nos groſſes verreries : il eſt rempli de défauts, de *bouillaſſes*, de *flandres*, de *larmes*, de *pierre*, mal *recuit*, ſe *plombe* très-promptement, & il eſt coloré au point d'être peu tranſparent, quoique fort mince. Dans quelques verreries, on a cherché à imiter les lanternes d'Angleterre ; mais on eſt très-éloigné d'y avoir réuſſi parfaitement.

Sur la fin du dernier ſiècle, Abraham *Thevart* fit une très-belle découverte en fait de verrerie : il trouva le moyen de couler le verre pour les glaces à miroir. Qu'en eſt-il réſulté ? des glaces d'un plus grand volume, & rien de plus. Les ouvrages de nos verreries ſont d'une mauvaiſe qualité & fort chers (1). S'écarte-

(1) Nos grandes glaces ſe vendent quinze ou ſeize francs la livre peſant : le calcul en eſt aiſé. Ces glaces ont trois à quatre lignes d'épaiſſeur, & le pied cube de verre pèſe environ 175 liv.

roit-on de la vérité, ſi l'on avançoit que nos verreries ſont plus utiles à l'Eſpagne qu'à la France ? Elles emploient annuellement pour près de deux millions de ſoudes d'Alicante & de Carthagène : Mais c'eſt trop s'arrêter ſur une choſe qui fait notre honte. Perſonne n'ignore que nos verreries ſont dans un état déplorable. Le prix extraordinaire que l'Académie Royale des ſciences a propoſé, pour ſeconder les vues d'un zélé citoyen, ne nous permet pas d'en douter. Cette compagnie reſpectable ne promet la palme qu'à celui qui aura donné les moyens les plus propres à porter la perfection & l'économie dans les verreries du royaume. Elle n'exige pas uniquement qu'on faſſe du beau verre ; elle veut auſſi qu'on puiſſe le faire à peu de frais : &, ces deux conditions remplies, nos verreries ſeront certainement en état de ſoutenir la concurrence avec les verreries étrangères.

Je ne doute pas qu'un grand nombre de perſonnes, en rendant juſtice aux vues & au zèle de l'Académie, ne mettent ce prix au rang de ceux de la quadrature du cercle, de la pierre philoſophale, &c. On eſt aſſez généralement perſuadé qu'il eſt impoſſible de faire en France d'auſſi beau verre & au même prix qu'en Allemagne. En Saxe, en Bohême, dans la Franconie, dans le Palatinat, dit-on, les beaux cailloux ſont très-communs, & nous en manquons : le *ſalin*, ou le ſel alkali fixe, extrait des cendres des bois, y eſt abondant & à bas prix ; & nous n'avons que des matières inférieures & fort chères : le bois y eſt pour rien ; & nous l'achetons à un prix exceſſif. N'y a-t-il point là d'exagération ? notre vanité ne chercheroit-elle pas à excuſer notre négligence ? Suppoſé que cela fût auſſi exact qu'il me le paroit peu a-t-on examiné la choſe d'aſſez près, a-t-on fait aſſez de recherches & d'expériences, pour décider que nos verreries ne ſçauroient trouver, dans le royaume, au moins l'équivalent des avantages

des verreries d'Allemagne ? Je me félicite, pour le bien de ma patrie, de pouvoir en douter. Les circonſtances favorables où je me trouve depuis longtemps, m'ont permis d'enviſager la matière ſous un aſſez grand nombre de faces, pour me croire même en état de prouver que la France peut faire ceſſer les importations, fabriquer elle-même du verre auſſi beau & à plus bas prix que celui de l'étranger. Ce ne ſeront point des ſpéculations creuſes, ni des raiſonnemens vagues qui me fourniront les preuves : je ne les tirerai que des expériences ſouvent répétées & dans le très-grand. Si j'avance quelque choſe que je n'aie pas ſoumis à cette pierre de touche, j'aurai ſoin d'en avertir.

DES FOURNEAUX ET DES CREUSETS.

L'INTELLIGENCE du fondeur, l'adreſſe des ouvriers, le choix & la pureté des matières, ſont de foibles reſſources pour le maître de verrerie, s'il n'a un bon fourneau de fuſion, & des creuſets convenables. Quelque peu diſpoſées à la vitrification que ſoient les matières dont il a conſtruit l'un & fabriqué les autres, ſes ouvrages ſeront infectés de *la mes* & de *filandres* : La négligence ou l'impéritie, dans la préparation de ces matières, produira des dégradations ruineuſes, ou des couleurs étrangères dans le verre. Le défaut de proportion dans la forme nuira néceſſairement à la bonté des *affinages*, & augmentera la conſommation du bois ou du charbon. Les fourneaux & les creuſets ſont la partie la plus importante de l'art de la verrerie, &, j'oſe le dire, la moins connue. Je n'ai lu aucun ouvrage où l'on puiſſe trouver des ſecours ſuffiſans ſur la matière à employer, ſur la manière dont on doit la préparer, ni ſur les proportions les plus avantageuſes de la forme des fourneaux & des creuſets.

Dans la plupart des verreries Angloiſes & dans pluſieurs verreries d'Allemagne, on fait les fourneaux d'une pierre *fabuleuſe* dure (1). C'eſt une eſpèce de grais, appellé, dans quelques provinces de France, *mouillaſſe*, & dans d'autres, *pierre à ouvrage*. Les fourneaux faits avec cette matière laiſſent perdre, par les joints, beaucoup de feu, conſument une grande quantité de bois, & ſont de peu de durée. Le maçon le plus habile ne ſçauroit éviter les joints, faire l'intérieur auſſi uni qu'il devroit l'être, ni lui donner la forme la plus convenable, ſans renoncer à la ſolidité. Ces grais chargés, pour le plus grand nombre, d'une baſe ferrugineuſe, ſe vitrifient, ſe fendent ou s'égrainent : à peine ſupportent-ils le travail de trois ou quatre mois.

L'argille eſt la vraie matière des fourneaux & des creuſets. Il y a en un grand nombre d'eſpèces : mais on ne peut employer avec ſureté que celles qui ſont déſignées, dans la minéralogie de *Wallerius*, ſous les noms d'*argille blanche*, d'*argille griſe*, d'*argille réfractaire pâle*, d'*argille réfractaire brune*, d'*argille réfractaire noirâtre*, de *terre à porcelaine*, de *terre à pipes*. Toutes ces eſpèces d'argille, expoſées à un feu violent, blanchiſſent. Je ne puis regarder, avec *Wallerius*, les deux dernières eſpèces comme une marne. Ce ſçavant minéralogiſte me paroît avoir confondu deux terres très-différentes, puiſque l'une ſe durcit au feu, & l'autre s'y change en chaux (2). Un étranger, comme *Wallerius*, peut dire qu'on ne trouve en France qu'une eſpèce d'argille à pyre : mais un François, *Haudiquer de Blancourt*, eſt-il excuſable de ſoutenir que *la terre graſſe de la Bélière près de Forges en Normandie, eſt la ſeule, dans ce royaume, qui ait la propriété de ne ſe pas fondre à un feu de verrerie* (3) ? Dans la même

(1) V. la pag. 43 de la préf. de *Merret*, Art de la verr. in-4°.

(2) V. la lithog. de M. Pott; & le ſecond chap. du prem. vol. de la chym. métall. de M. Geller.

(3) V. pag. 35 du prem. vol. de l'Art de la verr. de Blancourt.

province, on en trouve de pluſieurs eſpèces très-bonnes, de la blanche, de la griſe, de la noirâtre. A Montdeber, non loin de Nantes en Bretagne, il y en a de la blanche ; à Villentrode, en Champagne, de la griſe ; près de Bar-ſur-Aube, de la griſe ; à Epinac, en Bourgonne, de la brune ; à Suzi, dans le Laonnois, de la griſe ; dans le Forêts, de la brune ; à Méréviels, près de Montpellier, de la blanche. L'argille pure eſt aſſurément très-commune en France : Il n'y a point de maître de verrerie qui ne puiſſe s'en procurer à peu de frais. Quelques recherches avec la ſonde, & un peu d'intelligence, ſuffiront pour lui en faire découvrir à ſa portée. Les étrangers, ſur-tout dans certaines parties de l'Allemagne, ont peut-être à nous envier cet avantage.

On ne trouve point d'argille qui ne ſoit mêlée avec quelque corps étranger plus ou moins dangereux. Dans les unes, il y a des petits cailloux ; dans d'autres, des pyrites, des charbons foſſiles & un peu d'acide vitriolique (1) ; dans toutes, du ſable, quelques racines & une terre martiale, dont la préſence eſt ordinairement annoncée par des taches rouges ou jaunes. Les pailles, les brins d'herbe, les parties de bois & les terres communes, doivent être attribuées à la négligence de ceux qui tirent l'argille. Ces matières hétérogènes ſont toujours préjudiciables, quelquefois funeſtes, parce qu'elles laiſſent un vuide lorſqu'elles ont été conſumées ou diſſipées par le feu ; ou parce qu'elles diſpoſent l'argille à la fuſion, telles que la terre ferrugineuſe, les pyrites, l'acide vitriolique, les cailloux & le ſable touchés par le verre ou le ſel alkali fixe. Mais l'ennemi le plus redoutable pour le maître de verrerie, c'eſt la ſubſtance martiale renfermée dans l'argille : elle eſt la principale cauſe de ſa fuſibilité ; dès lors, des *larmes*, des *flandres*, des couleurs groſ-

(1) V. p. 94, tom. 2, urb. hierne, Tentam. chem.

ſières dans le verre, & la courte durée des fourneaux & des creuſets (1).

Il n'y a point de verrerie où l'on ne craigne les mauvais effets de ces corps étrangers. C'eſt dans la vue de les prévenir qu'on épluche l'argille avec la plus grande attention. On la caſſe en petits morceaux, & on en ſépare tout ce qu'on y voit de coloré & d'hétérogène. Mais il eſt aiſé de ſentir que, quelque ſoin qu'on y apporte, l'opération eſt inſuffiſante. La triſte expérience que j'en ai faite aſſez longtemps m'a donné l'idée d'un autre moyen beaucoup plus ſûr & moins coûteux. On caſſe groſſièrement l'argille bien *reſſuiee :* on rejette les morceaux les plus tachés de rouge ou de jaune : on met les autres morceaux dans une grande caiſſe de bois, qui ait au moins dix pouces de profondeur, & on l'en remplit juſqu'aux deux tiers ; enſuite on met dans cette caiſſe de l'eau chaude en hiver, &, ſi l'on veut, de l'eau froide en été, juſqu'à ce que l'argille en ſoit couverte d'environ deux pouces. Il importe de ne pas remuer la terre, ſi l'on deſire d'extraire la ſubſtance martiale. Le lendemain, on la verra ſur l'eau, comme une matière huileuſe rouge ou jaune. On tirera l'eau par un robinet juſqu'à ce qu'elle commence à ſe troubler. Après y en avoir mis de la nouvelle, on tirera le *coulis* par le robinet, & on le verſera à travers un tamis de crin dans d'autres caiſſes moins profondes, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que la bonne argille de la première caiſſe ſoit épuiſée. Lorſque la terre du *coulis* eſt précipitée, on tire l'eau claire, & on deſsèche l'argille, ſoit en l'expoſant à une chaleur modérée ou à un feu violent, ſoit en y mêlant de l'argille ſèche déjà puriſiée, ou du *ciment*, dans les proportions que nous indiquerons plus bas. Cette opération, quelque ſimple qu'elle ſoit, attaque également toutes les matières hétérogènes qu'il peut y

(1) V. la pag. 123 de la lithog. de M. Pott.

avoir dans l'argille : les corps légers reſtent ſur le tamis : les cailloux, les pyrites & le ſable, en grande partie, reſtent dans le fond de la première caiſſe : la ſubſtance martiale, & l'acide vitriolique, s'il y en a, ſont emportés avec l'eau.

COMPOSITION DES TERRES.

Il ne ſuffit pas d'avoir ainſi purifié l'argille pour l'employer avec ſûreté. Elle devient trop compacte, & diminue trop de volume par le deſsèchement. L'eau raréfiée par l'action du feu, ne trouvant pas des pores aſſez grands pour s'échapper, détruiroit la liaiſon des parties, ruineroit les fourneaux & les creuſets. La trop grande retraite leur porteroit un coup preſque auſſi funeſte.

Il eſt néceſſaire de donner à l'argille fraîche un intermède d'une nature & dans une proportion à prévenir l'un & l'autre inconvéniens. Où le trouverons-nous ? La terre calcaire, combinée avec la terre argilleuſe, ſe change en verre à l'action d'un feu violent. Il en eſt à peu près de même de la terre gypſeuſe. Le ſable ne peut ſervir que pour les parties qui ne ſont pas expoſées au contact de la compoſition du verre ; & encore doit-il être très-pur, ni trop gros, ni trop fin. Le verre pilé & le mâche-fer, quoique conſeillés par des ſçavans du premier ordre, ſeroient plus nuiſibles qu'utiles. Nous ne pouvons trouver cet intermède, j'oſe l'aſſurer, que dans l'argille même purifiée & brûlée au point de n'être plus ſuceptible de retraite : l'argille ainſi brûlée s'appelle *ciment*. Les creuſets qui ont déjà ſervi, & l'intérieur des vieux fourneaux, fourniſſent le meilleur.

S'il s'agit d'un nouvel établiſſement, on mettra en galettes, d'un pied en quarré ſur huit ou dix lignes d'épaiſſeur, l'argille purifiée ; &, lorſque ces galettes ſe-

ront sèches, on leur fera subir, pendant sept ou huit jours, un feu violent de reverbère : ensuite on les réduira en poudre avec beaucoup de propreté sous la meule, ou encore mieux sous les pilons d'un boccard.

Les auteurs & les maîtres de verrerie varient beaucoup sur le dégré de finesse qu'il convient de donner au ciment. M. Pott a observé que les creusets, dans la composition desquels on avoit fait entrer du ciment fin, étoient très-sujets aux gersures ; & en conséquence il conseilla de n'employer que du gros ciment, dont on a extrait avec soin le plus fin (1). D'autres, ayant remarqué que le gros ciment étoit la source des trous, des dégradations & des *gravois* dans le verre, n'ont employé que le plus fin. D'autres (& c'est le plus grand nombre), dans la vue d'obvier à ces inconvéniens, se servent d'un ciment mêlé de gros & de fin, d'un ciment simplement passé par un tamis de crin très-clair ; & ils manquent leur double but. On y parviendra surement pour les creusets, si l'on ne fait entrer dans leur composition qu'un ciment moyen, c'est-à-dire, passé d'abord par un tamis de crin, ni trop clair, ni trop serré, & ensuite par un tamis de soie ; ce qui restera sur ce dernier sera la partie de ciment dont on doit se servir.

Chaque partie du fourneau de fusion demande un ciment particulier. Cette observation est de la plus grande importance. L'*embassure*, les parois au-dessous des *ouvreaux*, est la partie la moins délicate. Les *larmes*, les dégradations & les gersures n'y font point de conséquence. Il suffit d'y employer l'argille grossièrement épluchée, & le ciment passé par un tamis de crin très-clair.

La *couronne*, ou tout ce qui est au-dessus de l'embassure, mérite la plus grande attention. Les gersures y sont peu dangereuses ; mais les dégradations y sont funestes ; soit parce que les cavités favorisent les *lar-*

(1) V. ce qu'il dit sur les creusets, dans les mém. de l'Acad. de Berlin.

mes ;

mes ; la matière vitrifiée s'y raſſemble, & de-là ſe précipite dans les creuſets ; ſoit parce que les parties argilleuſes, les grains de ciment qui ſe détachent, tombent dans le verre, y produiſent des *gravois*, des *pierres* non moins funeſtes que les *larmes*. Il eſt très-avantageux de n'employer que du ciment fin, à la *couronne* des fourneaux.

Les dégradations ſont peu nuiſibles aux *ſièges* ou ſupports des creuſets : mais les moindres gerſures en précipitent la ruine ; ſoit parce que la partie qui porte ſur l'âtre eſt toujours dans un bain de verre ; ſoit parce que la compoſition du verre qui coule des creuſets ſur les ſièges pendant les fontes, & le verre pendant le travail, s'inſinuent dans les gerſures, & les aggrandiſſent avec une rapidité difficile à concevoir. Il eſt d'autant plus mal-aiſé d'éviter les gerſures, que les ſièges forment des maſſes très-conſidérables. On ne doit ſe flatter de les prévenir, qu'en rendant la compoſition très-poreuſe, qu'en n'y faiſant entrer que du ciment très-gros, & dont on aura exactement ſéparé le fin.

Perſonne, que je ſçache, n'a encore déterminé convenablement la quantité de ciment qu'on doit mêler avec une quantité déterminée d'argille fraîche. Les doſes que preſcrit M. Pott, dans ſon mémoire déjà cité, ne me paroiſſent applicables qu'aux très-petits creuſets, qui faiſoient l'objet de ſes recherches. Les verreries flottent, à cet égard, dans une incertitude funeſte. Elles n'ont d'autre règle, pour fixer ces proportions, que le coup-d'œil incertain ou la routine aveugle des principaux ouvriers. Rien cependant de plus important. Si l'on épargne le ciment, on s'expoſe aux inconvéniens d'une trop grande retraite & aux gerſures : ſi, au contraire, on le prodigue, on s'expoſe aux inconvéniens qui réſultent du défaut de liaiſon & de ſolidité.

On penſe communément que chaque eſpèce d'ar-

gille pure demande une doſe différente de ciment. Cela ne peut être vrai, qu'à raiſon des matières hétérogènes dont les argilles ſon chargées. Purifiez-les, dépouillez-les ſur-tout du ſablon qui peut y être mêlé, & j'oſe croire que vous trouverez que quatre parties de ciment ſur cinq parties d'argille fraîche, ſont la meilleure proportion qu'on puiſſe employer.

Souhaitez-vous une pierre de touche, un ſigne, auquel vous puiſſiez reconnoître la quantité de ciment que demande chaque eſpèce d'argille pure, ſans être obligé d'en ſéparer le ſablon ? Faites pluſieurs petits gâteaux de quatre pouces en quarré & d'un pouce d'épaiſſeur, où vous aurez fait entrer le ciment à différentes proportions, dont la pâte ne ſera ni trop molle, ni trop ferme, que vous deſſécherez convenablement, & que vous aurez *battues* une fois : Celui de ces gâteaux qui n'aura perdu, dans un feu violent, que la dix-huitième partie de ſon volume, vous indiquera la meilleure compoſition pour les fourneaux & les creuſets.

L'uſage où ſont la plupart des verreries de brûler légèrement l'argille, avant de la mêler avec le ciment, eſt pernicieux : Il en réſulte conſtamment une inégalité de liaiſon ou de ſolidité dans les ouvrages, & la plus grande incertitude ſur les proportions. L'argille peut être plus ou moins brûlée, & toutes ſes parties ne le ſont jamais au même dégré.

Lorſque l'argille fraîche, chargée d'une doſe convenable de ciment, a été ſuffiſamment *marchée, paîtrie*, la plupart des maîtres de verrerie la moulent en briques pour en conſtruire leurs fourneaux. Les uns recuiſſent ces briques, avant de les employer ; les autres les font ſimplement bien ſécher. Ces deux méthodes me paroiſſent également mauvaiſes. Il n'eſt pas poſſible de faire, avec des briques cuites ou ſéches, l'intérieur du fourneau parfaitement uni, ni de lui donner la forme laplus avantageuſe : les inégalités ſont

une ſource abondante de *larmes* & de *gravois*, & rendent la réflection très-irrégulière. A un feu violent & continué, les briques ſe rapetiſſent inégalement; le mortier, qui en faiſoit la liaiſon, coule; le verre en eſt infecté; les joints s'aggrandiſſent; le feu s'échappe par mille endroits; la conſommation du bois ou du charbon de terre eſt immenſe; la qualité du verre moins parfaite, & le fourneau d'une courte durée. Combien de maîtres de verrerie font la triſte expérience des mauvais effets de ces méthodes?

Il y a un moyen, connu dans les *groſſes verreries* de Normandie & dans quelques-unes du Palatinat, pour obvier à tous ces inconvéniens; & il eſt très-aiſé de le mettre en uſage, quoique *de Blancourt* aſſure que c'eſt un ſecret renfermé dans la famille d'un maître maçon.

On moule l'argille préparée & compoſée en quatre eſpèces de thuiles: En thuiles d'un pied en quarré & de deux pouces d'épaiſſeur, pour l'*embaſſure* & pour une partie de la *couronne*: en thuiles de vingt pouces de longueur ſur ſix de largeur & deux d'épaiſſeur, pour les *tonelles*: en thuiles d'un pied de longueur ſur dix pouces de largeur par un bout, & ſept par l'autre, & deux pouces d'épaiſſeur, pour la *couronne*: & en thuiles des *ſièges* de deux pouces d'épaiſſeur & d'une grandeur ſuffiſante, pour que, miſes de *champ*, les ſièges ne ſoient dans le bas qu'à ſix pouces de diſtance l'un de l'autre, & dans le haut à la diſtance des deux cinquièmes de la largeur du fourneau, & n'ayant que vingt à vingt-quatre pouces de hauteur, ſuivant la grandeur du fourneau. Si l'on donne à ces thuiles une moindre épaiſſeur, comme on le fait communément, on multiplie les joints ſans néceſſité: ſi on leur en donne une plus grande, elles s'appliquent imparfaitement l'une ſur l'autre.

Lorſque ces thuiles ſont un peu fermes, on les broſſe légèrement, & on les bat avec une *patelle* de bois. C'eſt

dans cet état qu'on les emploie à la conſtruction du fourneau.

Il importe que le maſſif du fourneau, ou la voûte ouverte entre les ſièges, & où répondent à angles droits quatre galeries ouvertes par l'autre extrémité (ſi l'on veut faire uſage du charbon de terre), ſoit très-ſolide ; que l'âtre ſoit propre à réſiſter à la plus grande violence du feu (le grais dur en fournit d'excellens) ; & que les quatre arches ſoient faites avec la plus grande attention. Voyez la *1ere.* & la *2e. fig.*

Le quarré du fourneau étant tracé & fait en briques blanches ou d'argille de rebut & de ſable, & les arches étant formées en bonnes briques ordinaires, il convient de commencer la conſtruction par les ſièges. On a plus de facilité à appliquer les thuiles l'une contre l'autre à grands coups de *batte*, que lorſque l'*embaſſure* & la *couronne* ſont faites, & on ne court pas le riſque de cauſer des ébranlemens dangereux : tout en eſt plus ſolide. Enſuite on fait une aſſiſe de thuiles d'*embaſſure* : on humecte cette aſſiſe avec un balai fin chargé d'un coulis très-clair, fait avec la compoſition des thuiles. On la recouvre d'une ſeconde qu'on a ſoin de bien battre, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que le fourneau ſoit entièrement monté. On forme les *tonelles*, les *ouveaux*, & les *lunettes*, avec des pièces de bois, qui ont la figure qu'on veut donner à ces ouvertures. Le dehors & le dedans étant *recoupés* & unis, on a ſoin de deſſécher lentement le fourneau, & de le rebattre pluſieurs fois par jour. Si pendant l'*attempage* ou deſſéchement complet du fourneau, il s'y fait des gerſures, ſoit qu'on ait tenu la compoſition des thuiles un peu trop *groſſe*, ſoit qu'on ait pouſſé le feu avec trop de rapidité, ſoit enfin qu'on n'ait pas rempli exactement l'entre-deux des fourneaux & des arches, il ne faut pas s'allarmer ; le remède eſt bien auſſi ſûr que ſimple : On ſupprime avec prudence le feu; lorſque le fourneau eſt aſſez refroidi pour

pouvoir y entrer, on remplit les fentes avec du chanvre bien chargé de *la compoſition* des thuiles ; & l'on paſſe ce chanvre le mieux qu'il eſt poſſible avec une lame de fer, d'un pouce ou environ de largeur, ſur quinze ou dix-huit pouces de longueur : on met par degré le feu au fourneau. Il eſt aiſé de ſentir que, ſuivant cette méthode, il n'y a point, 1°. d'inégalité à craindre, ni de réflection irrégulière ; 2°. qu'on peut donner à l'intérieur du fourneau la figure la plus avantageuſe, ſans nuire à la ſolidité ; 3°. qu'un fourneau ainſi conſtruit, n'ayant point de joints, du moins ſenſibles, ne laiſſe point perdre de feu, & peut durer dix ou douze ans, ſi l'on a ſoin de réparer, lorſqu'il eſt néceſſaire, l'âtre, les ſièges & les ouvreaux, & de lui faire faire pluſieurs excellentes *réveillées*. Ces réparations ne ſouffrent aucune difficulté. La ſeule attention qu'on doive avoir, c'eſt de ne pas laiſſer refroidir trop promptement le fourneau. Il ne manqueroit pas de s'écailler.

Il y a pour le moins autant de façons de conſtruire le fourneau, que l'art de la verrerie a de branches. Dans les verreries à bouteilles, à verre plat *à boudine* & ſans *boudine*, le fourneau a ſix arches, une à chaque coin, & une ſur chaque *glaie* : dans la plupart de celles où l'on fait des gobelets, des verres à boire, des caraffes, du cryſtal, &c., il n'y a qu'une arche au-deſſus du fourneau : dans d'autres, & particulièrement dans celles à verre plat façon de Bohême, il y en a quatre, une à chaque coin du fourneau. On n'a rien de déterminé ſur la forme ni ſur la capacité des arches, ſur la place, la forme & le diamètre de l'ouverture par laquelle elles reçoivent le feu du fourneau. Nous ne ſommes pas plus avancés ſur la figure de l'intérieur du fourneau. Le cordeau ſeul du maître maçon, ou du fondeur, règle ce qu'il n'appartient qu'à la plus profonde pyrothecnie de fixer. Chacun a ſes meſures. Les uns préfèrent la figure

ronde & la voûte à plein ceintre, & placent dans leur fourneau trois, cinq, ſept ou huit & juſqu'à neuf creuſets : d'autres veulent que leur fourneau ſoit quarré, juſqu'à la hauteur du milieu des *ouvreaux*, & que la *couronne*, ou la voûte, ſoit plus ou moins ſurbaiſſée : il y en a qui font une eſpèce de pyramide quadrangulaire tronquée : j'en connois qui, dans la vue d'éviter les *larmes*, ſurbaiſſent extrémement la voûte du côté des *tonelles*, & le moins qu'il eſt poſſible du côté des *mornues*, des *ouvreaux*. Preſque tous ſont obligés de détruire une partie du fourneau, pour y mettre les creuſets ; & de le reconſtruire, lorſque les creuſets ſont placés. Tous ces fourneaux chauffent foiblement & conſument une très-grande quantité de matière combuſtible. Il ſeroit de beaucoup trop long, & peut-être très-peu utile à l'art de la verrerie, de relever les défauts particuliers à chaque eſpèce.

Il eſt auſſi difficile qu'important de trouver un fourneau commode pour toutes les opérations de l'art de la verrerie, lequel ayant ſix ou dix *ouvreaux*, quatre *lunettes*, deux *tonelles*, produiſe le plus grand feu poſſible, avec le moins de matière combuſtible. C'eſt à l'Académie à juger ſi j'ai approché de la ſolution de ce problème. Je puis aſſurer avec confiance, que le fourneau dont je donne le plan & la coupe, *fig.* 1re., 2de. & 3e., affine mieux & plus promptement le verre, avec un tiers moins de bois, que ceux qui étoient les moins imparfaits. Depuis cinq juſqu'à huit pieds, ce ſont les dimenſions les plus avantageuſes. Au-deſſus & au-deſſous, le verre s'affine moins bien, & proportionnément il faut plus de matière combuſtible. Six ouvriers peuvent travailler en même temps à ce fourneau, & recuire très-bien leurs ouvrages dans les arches, au moyen de pots de terre ou de tole, garnis de terre, d'un pied de diamètre, deux de profondeur, & fermés par un bout, à la manière de la Bohème. Si l'on veut

ſouffler des lanternes à la façon d'Angleterre, ou des verres plats à vître, &c., il convient de diminuer, des deux tiers en dedans du fourneau, l'épaiſſeur des *ouvreaux*. Ceux qui deſirent faire leur *fritte* avec le feu du fourneau de fuſion, peuvent le faire très-commodément. Ils n'ont qu'à pratiquer une arche ſous chacune de celles à recuire, & la *lunette* ſera à la hauteur des *ſièges*.

On pourroit y couler les grands *platéaux* pour les miroirs, en faiſant quatre *ouvreaux* de dix-neuf pouces de hauteur ſur dix-ſept de largeur, un à chaque bout des deux *ſièges*.

DES CREUSETS.

Il y a deux façons de faire des creuſets, ſçavoir à *la main*, & dans des *formes*. Celle-ci eſt conſacrée aux petits creuſets, celle-là aux grands. Je puis aſſurer, d'après une aſſez longue expérience, qu'il eſt aiſé de faire dans des formes les plus grands creuſets, & avec avantage. 1°. Il faut un temps aſſez long pour former un bon potier à la main : à peine eſt-il néceſſaire de guider deux fois un manouvrier pour lui faire faire un bon creuſet dans des formes. 2°. Il eſt très-rare qu'un creuſet, fait à la main, ſoit monté droit : il l'eſt toujours dans des formes. 3°. On ne peut *rebattre* que foiblement un creuſet fait à la main : on *rebat* tant qu'on veut ceux qui ſont faits dans des formes. 4°. Les plus habiles potiers à la main ne font, par ſemaine, que quatre creuſets d'environ trente pouces chacun : un ouvrier en fait aiſément trois par jour dans des formes.

Il n'y a point de forme qu'on n'ait donnée aux creuſets. On en voit de quarrés, de triangulaires, à pluſieurs pans, d'auſſi grands dans le bas que dans le haut, de *ventreux*, ou dont le diamètre du milieu eſt plus grand

que l'inférieur & le supérieur, & de plus ou moins évasés. Les trois premières espèces souffrant des dilatations inégales, à cause de leur épaisseur inégale, périssent promptement par les angles; & ils sont aussi peu propres à la *dépuration* du verre, que les deux espèces suivantes. Le verre se fond & s'affine d'autant mieux & d'autant plus promptement, toutes choses égales d'ailleurs, qu'il offre plus de surface au feu réfléchi. D'après ce principe très-vrai, il me semble que les creusets devroient être des cônes renversés. Mais, ne portant que sur un point, ils n'auroient pas assez de solidité, & on perdroit trop sur la quantité de matière. Il y a un juste milieu à prendre : c'est de donner au diamètre inférieur un septième de moins qu'au diamètre supérieur. Cet évasement, loin de nuire à la solidité, y contribue; il est très-propre à la dépuration du verre, & laisse aux creusets une capacité proportionnée à la capacité du fourneau, ou ne lui donne à faire ni trop ni trop peu.

Les meilleurs creusets sont ceux qui sont faits avec l'argille pure, préparée & composée comme il a été dit ci-dessus. Ils doivent être traités avec la plus grande propreté; d'une épaisseur moyenne, d'un pouce & demi dans la *fleiche*, & de deux pouces dans le *jable* & le *cul*; montés droit, d'une égale épaisseur dans toutes les parties de la *fleiche*; d'une forme convenable; *rebattus* avec soin, desséchés très-lentement, & recuits à un feu violent & longtemps continué.

DES MATIERES A CONVERTIR EN VERRE.

Des quatre espèces de terre ou pierres, *calcaire*, *gypseuse*, *argilleuse*, & du genre des cailloux, que nous connoissons, il n'y en a aucune de vitrifiable par elle-même au feu le plus violent. Les expériences de M. Pott

Pott ne nous permettent pas d'en douter (1). Chacune demande, pour être changée en verre, une addition des autres, ou de baſes métalliques, ou de ſels alkalis fixes. Il n'y en a point qui forme, avec une doſe déterminée des dernières, un verre auſſi clair, auſſi tranſparent, que celle du genre des cailloux. C'eſt auſſi la combinaiſon la plus connue dans les verreries, & la ſeule peut-être qu'on croie néceſſaire de connoître.

L'eſpèce de terre ou de pierre connue ſous le nom de cryſtal, de quartz, de cailloux, de ſable, de grais, &c. fait la principale baſe du verre. Ces pierres, excepté le cryſtal & le quartz, ſont très-communes en France. On trouve de très-beaux cailloux blancs & demi tranſparens ſur les bords de la mer, dans pluſieurs rivières, &c. Les cailloux noirs, bruns, blanchâtres, opaques & groſſiers, ne ſont aſſurément pas rares, & il ſuffit de les faire rougir & de les éteindre dans l'eau, pour les rendre parfaitement blancs. Nous avons un très-grand nombre de mines de beau ſable, & ce qui eſt peut-être plus précieux, du grais en abondance. Il y a très-peu de verreries qui employent ce dernier dans la compoſition du verre (2). *Merret* aſſure même qu'*il ne peut ſervir à cet uſage*, ſans doute par la crainte qu'il n'en coûtât trop pour l'écraſer ; mais on n'a qu'à le faire rougir dans les arches pendant les fontes, l'éteindre dans l'eau & le battre légèrement. L'opération ne ſera aſſurément pas couteuſe, à moins que ce ne fût une eſpèce de grais auſſi dur que rare. Le verre fait avec le grais à paver, ou autre de couleur blanchâtre ou jaunâtre, n'eſt point différent en dureté, quoique *Wallerius* l'aſſure (3), de celui qu'on a fait avec le ſable.

Le ſable le plus coloré & le plus argilleux eſt le meilleur pour le verre à bouteilles, parce qu'il de-

(1) V. le chap. IV. de ſon examen chymique des pierres.
(2) V. les notes ſur le 1er. liv. de Neri.
(3) V. la p. 141 du 1er. vol. de la miner.

mande peu de ſel alkali fixe, & qu'il ſoit un verre très-ſolide. Il ſuffit d'employer du ſable blanc ou du grais pour le verre vert, & même pour le verre blanc. Les veines rouges ou jaunes, qu'on y voit, diſparoiſſent ordinairement au feu. Mais, ſi l'on n'a pas de beaux cailloux, des pierres à fuſil, comment purifier le ſable blanc ou le grais au point d'en faire le cryſtal le plus beau & le plus fin ? ſouvent les calcinations & les extinctions répétées ſont inſuffiſantes. La baſe martiale dont ils ſont rarement exempts, & qui toujours colore plus ou moins le verre, leur réſiſte. Le célèbre *Sthal* (1) conſeille de les laver avec ſoin dans une eau de rivière chargée d'un peu d'eau forte ; mais ce moyen ne ſeroit-il pas coûteux, & peut-on ſe flatter qu'il rempliroit le but propoſé, à moins que le ſable & le grais n'euſſent été réduits en pouſſière très-fine ? L'eau régale & la proſerpine de Glauber (le beurre d'antimoine), par le ſecours de laquelle on opéreroit ſûrement l'extraction deſirée, ſont trop difficiles à préparer, & trop chères pour qu'un maître de verrerie doive ſe déterminer à les employer. Je vais indiquer un moyen auſſi efficace, beaucoup plus ſimple & moins diſpendieux. On n'a qu'à mêler, par la diſſolution, pour cent livres peſant de ſable ou de grais écraſé, quatre livres de ſel de verre, mettre ce mêlange dans un vieux creuſet, ou dans tous à la fin d'un fourneau, & lui faire ſubir, pendant ſept ou huit heures, le feu de verrerie le plus violent : le ſel de verre diſparoîtra, diſſipera juſqu'au plus léger atôme de matière colorante, & le ſable reſtera blanc comme la neige, très-pur, propre à faire le plus beau cryſtal, & même à imiter les pierres précieuſes. Pluſieurs auteurs ont avancé, qu'il y avoit des eſpèces de ſable & de caillou plus diſpoſées à la fuſion que d'autres. Cela n'eſt vrai qu'à raiſon des matières

(1) *Sthal.* fundam. chym. pact. 2 ſect. III. cap. III. *de modo conficiendi varias gemmas artif.*

hétérogènes (la ſubſtance martiale ſur-tout) dont elles ſont chargées. C'eſt une erreur de croire avec *Merret*, que le *cryſtal exige un ſable tendre*, & *le verre commun un ſable dur* (1).

La ſeconde matière principale qui entre dans la compoſition du verre, ce ſont les fondans, les ſels alkalis fixes, minéral & artificiel, ou un mélange de ſels alkalis fixes & de leur partie *cendreuſe*, d'une terre *alkaline*, de *nature ſaline* (2). Il n'y a peut-être point de partie dans l'art de la verrerie, ſur laquelle les auteurs & les maîtres de verrerie ſoient moins d'accord. Chacun a ſon fondant favori (3). *Agricola* dit que, de ſon temps, on donnoit *la préférence au nitre*. *Merret* aſſure que *le temps & l'expérience ont fait abandonner l'uſage du nitre*, comme *ſel trop tendre & trop foible qui ſe réſout en ſel alkali* (ſel de verre), *& que la roquette, ou poudre de Syrie, a obtenu le premier rang* (4). *Kunckel* & *Henckel* aſſurent, d'après *Merret*, *que le verre fait avec la ſoude n'eſt pas eſtimé ; qu'il craſſe très-facilement en ſe réfroidiſſant ; qu'il conſerve toujours une couleur bleuâtre ; qu'en un mot, la ſoude, quand même on y mêleroit de la magnéſie, ne produit point un beau verre ;* & on voit aſſez que ces auteurs penchent en faveur de la *potaſſe*. Le premier dit même, que le cryſtal qu'il en a fait, *eſt ſupérieur à ceux que Néri avoit faits avec tant de peine*, & où il avoit fait entrer le ſel alkali fixe de la ſoude, de la roquette, le borax, le ſel alkali du tartre, le nitre (5), &c. M. *Gellert* penſe *que la ſoude eſt plus propre que tout autre ſel tiré des cendres, à faire du beau verre durable ; que celui qui eſt fait avec de la potaſſe eſt plus ſujet à être attaqué par les acides que les autres, & même qu'il ſe*

(1) V. la p. 17 de l'Art de la Verr. trad. franc. in-4°.
(2) V. les p. 175 de la lithog. & 94 de la cont. de M. Pott.
(3) V. lib. 12 *de re metall.*
(4) V. p. 29 de l'Art de la Verr. trad. in-4°.
(5) V. les p. 11, 103 & 561 de l'ouvrage ci-deſſus.

décompoſé à l'air (1). Dans les verreries actuelles d'Allemagne, on ne ſçait employer que la *potaſſe*. Dans celles d'Italie, & dans celles de France, on ne connoit preſque que l'uſage de la ſoude & du ſalpêtre. Auquel de ces fondans rejettés par les uns, adoptés par les autre, devons-nous donner la préférence ? A celui qui ſera le plus à notre portée, que nous pourrons nous procurer à moins de frais. Je puis aſſurer, d'après des expériences très-variées & très-ſouvent répétées, que tous ſont également bons, pourvu que la préparation en ſoit convenable, les proportions de la compoſition juſtes, & la fuſion & dépuration ſuffiſantes.

Les fondans peuvent ſe trouver en France, pour le moins en auſſi grande abondance, que dans les pays étrangers. Quelque haſardée que paroiſſe cette aſſertion, elle n'en eſt pas moins bien fondée. Nous pouvons faire annuellement une quantité très-conſidérable de *potaſſe* rouge & blanche (2). Il y a pluſieurs pro-

(1) V. les p. 25 & 26 de la trad. franc. du 1er. vol. de ſon excellente chym. métall.

(2) La potaſſe rouge, eſt le ſel alkali fixe extrait par lixivation & évaporation des cendres de tous les végétaux ; excepté la plûpart des plantes maritimes. La potaſſe blanche n'eſt autre choſe que la rouge calcinée à un feu de Réverbère.

Il ſe fait une grande quantité de potaſſe en Alſace, en Loraine, & dans les Ardaines. Dans les chefs-lieux, il y a ordinairement quelqu'un qui l'achette livre à livre des payſans & des Bucherons. La cupidité a introduit un grand nombre de fraudes dans cette branche de commerce. Il eſt important de faire connoître les principales. Une des plus dangereuſes pour les verreries enfin, eſt de mêler du ſel marin avec le ſel alkali fixe, ou de vendre pour potaſſe le ſel extrait des cendres faites ſous les chaudières, des ſalines de ſources. Il y a trois moyens également ſûrs pour découvrir cette fraude. Cette potaſſe fond aiſément au feu de calcination ; ne prend qu'une couleur bleue très-pâle, & ne fait du verre qu'à proportion du ſel alkali fixe, dont elle eſt chargée. J'en ai reçu où il y avoit plus de moitié de ſel marin tiré, je penſe, de la ſaline de Dieuze. Cet objet me paroit mériter l'attention du miniſtère. En corrigeant cet abus, il rendroit un ſervice important à l'art. On s'eſt apperçu que les cendres vieilles fourniſſoient une plus grande quantité de ſel, que les nouvelles. En conſéquence, on les laiſſe longtemps expoſées au grand air, ou on les garde dans des endroits où l'air extérieur a un libre accès. Ces cendres donnent plus de ſel, par la raiſon, qu'une partie ſouvent conſidérable du ſel alkali fixe ſe con-

vinces où il ſe perd immenſément de petit bois, ne fuſſent que les *régalis*, & où les coupeurs de bois négligent les cendres qu'ils font pendant l'exploitation d'une vente. La *fougère* eſt très-commune dans le royaume : les cendres de cette plante, coupée vers la fin de juillet, & brûlée comme on brûle la ſoude, donnent environ un neuvième de ſel alkali fixe. On ne fait aucun cas du marc des raiſins : ſes cendres bien faites produiſent au moins autant que celles de la *fougère*. Des cendres de ce qui reſte dans l'alembic des diſtillateurs d'eau de vie de marc, m'ont donné juſqu'à un cinquième de très-beau ſel alkali fixe : il eſtrare que ces diſtillateurs ne mêlent au marc, de la lie liquide. Pour peu qu'on connoiſſe notre produit en vin, on concevra que nous pourrions tirer annuellement du marc pluſieurs millions peſant de très-bonne *potaſſe*. Il eſt ſurprenant qu'on ait négligé juſqu'aujourd'hui un objet auſſi utile que facile à ſaiſir. Les cendres des côtes de tabac nous offrent une nouvelle reſſource. Elles produiſent, lorſqu'elles ſont faites avec ſoin, plus du tiers de leur poids de ſel alkali fixe. Il eſt certain que nous pouvons nous procurer très-aiſément, & ſans le ſecours de l'étranger, la potaſſe que nos verreries, nos blancheries & nos ſavonneries de ſavon noir ſont dans le cas de conſommer. Cette branche d'induſtrie mérite ſans doute d'être encouragée. Les maîtres de verreries ſont les premiers intéreſſés à l'animer, & cela leur eſt facile : ils n'ont qu'à exciter à des eſſais les payſans, à leur donner la certitude de la vente, & à les diriger. Nous leur en fournirons ci-après les moyens.

vertit en tartre vitriolé, ſel funeſte aux verreries, lorſqu'il ſe trouve en grande proportion dans la potaſſe.

Les uns mêlent de la ſuie dans la potaſſe rouge, ce qui donne au verre une couleur jaune très-opiniâtre. D'autres (& c'eſt le plus grand nombre), ne laiſſent point clarifier leur leſſive. Il en réſulte, que la potaſſe eſt plus foible & très-difficile à purifier par la calcination, du principe colorant groſſier, ſur-tout lorſque la leſſive eſt faite, en tout ou en partie, avec les cendres de bois de ſapin.

Sans parler des cendres de l'*algue marine*, connue ſous les noms de *varec* & de *goëmon*, très-communes ſur nos côtes, nous avons encore une reſſource bien plus précieuſe ; c'eſt *la ſoude*. On en fait en Provence & en Languedoc, qui, ſimplement frittée avec le ſable, eſt propre à faire de bon verre. Les eſſais qu'on a faits en Poitou, donnent les meilleures eſpérances. Un grand nombre de bonnes eſpèces de kali, particulièrement le *kali majus cochleato ſemine*, croiſſent naturellement ſur les côtes de Provence, du Languedoc & du Rouſſillon (1). J'ai de très-bonnes raiſons de croire, qu'on pourroit y cultiver avec ſuccès le *kali de Sicile*, & les plus eſtimés d'Eſpagne, *le kali à feuille capillaire velue*, *le kali à feuille de geneſte*, & *le kali à feuille de tamariſque*. Il eſt plus que probable, que, par une culture & par une incinération convenables de ces plantes, nous nous procurerions très-abondamment, & dans des terres incapables de produire autre choſe d'utile, des ſoudes équivalentes aux meilleures d'Eſpagne. Celles qu'on fait du côté de Narbonne, & dans les iſles, appellées les *Saintes*, uniquement avec *le kali majus cochleato ſemine*, ne leur cédent pas de beaucoup en qualité. Elles rendent autant de ſel alkali fixe, environ moitié de leur poids, & il n'y a d'autre différence, qu'une très-petite quantité de plus de ſel marin & de ſel admirable de Glauber. La ſoude ou *ſalicor*, qu'on fait à *Pérols*, Ville-neuve près de Montpellier, eſt de beaucoup inférieure à celle des *iſles les Saintes*. Elle ne donne guère plus du tiers de ſel alkali fixe, & chargé d'une plus grande quantité de ſels neutres, par la raiſon, ſans doute, qu'on brûle avec le *kali majus cochleato ſemine*, le *kali majus geniculatum*, l'*abſynthe* & le *fénouil* maritimes, & bien d'autres plantes maritimes. Ne cultivât-on, dans nos provinces méridionales, que

(1) V. la p. 536 de l'hiſt. des plantes de l'Europe.

le *kali majus cochleato ſemine* ; la cendre donnât-elle moins de ſel alkali fixe, nous pourrions rendre nos ſoudes équivalentes aux meilleures d'Alicante, même ſupérieures. Le moyen eſt ſimple. Nous n'aurions qu'à arroſer les cendres du *kali majus cochleato ſemine*, encore rouges dans la foſſe, avec une forte leſſive des mêmes cendres.

Quoique les états du Languedoc, toujours attentifs au bien de la province, ayent déterminé d'encourager la culture des ſoudes ; quoique cette culture & le moyen d'amélioration que je viens de propoſer ſoient auſſi aiſés que lucratifs, peut-être aurons-nous long-temps à attendre des ſoudes d'une meilleure qualité. Il ſeroit très-avantageux de pouvoir, en attendant, ſubſtituer nos ſoudes, telles qu'elles ſont, aux ſoudes étrangères : une ſeule opération nous mettra en état de le faire. Il ne s'agit que d'en extraire le ſel alkali fixe, & d'employer ce ſel au lieu de la ſoude en nature. Ce ſel, ſuivant le dégré de purification qu'il a reçu, eſt propre (je puis l'aſſurer avec confiance) à faire depuis le verre commun blanc, juſqu'au plus beau cryſtal. La partie terreuſe de toutes les ſoudes, comme des cendres de tous les végétaux, eſt exactement de la même nature *alkaline* ; la matière colorante qui s'y trouve mêlée eſt préciſément la même dans toutes, *le phlogiſtique*. Le ſel alkali fixe, extrait des cendres de tous les végétaux, ſans en excepter aucun, eſt le même relativement à la verrerie, ou il eſt également propre à faire du verre d'une bonne & belle qualité. Il eſt facile de s'aſſurer de la vérité de ces trois propoſitions : elles me paroiſſent inconteſtables. D'où provient donc la différence qu'il y a entre nos ſoudes & celles d'Alicante ? Ce ne peut être que, ou de ce que leur partie terreuſe eſt en plus grande quantité, ou de ce que leur ſel alkali fixe eſt chargé d'une plus grande quantité de ſels neutres : or, il n'y

a pas un douzième de ces ſels neutres dans le ſel des plus mauvaiſes ſoudes du Languedoc. On en trouve autant dans la plupart des potaſſes. Cette quantité, lorſque la compoſition eſt bien faite, ne nuit aſſurément point à la qualité du verre. Il eſt poſſible d'en faire du très-bon & du très-beau avec le ſel alkali fixe du *varec*, qui eſt chargé de plus de la moitié de ſon poids, de ſel marin & de ſel admirable de Glauber. C'eſt donc uniquement dans la plus grande proportion de terre, qu'il faut chercher la cauſe de la différence eſſentielle de nos ſoudes à celle d'Alicante. La compoſition de parties égales de beau ſable, & des meilleures ſoudes d'Eſpagne, où le ſel alkali fixe eſt à peu près en même quantité que la terre, ſe *fritte* bien, blanchit facilement à un feu de réverbère, ſe fond ſans peine, & produit un verre paſſablement tranſparent. Parties égales de beau ſable & des ſoudes ordinaires du Languedoc, ſe *frittent* très-mal, reſtent toujours d'un jaune brun, ne peuvent fondre au feu le plus violent, &, ſi l'on diminue la doſe du ſable, elle font un verre peu tranſparent, & d'une couleur vert-jaune très-déſagréable. La magnéſie ne ſert, dans ce cas, qu'à rendre le verre moins tranſparent, & la couleur plus inſupportable.

D'où vient que les dernières donnent un produit ſi différent des premières? Ce ne peut être certainement que parce qu'elles ont environ deux parties de terre contre une de ſel alkali fixe. Dans l'emploi du ſel alkali fixe, dégagé de la terre, des cendres, les différences diſparoiſſent, toutes les difficultés ſont levées.

Mais, comment extraire le ſel des ſoudes, diront peut-être quelques maitres de verreries, ſans augmenter nos dépenſes? Cela ſeroit difficile, ſi je leur propoſois la méthode de *Néri*, même celle de *Kunckel* (1).

(1) V. les p. 2, 11, & 307 de l'art de la verr. trad. franç. in-4°.

Je

Je vais leur en communiquer une beaucoup plus ſimple, & moins diſpendieuſe (Voyez la *4e. fig.*). On met la ſoude pulvériſée, une partie ſur huit parties d'eau, dans la chaudière B 1, aux trois quarts pleine d'eau. L'eau eſt aſſez chaude pour diſſoudre le ſel avec facilité, & s'en charger : mais ne pouvant bouillir, elle ne ſçauroit empêcher une prompte précipitation de la terre. Lorſqu'elle eſt bien clarifiée, on la fait couler, par un robinet, dans la chaudière du milieu B 2, ſous laquelle eſt le grand feu, & de-là, pour ne pas rallentir l'évaporation par un trop grand épaiſſiſſement de la leſſive, dans la troiſième chaudière, où le ſel ſe précipite à une douce chaleur, & d'où on le prend avec une eſpèce d'écumoire de fer, pour le mettre à égoûter dans un canal de tole incliné ſur la même chaudière. Les deux murs de ſéparation des fourneaux ne doivent avoir que huit pouces d'épaiſſeur, & chacun deux trous de deux pouces en quarré ſur la longueur. On ne fait le feu que dans le fourneau du milieu : les deux autres ne ſont chauffés que par la chaleur qu'il leur communique, & par les braiſes qu'il fournit. On porte la terre de la ſoude dans les caſes F, F : on l'arroſe pluſieurs fois avec de l'eau, afin d'extraire tout le ſel alkali fixe qui pourroit y être reſté, & on fait rentrer l'eau des petits baſſins dans la chaudière B 1. L'extraction du ſel ne coûtera pas trois deniers par livre. Quatre hommes, avec l'équivalent d'une corde de charbonete, peuvent en extraire mille livres dans vingt-quatre heures.

Il n'y a rien de plus expéditif, pour pulvériſer la ſoude, qu'un *boccard*, ſoit à eau, ſoit à vent. Cette machine eſt trop connue, pour ne pas me croire diſpenſé d'en faire la deſcription (1).

Le cryſtal eſt d'autant plus beau, que le ſel alkali

(1) Les ſoudes ordinaires du Languedoc ſe vendent cette année de cinquante ſols à trois livres le cent peſant.

fixe a été mieux purifié. Mais en quoi doit consister cette purification ? Suivant les auteurs de l'art de la verrerie, & un grand nombre de chymistes, elle consiste à dissoudre & à dessécher plusieurs fois, par l'évaporation, le sel alkali fixe. Il y en a qui prescrivent de le dissoudre, de filtrer la dissolution, & d'en faire l'évaporation jusqu'à cinq fois (1). Cette méthode est ennuyeuse, très-dispendieuse, & insuffisante. Elle est coûteuse, non seulement par le temps, les instrumens, & le bois qu'elle exige ; mais principalement par la déperdition du sel alkali fixe qu'elle occasionne : il n'en reste pas les deux tiers, & encore sont-ils chargés d'une plus grande quantité de sels neutres. Une seule dissolution suffit pour séparer assez parfaitement la partie saline de la partie terreuse. La terre qu'on obtient dans les différentes dissolutions, est moins la preuve de l'insuffisance de la première dissolution, que de la décomposition du sel alkali fixe. Quand même le sel alkali fixe retiendroit une petite quantité de la partie terreuse, cela n'est d'aucune conséquence, comme nous le verrons plus bas.

Il importe d'extirper radicalement le principe colorant grossier, la matière grasse ; & les dissolutions, filtrations & évaporation répétées, ne sçauroient le faire. On y réussit infiniment mieux, en moins de temps & sans perte, par la calcination, en exposant toutes les parties du sel alkali fixe à une flamme vive & claire, jusqu'à ce qu'il ait, étant refroidi, une couleur bleuâtre. Le fourneau à calciner le sel alkali fixe, dont *Kunckel* a donné le plan dans ses remarques sur les notes de *Merret*, peut être employé (2) ; mais il est très-difficile, pour ne pas dire impossible, d'éviter que les cendres & charbons du bois, ne se mêlent, par le *tisar*, avec le sel alkali fixe, & qu'il ne s'en perde une cer-

(1) V. la p. 101 de l'art de la verr. trad. franç. in-4°.
(2) V. *Id.* p. 319.

taine quantité. Celui dont je joins ici le plan (*fig.* 5..) n'a point cet inconvénient ; & je puis aſſurer qu'il produit le même effet avec moitié moins de bois. Une fois échauffé, on pourra y calciner, par vingt-quatre heures, environ cinq milliers de ſel alkali fixe ; quatre ou cinq cent livres dans deux heures, avec une corde de charbonette, ou des fagots. La ſeule attention qu'on doive avoir au commencement de la calcination, c'eſt de bien remuer le ſel avec un *rable* de fer, pour prévenir la fuſion aqueuſe, qui retarderoit l'opération. Le ſel alkali fixe de la ſoude a un avantage ſur la potaſſe ; il attire avec moins de rapidité, l'humidité de l'air : les maîtres de verrerie peuvent le conſerver longtemps dans des vaiſſeaux de bois propres, ſans craindre aucune altération, & ſans être dans la néceſſité de le calciner de nouveau ; pour que la potaſſe ſe conſerve ſèche dans des vaiſſeaux, il ſeroit indiſpenſable de les goudronner en dehors.

Peu de perſonnes ſoupçonnent qu'il ſoit néceſſaire d'ajouter au ſable & au ſel alkali fixe, une terre alkaline, pour avoir du bon & beau verre. C'eſt elle cependant qui procure le parfait mélange, donne du *corps* au verre, le rend ſolide, & en facilite la dépuration. Le ſable & le ſel alkali fixe, à moins qu'on ne mette trop de ce dernier, donnent dans la fonte une compoſition trop pâteuſe, pour que les matières puiſſent ſe mêler intimément, & que le ſel de verre puiſſe ſe diſſiper & emporter avec lui le principe colorant groſſier. Une des meilleures terres alkalines qu'on puiſſe employer, eſt la chaux éteinte à l'eau & bien blanche. Au rapport de *Kunckel*, la craie eſt depuis longtemps en uſage dans les verreries de l'Allemagne (1). La chaux produit dans le verre le même effet que la terre alkaline des cendres des végétaux, qu'on a rendu parfaitement

(1) V. la p. 101. de l'art de la verr. trad. franç. in-4°.

blanche. L'une & l'autre donnent au verre plus de fluidité dans la fusion, plus de solidité & la couleur jaune, si elles sont en grande quantité. La chaux & la terre des végétaux portent, dans le verre, d'autant moins de couleur, qu'elles ont été calcinées plus longtemps à une flamme bien claire.

Je ne connois point d'auteur qui ait parlé du *grosil* ou *cassons*; & les maîtres de verrerie les ont condamnés à n'entrer que dans la composition du verre commun. Les pièces cassées du plus beau cristal, ou du verre blanc cristallin, ne servent qu'à la composition de la *pivette*, ou du verre blanc commun. Ce préjugé est très-nuisible à l'art de la verrerie : il augmente nécessairement d'un quart le prix du cristal, & du verre blanc cristallin. Les *cassons*, loin d'altérer les compositions de la même espèce, les bonifient, en facilitent la dépuration, & rendent le cristal, ou le verre cristallin qui en résulte, plus net, plus solide & plus brillant. Il est surprenant qu'on n'ait pas plutôt entrevu cette vérité : elle me paroit une suite nécessaire du principe assez généralement reçu, que le cristal est d'autant meilleur & d'autant plus beau, qu'il a éprouvé plus longtemps l'action du feu, ou qu'il a été un plus grand nombre de fois éteint dans l'eau. Les seules attentions que demande l'emploi du *casson*, sont 1°. de les purger de toute matière hétérogène, *mors de canne*, terre, larmes, pierres, &c. : 2°. de l'écraser bien menu : 3°. que les *cassons* soient le produit d'une composition de la même nature que celle où on les fait entrer : 4°. qu'ils ne fassent jamais plus du tiers de la composition : 5°. de les mêler exactement avec les autres matières.

Dans les compositions des trois premières matières ci-dessus, la couleur bleue, que donne constamment le sel alkali fixe, se marie avec la couleur jaune que donne la chaux ou la terre alkaline des végétaux, & il en résulte un verd plus ou moins foncé, à raison de

la proportion des matières, & du dégré de ténuité du principe colorant. On eſt aſſez généralement perſuadé que la *manganèſe* purifie le verre, en eſt le *ſavon*, & anéantit la couleur verte ; mais je doute que ce ſoit d'après un examen bien réfléchi. La couleur verte reparoît auſſitôt que la couleur rouge de la *manganèſe* a été diſſipée, & je n'ai jamais vu que le verre eût rien gagné. Il me paroîtroit plus naturel de penſer que la combinaiſon des trois couleurs ſimples, bleue, rouge & jaune, produit le blanc dans le verre. Si la chaux domine, ou que les matières de la compoſition n'aient pas été bien purifiées, le verre eſt jaune ou verd-jaune : ſi les matières ont été purifiées avec ſoin, & ſi le ſel alkali fixe domine par rapport à la chaux, le verre ſera bleu. Il en eſt de même de la *manganèſe* : la plus foible nuance de ſon rouge, toutes choſes égales d'ailleurs, donne au verre la blancheur la plus agréable. Je me ſuis aſſuré, par des expériences répétées, que l'extinction tant vantée de la *manganèſe* dans le vinaigre, n'ajoute rien à ſa bonté (1). *La manganèſe ſolide* de Piémont eſt la meilleure qu'on connoiſſe. Si *Céſalpin*, *Henckel*, *Linnæus* & *Wallérius*, &c., avoient eu occaſion de l'examiner convenablement, ils n'auroient pas mis ce minéral au nombre des mines de fer (2). On trouve, dans les *Miſcellanea Berolinenſia* 1740, un excellent mémoire de M. Pott ſur cette matière.

Les matières qu'on ajoute ordinairement, dans les compoſitions, à celles dont nous venons de parler, n'y ſont d'aucune néceſſité. Il n'y a que le beau *ſaffre* qui ſoit utile pour prévenir la couleur jaune dans le verre, où on auroit fait entrer des matières mal purifiées, ou une trop grande quantité de chaux.

Il n'y a rien de moins uniforme, dans les auteurs

(1) V. la p. 53 de l'art de la verr. trad. franç. in-4°.

(2) V. la p. 48 du prem. vol. de la minér. de *Wallérius*.

& dans les verreries, que la compoſition du verre (1). Chaque maître fondeur a ſes doſes & ſa *recette*. Dans les verreries de *Bayel* en Champagne & du *Novion* en *Thiérache*, on met parties égales de ſable & de *potaſſe*; dans celles de *l'Etembac*, dans les *Voſges*, parties égales de ſable, de chaux & de *potaſſe*. D'où peut venir une ſi grande différence ? Vraiſemblablement de ce que M. *Drulanvaux*, auquel nous devons en France l'établiſſement des verres blancs façon de Bohême, a un fourneau de fuſion qui chauffe aſſez bien, & que M. ** & les *** en ont qui chauffent très-foiblement. N'ayant rien de déterminé ſur la conſtruction & ſur la forme des fourneaux, ſur la nature & la préparation des matières, ſur la vraie dépuration du verre, il étoit impoſſible d'avoir quelque choſe de fixe & de ſatisfaiſant ſur les proportions de la compoſition. L'expérience même ne ſervoit qu'à nous jetter dans de nouvelles obſcurités, ou qu'à nous affermir dans nos erreurs. M. ** ſoutenoit que ſa compoſition étoit bonne, parce que, pour peu qu'il diminuât la proportion de la *potaſſe* ou *ſalin*, elle fondoit mal, ou le verre ne pouvoit ſe travailler. La compoſition de M. ** étoit bonne relativement à ſon fourneau, mais elle étoit très-mauvaiſe en elle-même; puiſque le verre qui en réſultoit étoit peu clair, peu brillant, peu ſolide, très-ſuſceptible d'humidité, reſſuoit le ſel, ſe décompoſoit à la longue, & le pied creux des verres à boire ſe rempliſſoit dans le magaſin, & ſans communication ſenſible avec l'air extérieur, d'une liqueur ſaline ou diſſolution de ſel, partie alkali fixe, partie neutre. On n'obſerve rien de ſemblable dans le verre de M. *Drulanvaux*, par la raiſon ſans doute que ſon fourneau donne une chaleur ſuffiſante, propre à pro-

(1) V. l'art de la verr. de *Néri*, *Merret* & *Kunckel*, celui de *Blancourt*, la p. 177 de la lithog. de M. *Pott*, & la p. 136 du tom. V. des élém. de chym. de *Boerhaave*.

duire, avec une moindre doſe de fondant, une pénétration réciproque, un mêlange intime des matières eſſentielles, & une aſſez grande fluidité, pour que le ſel de verre puiſſe s'élever, ſe diſſiper, & emporter avec lui la majeure partie du principe colorant groſſier. Les défauts des compoſitions trop *tendres*, trop chargées de ſel alkali fixe, ne ſeroient pas, à beaucoup près, ſi ſenſibles, dans les verreries où l'on auroit un bon fourneau. L'action, longtemps continuée, d'un feu très-violent en feroit même diſparoître le plus grand nombre. Il ne manqueroit au cryſtal & au verre cryſtallin, que la dureté & un peu de ſolidité. Les meilleurs fourneaux ne ſçauroient corriger les défauts d'une compoſition trop maîgre. On a beau continuer le feu le plus violent, le mêlange des matières eſt toujours imparfait, le verre inégalement ſolide, plein de bulles, très-ſuſceptible de *rouille*, & ſe laiſſe difficilement travailler. Il n'y a jamais aſſez de fluidité pour que les matières eſſentielles ſe diſſolvent intimement, & que le ſel de verre puiſſe ſe diſſiper.

Parties égales de la meilleure ſoude, de ſable blanc ou de grais, de caſſons de la même eſpèce, & cinq onces pour cent de manganèſe ; parties égales de beau ſable, de chaux bien calcinée, de *potaſſe* blanche, de caſſons de la même eſpèce, & quatre onces pour cent de manganèſe ; trois parties de ſable très-blanc & très-pur, deux parties de ſel alkali fixe, de la *ſoude* ou de *potaſſe* très-purifiée, une partie de caſſons de la même eſpèce, une demi partie de chaux calcinée avec la dernière exactitude, & quatre onces pour cent de manganèſe, forment ordinairement, au moyen d'un bon fourneau, les meilleures compoſitions pour le verre blanc commun, pour le verre blanc fin, cryſtallin, & pour le cryſtal. Je dis *ordinairement*, parce que la *ſoude* & les ſels alkalis fixes peuvent être plus ou moins chargés de ſels neutres, qui ne font jamais un tout

homogène avec le ſable & la chaux, au moins ceux dans la compoſition deſquels entre l'acide vitriolique ou celui de ſel marin.

Il ſeroit ſans doute à ſouhaiter que nous euſſions une règle ſure pour nous diriger ſur un point auſſi délicat & auſſi important. Je vais communiquer un moyen de trouver les proportions les plus avantageuſes des fondants, qui m'a toujours parfaitement réuſſi. Je fais deux ou trois livres de compoſition dans les proportions ci-deſſus, pour le ſable, la terre végétale ou la chaux, les caſſons, la manganèſe, & je diminue la doſe du fondant. Lorſque j'ai trouvé le point où cette compoſition, miſe dans un petit creuſet ſur l'ouvreau, fond ſimplement pendant le temps d'un *affinage*, j'ajoute un dixième de fondant, & le verre qui en réſulte a les qualités que je deſire. Il eſt ſolide, très-net, très-brillant, & conſerve très-bien le poli.

La *fritte* n'eſt autre choſe que la calcination de la compoſition, & cette calcination ne ſert uniquement qu'à mêler les matières & à leur enlever le principe colorant groſſier. Il eſt indiſpenſable de *fritter* les compoſitions où l'on a fait entrer la *ſoude* en nature; mais les autres compoſitions n'en ont aucun beſoin, ſi les matières ont été bien calcinées ſéparément. Le mêlange peut s'en faire auſſi exactement hors du fourneau que dans le fourneau. L'uſage de mettre la *manganèſe* dans le verre, après la fonte, ne me paroît pas mériter d'être ſuivi. Il eſt rare qu'il ne produiſe pas des veines rouges, & que les *pilons*, la *bale*, les *fers*, dont on ſe ſert pour faire le mêlange, n'altèrent pas la couleur du verre. Si l'on trouve que la manganèſe, ſimplement mêlée avec les autres matières, ne ſoit pas aſſez fixe, on n'a qu'à l'incorporer, par la fuſion, avec le ſable & le ſel alkali fixe, à la manière de *ſmalte* ou du *bleu d'émail*. Au lieu de *manganèſe*, on mettra, dans la compoſition, du verre pilé

pilé très-rouge. La fritte, ou la compoſition, ne gagne à être gardée, qu'autant qu'on la fait paſſer par une ſeconde calcination.

Avant de mettre la *fritte* ou la compoſition dans les creuſets, il importe que le fourneau ſoit très-chaud. Le feu la pénétrant inégalement, elle fondroit avec moins de facilité. La méthode d'enlever *le fiel de verre* à *la première fonte*, me paroît mauvaiſe. Ce ſel facilite la fuſion & la dépuration de la *ſeconde fonte*. J'ai toujours trouvé utile de ne faire la ſeconde & la troiſième *fonte*, que lorſqu'il ne paroît plus de bulles dans les *larmes d'eſſai*. Le verre ſe dépure beaucoup mieux & plus promptement. Si le ſel de verre ſe trouve abondamment ſur la dernière fonte, il eſt avantageux de l'enlever avec une *poche de fer*, parce qu'il corrode les creuſets. *Le fiel de verre* eſt le plus cruel ennemi que le maître de verrerie ait à redouter. Il eſt la cauſe des *bulles*, du *point*, de *l'empetit*, du *véſignage*, de *l'engélé*, du *vergetage*, des *nuages*, des *graiſſes*, du *laiteux*, du *feuilletage*, de l'*humide*, du *reſſuage*, du défaut de ſolidité, de la *rouille* ou *plombé* du verre, de la dégradation inégale, quelquefois de la *fracture des creuſets*. Ce ſeroit un très-grand bien qu'il n'en reſtât point dans le verre ; mais il ſeroit, je penſe, très-fâcheux qu'il n'y en eût pas une petite quantité dans le ſel alkali fixe. Il diſpoſe les matières à la fuſion, en facilite le parfait mêlange, contribue infiniment à la dépuration du verre, entraîne avec lui les matières hétérogènes, ſurtout le principe colorant groſſier. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à faire fondre avec du *ſuin* le verre qui, par ſon ſéjour dans le fond des fourneaux de fuſion, eſt devenu noir & opaque. Par ce moyen, on lui rendra ſa tranſparence & ſa couleur naturelle, & on lui enlevera même la vertu électrique qu'il avoit au plus haut dégré. On voit par là que l'uſage où ſont quelques verreries d'a-

jouter du ſel marin aux compoſitions de verre groſſier, n'eſt point à mépriſer. Le ſel admirable de *Glauber* & le tartre vitriolé produiroient les mêmes effets; & même le dernier mérite la préférence, à raiſon de ſa plus grande fluidité. Voyez *p.* 175 & 176 de l'Examen des pierres de M. *Pott.*

Les ſçavans & les maîtres de verrerie, regardant le *ſuin* ou *fiel de verre*, avant l'excellent mémoire de M. *Pott* déjà cité, comme un *ſel alkali ſuperflu*, & ne ſoupçonnant même pas le plus grand nombre de ſes mauvais effets, ne pouvoient conſeiller & employer que deux moyens pour le détruire, *l'extinction du verre dans l'eau* & *les longs affinages*. Ces moyens ſont bons, mais l'expérience prouve qu'ils ſont inſuffiſants. L'eau ne peut ſe charger de tout le ſel, qu'autant que le verre ſeroit réduit, par l'extinction, en pouſſière très-fine. L'action du feu, ſi longtemps continuée qu'elle ſoit, ne forcera jamais tout le *ſuin* à ſe diſſiper, ſi le verre n'a pas une fluidité convenable. Dans ce cas, le verre retient le *fiel de verre*, comme les *ſcories trop pâteuſes* retiennent le métal. La ſeule différence qu'il y a, c'eſt que l'un empêche l'évaporation, & les autres la précipitation. Diverſes pratiques de verreries, inventées dans d'autres vues, contribuent à la diſſipation du *fiel de verre*. On met de l'*arſenic*, de l'*antimoine*, des *écorces vertes d'arbres* dans le verre en fuſion. On le remue avec des bâtons verds de *frêne*, de *coudrier*, de *tilleul*, &c. dans l'idée de le *blanchir*, de détruire ſes couleurs trop fortes. Ces différentes manœuvres n'ont d'effet qu'autant qu'il y a du *ſuin* dans le verre. Elles en facilitent le dégagement par le paſſage que s'ouvrent, à travers le verre, l'*arſenic*, le papier dont il eſt enveloppé, l'*antimoine*, les *écorces*, les parties aqueuſes & l'écorce des bâtons. Le ſel de verre ſuit ces matières, & emporte avec lui le principe colorant groſſier. Le *pilonage* qu'on fait pour mêler la *man-*

ganèſe avec le verre, produit le même effet. Après ces opérations, le verre du haut des creuſets eſt très-bouillonneux, & ſe trouve chargé de moitié plus de *fuin* que celui du milieu ou du fonds des creuſets. On peut s'en aſſurer par l'expérience. Ces moyens ne ſçauroient jamais remplir parfaitement leur objet. On ne doit ſe flatter de détruire entièrement le ſel de verre, qu'autant que la compoſition aura été faite dans des proportions convenables, & qu'on emploira un feu très-violent & aſſez longtemps continué; qu'il y aura, dans la compoſition, le ſel alkali fixe néceſſaire pour *ſaturer* complettement, s'il eſt permis de ſe ſervir de ce terme, à un feu très-violent, le ſable & la chaux. La parfaite dépuration ſe fera alors, ſans qu'on ſoit obligé d'avoir recours à aucun autre moyen. Je crois avoir indiqué ci-deſſus ces proportions, ou la vraie méthode pour les trouver dans tous les cas.

D'après ce que nous venons de dire, on voit ce qu'on doit penſer de ce qu'ont écrit les auteurs de l'Art de la verrerie ſur les *couleurs* du verre; que *le feu les conſume;* qu'il faut les prendre, pour ainſi dire, à la volée; que les minéraux ſeuls peuvent les fournir, &c (1). Les couleurs ne diſparoiſſent que parce que la matière colorante, ayant plus d'affinité avec le *fuin* qu'avec le verre, ſe combine & ſe diſſipe avec lui. Lorſque le verre eſt exactement purgé des ſels neutres, *tartre vitriolé, ſel marin* & *ſel admirable de Glauber*, les couleurs ſont fixes au feu le plus violent & le plus longtemps continué. La couleur jaune que donnent la ſuye, les charbons des végétaux & des animaux eſt auſſi fixe que le bleu du *ſaffre* & le rouge de la *manganèſe*. Le ſel de verre me paroît le plus ſûr moyen qu'on puiſſe employer pour amener les couleurs au ton & à la nuance deſirée.

(1) V. les p. 254, 255, 262, &c. de l'art de la verr. trad. in-4°., & la p. 275 du tom. V. des élém. de chym. de *Boerhaave*.

Toute eſpèce de bois eſt bonne pour fondre & cuire le verre, pourvu qu'il ſoit bien ſec & d'une groſſeur moyenne, de trois à quatre pouces de tour. Les bois ſans écorce de *hêtre*, de *charme*, de *bouleau*, de *cériſier*, de *frêne*, donnent la flamme la plus claire: ils ſont à préférer ſurtout pendant le travail du verre. Les cendres du *peuplier*, du *tremble*, du *ſaule*, du *tilleul*, ſont ſi légères qu'elles voltigent dans le fourneau, & s'attachent à la ſurface des pièces qu'on chauffe; ce qui en altère l'uni & le brillant. Le bois de chêne, à moins qu'il ne ſoit extraordinairement ſec, pétille; & ces petites exploſions jettent des charbons dans les creuſets. Il n'eſt point de matière combuſtible d'un effet auſſi ſûr ni auſſi prompt que le bon charbon de pierre ou de terre. Les cryſtalleries Angloiſes, & les manufactures de glaces de Londres & de *Tourlaville* en Normandie, l'employent avec le plus grand ſuccès. J'ai toujours trouvé que quatorze livres peſant de bon charbon de terre produiſoient autant d'effet que vingt-cinq livres peſant de bois ſec. Il n'y a certainement pas à craindre que, dans un fourneau bien proportionné, les fumées & les cendres du charbon puiſſent altérer la couleur du verre. Nous avons en abondance d'excellent charbon de terre. Le bois devient de jour en jour plus rare & plus précieux. Je penſe qu'on ne ſçauroit trop encourager les établiſſemens de verrerie où l'on ne brûleroit que du charbon de terre.

Quelque matière combuſtible qu'on employe, il eſt eſſentiel de *ſervir* le fourneau avec beaucoup d'égalité. La moindre négligence de la part du *tiſeur* retarde conſidérablement les affinages. Quand, depuis environ une heure, il ne paroît plus de bulles dans les *larmes* d'eſſai, & que le verre blanc ou le cryſtal eſt au point de couleur qu'on ſouhaite, on peut arrêter le feu. Il eſt de conſéquence de *marger* (bou-

cher les ouvertures) exactement le fourneau, & de le tenir *ma ié* pendant trois ou quatre heures. On néglige mal à propos cette attention. Elle contribue beaucoup à la perfection de *l'affinage ;* non en donnant au verre la facilité de chaſſer l'air de ſes interſtices par ſon affaiſſement, & par-là, d'être exempt de bulles, comme on le croit communément ; mais pour donner matières étrangères, & principalement au *ſel de verre :* dont le verre pourroit encore être chargé, le temps de monter au haut des creuſets.

Il ſeroit aſſez inutile de s'étendre ici en obſervations ſur la manière de travailler le verre, & cela nous meneroit beaucoup trop loin. Je me contenterai de recommander aux ouvriers beaucoup de propreté.

De quelque importance que ſoit la *recuiſſon* du verre, je ne connois point d'auteur qui en ait parlé. Dans les verreries, on en a des idées fort obſcures : il y en a même où l'on croit qu'elle s'opère par une eſpèce de vertu occulte. Il eſt aiſé de s'aſſurer qu'elle n'eſt autre choſe qu'un refroidiſſement amené par dégrés inſenſibles ; mais il eſt très-difficile de procurer au verre cette eſpèce de refroidiſſement, ſurtout aux pièces d'épaiſſeur inégale & aux *plateaux*. C'eſt ſans doute cette difficulté qui fait que les plats des verres à vitres des cinq groſſes verreries de Normandie ſont mal recuits. Quelques minces qu'ils ſoient, on n'en trouve preſque pas un qui ſoutienne convenablement l'impreſſion du diamant, qui ne ſoit plus fragile qu'il n'eſt de la nature du verre de l'être. La manière dont on recuit ordinairement les groſſes pièces, lanternes, grands verres d'optique, plateaux, &c. doit produire une mauvaiſe *recuiſſon*.

Lorſqu'on a mis dans un fourneau très-chaud toutes les pièces qu'on veut y mettre, on le *marge* avec ſoin. Il eſt certain que les verres reçoivent, & preſque ſubitement, un plus haut dégré de chaleur,

après qu'on a *margé*. Il ſuffit de regarder dans le fourneau, pour s'en convaincre. Outre la *caſſe* & le *plati*, qui réſulte ordinairement de cette augmentation de chaleur, on a très-longtemps à attendre le parfait refroidiſſement du fourneau ; à moins, comme c'eſt l'uſage généralement reçu, qu'on ne commence à *démarger*, à donner de l'air, au bout de deux ou trois jours. L'air extérieur ſe précipite avec d'autant plus de rapidité, dans le fourneau, qu'il eſt plus chaud. Il eſt aiſé de ſentir que ce *demargement* fait éprouver aux verres un changement trop ſubite, pour qu'ils n'en ſouffrent pas. Auſſi trouve-t-on toujours un grand nombre de pièces caſſées, & toutes mal recuites. Il y a un moyen très-ſimple d'obvier à tous ces inconvénients ruineux pour le maître de verrerie, & très-préjudiciables à l'intérêt du public, de bien recuire, & en moins de jours, dans le même fourneau. Tout le changement conſiſte à faire percer, au milieu de la voûte, une ou pluſieurs ouvertures de cinq pouces de diamètre, ſuivant la grandeur du fourneau. Par exemple, une ouverture ſuffit, pour le fourneau, à étendre & à recuire les verres plats ſoufflés ſans *boudine* ou en façon de Bohême. Elle doit être percée au milieu de la voûte A, (*fig.* 6e). Auſſitôt qu'on a *margé* les ouvertures F,G & l'entonnoir C, on *démarge* l'ouverture de la voûte, & enſuite on marge les deux extrémités du *tiſar*. Par ce moyen, ni le *plati* ni la *caſſe* ne ſont à craindre ; les verres ſont recuits auſſi parfaitement qu'il eſt poſſible, & dans l'eſpace de quatre ou cinq jours, au lieu de huit au moins qu'il en falloit pour les recuire mal. On ſent aiſément que le dégré de chaleur ne peut augmenter, & qu'il diminue inſenſiblement ; que la chaleur ſe diſſipe par l'ouverture de la voûte, ſans que l'air extérieur puiſſe s'introduire dans le fourneau, d'une manière marquée.

Dans les verreries en plats, en tables coulées ou

ſoufflées avec ou ſans *boudine*, en lanternes, en cryſtal, &c. les ouvriers ont de trop longs intervalles de repos. Le plus grand nombre eſt au moins trente heures de ſuite, & trois fois par ſemaine, ſans travailler. Cette oiſiveté eſt funeſte au bon travail. Il eſt rare qu'elle ne produiſe le relâchement, qu'elle ne conduiſe à la diſſipation & même à la débauche. Le public eſt auſſi intéreſſé que les maîtres de verrerie à voir ce vice déraciné. Nous en fournirons des moyens également utiles & honnêtes.

Il ſe perd beaucoup de feu dans les mêmes verreries. Les ouvreaux ſont preſque toujours libres; les *arches* ni les fourneaux à recuire ne ſont jamais pleins; les premières ſont aſſez ſouvent vuides. Il ſeroit à ſouhaiter de pouvoir profiter de ce feu perdu. L'art y gagneroit. Nous avons des hommes d'un talent exquis pour mettre l'émail en œuvre; mais il faut que ces grands artiſtes préparent & faſſent eux-mêmes, à grands frais, leurs couleurs & leurs émaux, ou qu'ils les achetent de l'étranger. Que de facilités ne trouveroit-on pas, à cet égard, dans nos verreries! Les hommes, les fourneaux & le feu néceſſaires pour calciner l'étaim & le plomb, ou pour faire le *crocus des métaux*, ſi on le préfère à la chaux d'étain & de plomb dans la confection de l'émail blanc, n'y coûteroient rien. On y trouve des moyens admirables de préparer toutes les couleurs, & de bien dépurer & cuire l'émail. Nous aurions ſûrement des émaux à bas prix, &, à très-peu de choſe près, d'un même dégré de fuſibilité, puiſqu'on employeroit toujours le même feu & la même compoſition. Les peintres gagneroient encore, vraiſemblablement, des couleurs plus belles & un plus grand nombre de nuances.

L'art de peindre à la moſaïque eſt le ſeul qui puiſſe tranſmettre, ſans altération, à la poſtérité la plus reculée la mémoire des grands événemens & des hom-

mes illuſtres. Ses productions ſe jouent également des injures de l'air, de l'action de l'humidité & des reſſources de la malice ou de la jalouſie. Il n'eſt point de voyageur qui ne ſoit enchanté des chefs-d'œuvre, en ce genre, qu'on voit à Rome. Cet art n'eſt preſque connu en France que de nom. Pourquoi ne l'a-t-on pas forcé à ſortir de l'Italie ? Nous avons certainement un grand nombre d'artiſtes en état de s'y diſtinguer : ce ne ſont point les talens qui manquent, c'eſt la matière qui manque aux talens. Donnez-leur les différents verres colorés néceſſaires, vous verrez des prodiges. Il eſt certain que ces verres colorés pourroient être fabriqués très-commodément, & à très-bas prix, dans nos verreries.

Nous ne pouvons nous flatter de voir nos porcelaines au dégré de perfection dont elles ſont ſuſceptibles, que lorſqu'un grand nombre de perſonnes s'occuperont de cette branche de l'art de la verrerie. Je ne penſe pas que nos verreries doivent entreprendre ces grandes pièces dont le mérite conſiſte dans l'élégance de la forme, dans la correction du deſſein, la richeſſe de la compoſition, la hardieſſe du pinceau, l'harmonie des couleurs. Ces prodiges de l'art & du goût ſont réſervés à la manufacture de *Sèves ;* mais je crois que les verreries pourroient fabriquer une porcelaine moyenne, aſſez belle & d'un prix aſſez modique, pour faire ceſſer les importations ruineuſes de la porcelaine commune de la Chine. L'argille pure, bien préparée & combinée convenablement avec la pouſſière très-blanche de caillou ou de ſable, pourroit leur fournir une aſſez bonne compoſition de porcelaine & un *verre de craye* très-bien épuré, & leur donner une *belle couverte* (1). Cette porcelaine ne différeroit pas, autant qu'on pourroit peut-être ſe l'ima-

(1) V. les p. 103, 605, &c. de l'art de la verr. trad. franç. in-4°.

giner,

giner, de celle de la Chine. Du moins conviendra-t-on qu'elle lui reſſembleroit en ce qu'il n'entreroit point de ſels dans la pâte, ni de métaux dans la couverte. Les maîtres de verrerie n'auroient beſoin que d'un peintre & d'un petit nombre de modèles. Ils trouveroient, ſans qu'il leur en coûtât rien, ou preſque rien, tout le reſte chez eux; ouvriers, bâtimens, fourneaux, & tous les dégrés de feu néceſſaires.

La converſion du fer en acier, par la *cémentation*; pourroit encore fournir aux verreries un moyen très-utile de profiter de leur feu perdu, & d'occuper leurs ouvriers ſans les fatiguer. On ſçait que tout l'art conſiſte à rendre le fer plus dur, & à le charger d'une plus grande quantité de *phlogiſtique* atténué par le moyen des ſels (1). Cette induſtrie auroit un double avantage pour le royaume : le verre ſeroit à plus bas prix, & nous ne ſerions pas obligés de tirer annuellement, pour des ſommes très-conſidérables, d'acier des pays étrangers.

Ces moyens de mettre à profit le trop long repos des ouvriers & le feu perdu des verreries, mériteroient d'être traités avec plus d'étendue; mais je ne pourrois m'y arrêter plus longtemps, ſans paſſer les bornes preſcrites à ce mémoire. Je dois avertir que je n'ai pas prétendu confondre avec les ouvriers les gentilshommes qui travaillent le verre. Il ne paroîtroit pas juſte qu'ils ne fuſſent pas mieux payés & qu'ils travaillaſſent autant que de ſimples roturiers. Le deſir naturel qu'ils ont de ſe diſtinguer aſſure à l'art & aux maîtres de verrerie un ample dédommagement.

Ce ne ſont pas les ſeuls avantages que puiſſe nous procurer l'art de la verrerie perfectionné. Nous devons en attendre une connoiſſance plus intime & plus étendue des ſels, du phlogiſtique, des couleurs, des ter-

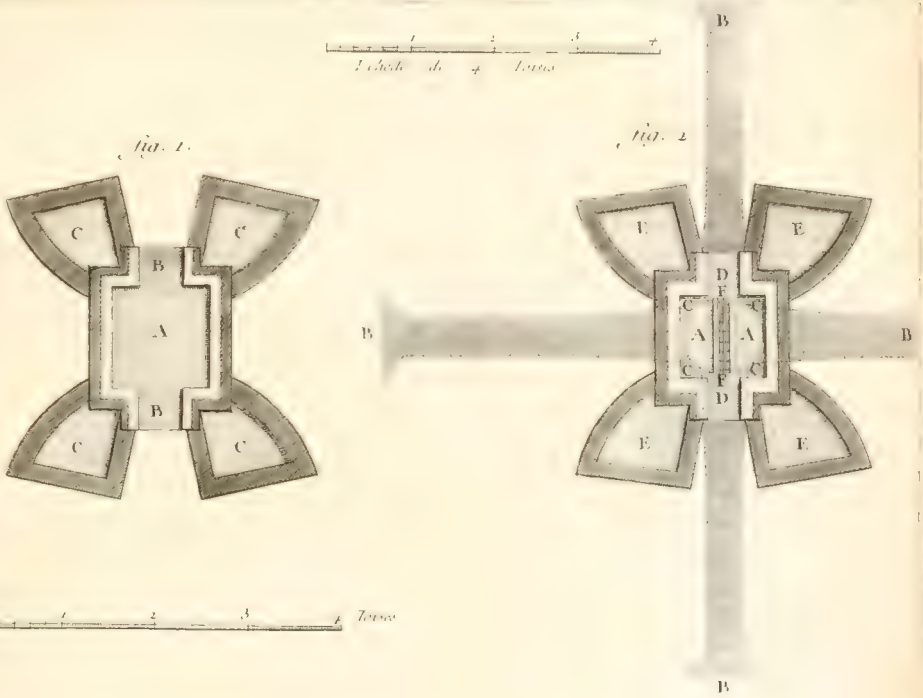
(1) V. l'art de convertir le fer en acier, par le célèbre M. de *Réaumur*.

res, des minéraux, de la métallurgie, de la pyrotechnie, &c. Il ne ſeroit pas difficile de prouver que cette aſſurance n'eſt pas deſtituée de fondement.

De nouvelles lumières peuvent ſans doute beaucoup contribuer à la perfection de l'art de la verrerie; mais elles ne le conduiront jamais, ſans le ſecours du gouvernement, au plus haut dégré dont il eſt ſuſceptible. Cet art eſt trop précieux, & le miniſtère trop éclairé, pour que nous ne ſoyons pas perſuadés qu'il lui accordera toutes les facilités dont il a beſoin; qu'en ſa faveur il honorera de ſa protection les nouvelles recherches; qu'il encouragera l'induſtrie; qu'il animera le talent. Il ne me conviendroit aſſurément point de me permettre à cet égard aucun détail. Je dois me renfermer dans les vœux *du bon citoyen* qui a donné lieu à ce mémoire (1). Je me flatte qu'on me pardonnera d'avoir paſſé rapidement ſur pluſieurs points de la matière que j'ai oſé entreprendre de traiter. Elle eſt d'une trop grande étendue pour être épuiſée dans un mémoire. Je puis me rendre le témoignage de n'avoir rien négligé de ce que j'ai ſçu ou cru de plus important à dire. Si je ne craignois d'ennuyer, il me ſeroit aiſé d'établir, par des états de dépenſe & de produit, qu'au moyen de ce que j'ai dit ſur les fourneaux & les creuſets, ſur les matières à convertir en verre & ſur la manière de le faire, on peut faire du beau verre durable, à *moitié* meilleur marché, que le verre de nos verreries les plus eſtimées. J'aurois peut-être pu éviter l'ennui par l'application circonſtanciée de mes principes à quelque branche particulière de l'art de la verrerie, par exemple, à la *glacerie*; mais cela m'auroit mené beaucoup trop loin. Si je pouvois ſoupçonner que ce fût une perte

(1) Un bon citoyen, qui n'a point voulu qu'on le nommât, remit, en 1759, une ſomme de cinq cent livres à l'Académie Royale des Sciences, pour récompenſer celui qui, au jugement de cette compagnie, auroit le mieux répondu à la queſtion qui fait le titre de ce mémoire.

pour le public, je ne tarderois pas à le dédommager. Rien ne ſçauroit plus me flatter que d'y être encouragé par l'Académie, & de mériter ſon ſuffrage ſur ce que j'ai l'honneur de lui préſenter.


Echelle de 4 Toises
fig. 1.
C
B
A
fig. 2.
E
D
F
Toises
fig 3.
M
N
F
C
H
E
D
G
A
B
I

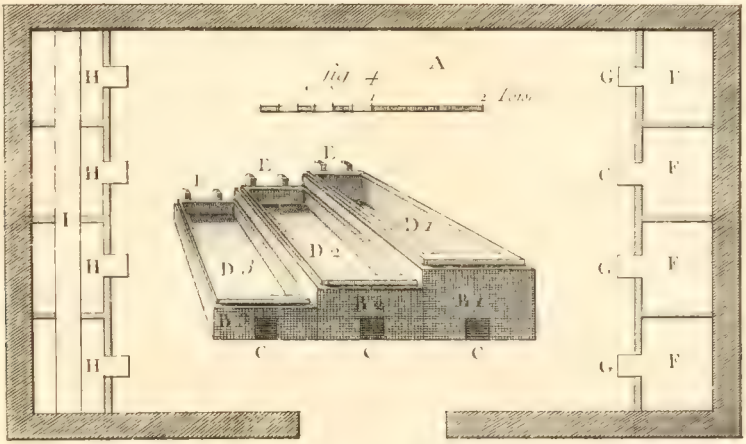
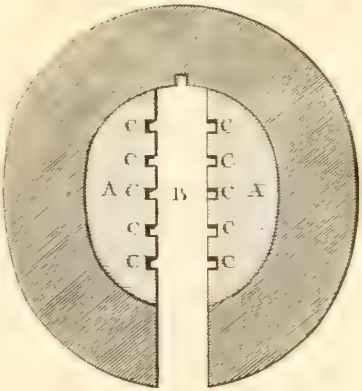
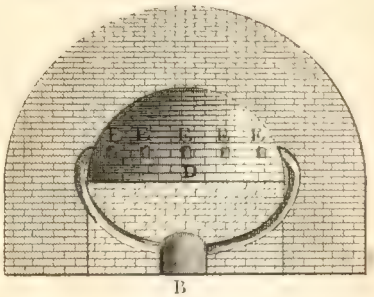


fig 4
A
1
2 Toises
H
I
G
F
E
D 1
D 2
D 3
B 2
C


C
A
B


E
D
B

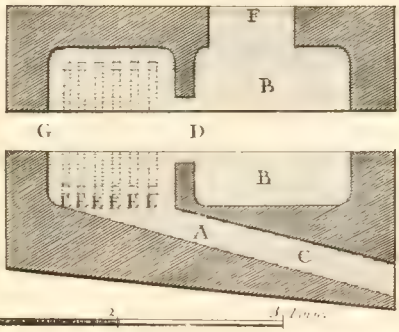


fig 6
F
B
G
D
A
C
1
2
3 Toises

RECHERCHES

SUR

L'ARRIMAGE DES VAISSEAUX;

Et quelles bonnes qualités on en peut procurer à un Vaiſſeau

Pour concourir au Prix propoſé par l'Académie Royale des Sciences, pour l'année 1761.

Par M. Jean-Albert Euler.

Cette pièce eſt l'une des deux entre leſquelles le Prix a été partagé.

RECHERCHES

SUR

L'ARRIMAGE DES VAISSEAUX.

Et quelles bonnes qualités on en peut procurer à un Vaiſſeau.

. . . *Ipſi numerumque locumque* carinis
Præcipiunt onerum. . . . . .

VIRG.

1. La conſtruction d'un vaiſſeau renferme d'abord la détermination de la partie qui eſt deſtinée à entrer dans l'eau lorſque le vaiſſeau eſt en équilibre. Dès que le plan ou devis d'un vaiſſeau eſt formé, on y diſtingue la partie qui doit être enfoncée dans l'eau de celle qui doit ſe trouver au-deſſus de l'eau. Donc il faut que le plan, qui ſépare ces deux parties de chaque vaiſſeau, devienne horiſontal étant à fleur d'eau; delà eſt déterminé le centre de gravité de la partie ſubmergée, en n'en conſidérant que le volume, dont la connoiſſance eſt de la dernière importance. On ſçait que le poids du vaiſſeau entier doit être égal au poids d'un volume d'eau égal à la partie ſubmergée, & que le centre de gravité du vaiſſeau entier doit tomber dans la ligne verticale, qui paſſe par le centre de la partie ſubmergée : ces deux

conditions déterminent tant la quantité de la cargaiſon, qu'une certaine manière de l'arranger, afin que les deux centres, dont je viens de parler, ſe trouvent dans la même ligne verticale.

2. Soit $ABCD$ la ſection verticale d'un vaiſſeau, tirée par le milieu de la proue à la poupe, & qui partage le vaiſſeau dans ſes deux moitiés égales & ſemblables, & tirant la droite MN à fleur d'eau pour avoir la partie ſubmergée $MNDC$, ſon centre O tombera ſans doute dans cette ſection verticale; & la droite verticale QP, tirée par ce point O, ſera celle où le centre de gravité du vaiſſeau tout entier doit tomber, qui ſoit en G. La poſition donc de ces deux lignesdroites MN & PQ avec le point O, étant donnée par la conſtruction même du vaiſſeau, on en connoit d'abord la quantité de la cargaiſon; & enſuite il la faut diſtribuer dans le vaiſſeau enſorte que le centre de gravité du vaiſſeau entier tombe préciſément dans la ligne verticale PQ, ce qui eſt la première règle indiſpenſablement néceſſaire pour l'arrimage.

3. Or, il eſt évident que cette règle peut être obſervée d'une infinité de manières différentes; d'abord le point G n'étant point preſcrit, puiſqu'il ſuffit qu'il ſe trouve dans la verticale PQ, eſt ſuſceptible d'une infinité de variations; & enſuite, en quelque lieu qu'on l'ait fixé, il eſt encore poſſible de varier à l'infini l'arrangement des fardeaux. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à conſidérer deux fardeaux quelconques α & β, dont le commun centre de gravité ſoit en γ; & il eſt clair qu'en changeant la poſition de ces deux fardeaux, en ſorte que leur centre de gravité demeure en γ, ce qui peut ſe faire d'une infinité de manières, le centre de gravité du vaiſſeau entier n'en ſouffrira aucune altération. Cette variabilité ayant lieu à l'égard de deux fardeaux quelconques, à plus forte raiſon tous les fardeaux enſemble admettront une variation infinie,

nonobſtant que le centre de gravité du vaiſſeau entier ſoit fixé dans un point donné G.

4. Cependant cette variation dans l'arrangement des fardeaux eſt limitée par pluſieurs circonſtances : d'abord on ne ſçauroit placer un fardeau dans un lieu qui eſt déjà rempli par d'autres ; & ſi toute la cavité du vaiſſeau étoit remplie de fardeaux, aucun changement n'y auroit plus lieu, à moins qu'on ne veuille échanger la poſition de deux fardeaux d'un même volume, en tranſportant l'un dans la place de l'autre, ce qui ne cauſeroit en effet aucun changement, qu'entant que ces deux fardeaux différeroient en poids. Enſuite, il y a des fardeaux dont la deſtination leur aſſigne la place, comme les canons, qui ne ſouffrent aucun changement dans leurs lieux. Mais quelque limitée que ſoit cette variabilité, il reſte ordinairement aſſez de quoi faire des changemens dans l'arrimage des vaiſſeaux, & d'en tirer quelque profit pour la navigation.

5. En tant que le lieu du centre de gravité du vaiſſeau entier eſt ſuſceptible de quelque variation, toutes les bonnes qualités d'un vaiſſeau exigent unanimement qu'on faſſe deſcendre ce point auſſi bas qu'il eſt poſſible. Enſuite ce point G étant fixé ainſi, il eſt certain que les changemens dont l'arrimage ſera encore ſuſceptible, peuvent contribuer à augmenter ou à diminuer les bonnes qualités d'un vaiſſeau. Pour juger bien de cet important article, il faut avoir égard aux trois momens d'inertie du vaiſſeau entier rapportés à trois axes perpendiculaires entr'eux, tirés par le centre de gravité G, dont l'un eſt vertical QP, & les deux autres horiſontaux, tirés ſelon la longueur & la largeur du vaiſſeau. Tout changement fait dans l'arrimage n'influe ſur les qualités d'un vaiſſeau qu'en tant que les momens d'inertie, par rapport à ces trois axes du vaiſſeau, en ſont altérés.

6. Je nomme ici le moment d'inertie d'un vaiſſeau

par rapport à un axe, tiré par ſon centre de gravité; l'expreſſion analytique qui réſulte lorſqu'on multiplie toutes les maſſes élémentaires dont le vaiſſeau eſt compoſé, chacune par le quarré de ſa diſtance audit axe, & qu'on raſſemble tous ces produits dans une même ſomme. Cette ſomme pourra donc toujours être exprimée par le produit d'une maſſe ou d'un poids multiplié par le quarré d'une ligne. Ainſi, poſant la maſſe ou le poids d'un vaiſſeau $= M$, je nommerai dans la ſuite le moment d'inertie par rapport à l'axe tiré, ſelon la longueur du vaiſſeau $= Maa$, celui par rapport à l'axe tiré ſelon la largeur $= Mbb$, & celui par rapport à l'axe vertical $QP = Mcc$. Il s'agit donc de déterminer quel effet doit produire dans les qualités du vaiſſeau un changement cauſé dans quelqu'un de ces trois momens d'inertie. Or, je ſuppoſe encore que tous les fardeaux ſoient tellement fixés, chacun dans le lieu qui lui a été aſſigné, qu'ils y demeurent conſtamment malgré les agitations & les ſecouſſes du vaiſſeau.

7. Voilà donc le plan que je me propoſe de ſuivre dans mes recherches ſur la queſtion propoſée. Premièrement, j'examinerai en détail quels avantages on retire en baiſſant davantage le centre de gravité G, ou en diminuant ſa hauteur au-deſſus du centre O du volume ſubmergé. Enſuite, je chercherai quelle influence doit avoir ſur les qualités du vaiſſeau un changement cauſé dans quelqu'un des trois momens d'inertie Maa, Mbb, Mcc, afin qu'on puiſſe juger en quel cas leur augmentation ou diminution eſt plus avantageuſe. Tout cela eſt fondé ſur les principes de méchanique, par lequels on ſçait que la détermination de tous les mouvemens & de toutes les agitations dont un vaiſſeau eſt ſuſceptible, dépend de ces trois momens d'inertie.

I.

Des changemens cauſés dans la hauteur du centre de gravité du vaiſſeau.

8. La hauteur du centre de gravité du vaiſſeau entre principalement dans la détermination de la ſtabilité du vaiſſeau, qui eſt la force dont le vaiſſeau s'oppoſe à toute inclination. Pour établir une meſure juſte de cette ſtabilité, on conſidère le vaiſſeau tant ſoit peu incliné de ſa ſituation naturelle ; & alors le vaiſſeau, en vertu de ſa ſtabilité, fera des efforts pour ſe rétablir ; & tant que l'inclinaiſon eſt extrêmément petite, on comprend aiſément que cet effort eſt proportionel à l'angle de l'inclinaiſon. Soit ω l'angle de l'inclinaiſon ; & l'effort du vaiſſeau pour ſe retablir, ſera exprimé par un moment de force, ou le produit d'une force par une ligne. Soit donc P ce moment de force dont le vaiſſeau tâche de ſe rétablir, ou, ce qui revient au même, lequel étant juſtement appliqué au vaiſſeau en ſens contraire, eſt capable de maintenir le vaiſſeau dans ſon état incliné ; &, puiſque P eſt proportionel à l'angle ω, prennons la quantité $\frac{P}{\omega}$ pour la meſure de la ſtabilité.

9. Pour rendre cette expreſſion tout-à-fait déterminée, on exprime l'angle de l'inclinaiſon ω par l'arc de cercle qui eſt ſa meſure, en ſuppoſant le rayon du cercle $= q$. Ainſi, la valeur de la lettre ω devenant un nombre abſolu, la fraction $\frac{P}{\omega}$, qui repréſente la ſtabilité, ſera encore homogène avec le produit d'une force par une ligne, dont les momens de force ſont exprimés dans la méchanique. Donc réciproquement quand on dit que la ſtabilité d'un vaiſſeau $= Q$, on entend que ce vaiſſeau étant incliné à un petit angle ω,

le moment de force dont il tend à ſe rétablir eſt $= Q\omega$; ou bien pour incliner le vaiſſeau à cet angle ω, il faut employer un moment de force $= Q\omega$. D'où l'on voit que plus la ſtabilité Q eſt grande, plus auſſi le vaiſſeau réſiſtera à l'inclinaiſon; & il ſemble que cette manière eſt la plus propre à exprimer l'idée qu'on peut ſe former de la ſtabilité.

10. Mais le vaiſſeau pouvant être incliné d'une infinité de manières différentes, ſelon tous les ſens auxquels l'inclinaiſon peut arriver, chaque manière a ſa propre ſtabilité. Toute inclinaiſon ſe fait au tour d'un axe horiſontal qui paſſe par le centre de gravité du vaiſſeau. Lorſque le vaiſſeau s'incline en avant ou en arrière, l'inclinaiſon ſe fait autour de l'axe horiſontal tiré ſelon la largeur du vaiſſeau; & lorſque l'inclinaiſon ſe fait vers l'un ou l'autre côté, c'eſt l'axe horiſontal tiré ſelon la longueur du vaiſſeau autour duquel le vaiſſeau s'incline. Et comme on peut concevoir une infinité d'axes moyens, le vaiſſeau eſt ſuſceptible d'une inclinaiſon autour de chacun d'eux, ſelon la direction & l'application des forces qui produiſent l'inclinaiſon. Or, l'on ſçait que les vaiſſeaux réſiſtent moins à l'inclinaiſon vers les côtés qu'à celle en avant ou en arrière, d'où l'on voit que chaque axe autour duquel l'inclinaiſon arrive, eſt doué d'une ſtabilité particulière.

11. Pour déterminer la ſtabilité par rapport à tous les axes autour deſquels l'inclinaiſon ſe peut faire, je me rapporte aux règles & démonſtrations que feu M. Bouguer & M. Euler ont données dans leurs traités ſur cette matière. Fig. 2. On conſidère la ſection horiſontale du vaiſſeau faite à fleur d'eau, qui ſoit la figure géométrique $MKNL$, dont on cherche le centre de gravité J, par lequel on tire une droite RS parallèle à l'axe autour duquel on veut que l'inclinaiſon ſe faſſe. On conçoit enſuite cette ſurface diviſée en des élémens infiniment petits, comme Z, dont on multiplie

plie chacun Z par le quarré de sa distance ZV à l'axe RS; ce qui donne une formule différentielle, dont il faut chercher l'intégrale, qui sera exprimée par une grandeur géométrique de quatre dimentions qui soit $=U$. Suivant l'analogie avec les idées méchaniques, on peut nommer cette quantité le moment de la surface $MKNL$ par rapport à l'axe RS; puisque si on la regardoit comme une lame infiniment mince, ce seroit, en effet, son moment d'inertie.

12. Maintenant, ayant trouvé ce moment U de la section faite à fleur d'eau par rapport à l'axe RS, autour duquel le vaisseau s'incline, il faut sçavoir 1°. le poids du vaisseau tout entier, qui soit $=M$. 2°. le volume de la partie submergée, qui soit $=V$; & 3°. l'élévation du centre de gravité du vaisseau G au-dessus du centre du volume enfoncé O, laquelle distance GO (*fig.* 1.) soit $=h$. Cela posé, on a trouvé que la stabilité du vaisseau par rapport à l'axe RS est $=M\left(\frac{U}{V}-h\right)$, d'où il est clair que le vaisseau n'a de la stabilité qu'en tant que la valeur de la fraction $\frac{U}{V}$, qui est une ligne, puisque U est une grandeur de quatre dimentions & V de trois, surpasse la ligne h ou l'intervalle GO. Et s'il arrivoit que par rapport à quelque axe RS, l'expression $\frac{U}{V}$ fût moindre que h, ou $U<Vh$, le vaisseau n'auroit aucune stabilité; & la plus petite force seroit capable de le renverser autour de cet axe. Il est donc de la dernière importance d'empêcher que la quantité $\frac{U}{V}-h$ ne devienne trop petite, ou même négative.

13. On tâche de remédier à cet inconvénient, en élargissant la section faite à fleur d'eau, autant que les

circonſtances le permettent; mais ici, il faut conſidérer le vaiſſeau comme déjà conſtruit; & la valeur de la fraction $\frac{U}{V}$, comme donnée, il ne s'agit donc que de diminuer l'intervalle $GO = h$ autant qu'il eſt poſſible. En ſuppoſant que le vaiſſeau ait déjà de la ſtabilité, de quelque manière que la cargaiſon ſoit arrangée, on voit que c'eſt toujours un très-grand avantage lorſqu'on peut changer l'arrimage, enſorte que le centre de gravité G en ſoit porté plus bas. Si, par un changement fait dans l'arrimage, on peut réuſſir de déprimer le centre de gravité en g par l'intervalle $Gg = \gamma$, la ſtabilité en ſera augmentée de la quantité $M\gamma$; & cela, pour toutes les inclinaiſons poſſibles, puiſque ce n'eſt que la grandeur U qui dépend de l'axe, autour duquel le vaiſſeau s'incline : les autres quantités M. & h demeurant toujours les mêmes.

14. Or, le profit qu'on retire de l'abaiſſement du centre de gravité G eſt d'autant plus conſidérable, que l'excès de la quantité $\frac{U}{V}$ ſur l'intervalle $GO = h$ eſt plus petit. Si cet excès s'évanouiſſoit, ou que le vaiſſeau n'eût point du tout de ſtabilité, le moindre abbaiſſement apporteroit preſque un gain infini, la ſtabilité devenant infiniment plus grande qu'elle n'a été auparavant. C'eſt donc à l'égard de cet axe par rapport auquel la ſtabilité eſt la plus petite, que le profit tiré de l'abbaiſſement de ce centre eſt le plus conſidérable; cela arrive toujours à l'égard de l'axe tiré ſelon la longueur du vaiſſeau, par rapport auquel la ſtabilité eſt ordinairement trop petite; de ſorte qu'on eſt ſouvent obligé de ſouffler le vaiſſeau pour procurer une plus grande valeur au moment U. Dans ce cas donc, quelque peu qu'on puiſſe abbaiſſer le centre de gravité G, l'avantage eſt toujours très-conſidérable, quoiqu'il ne ſoit preſque d'aucune conſéquence à l'égard de la ſtabi-

bilité par rapport à l'axe tiré ſelon la largeur du vaiſſeau, laquelle eſt la plus grande en elle-même. Mais il faut auſſi obſerver que le vaiſſeau éprouve dans ce ſens les plus grands efforts auxquels il doit réſiſter.

15. Il eſt bon de remarquer ici, que ſi la ſection faite à fleur d'eau étoit un parallelogramme rectangle, dont la longueur $= MN$, & la largeur $= KL$; & qu'on poſât ſon aire $= 2D$, le moment par rapport à l'axe de la longueur MN ſeroit $= \frac{1}{6} D.KL^2$. Or ſi la figure de cette ſection étoit un rhombe de la longueur MN & de la largeur KL, le moment par raport à l'axe MN ſeroit $= \frac{1}{12} .D.KL^2$, en poſant l'aire de la ſection $= 2D$. Donc puiſque la ſection tient ordinairement un milieu entre ces deux figures, ſon moment par rapport à l'axe de la longueur MN, ou la grandeur U ſera contenu entre les limites $\frac{1}{6} D.KL^2$ & $\frac{1}{12} D.KL^2$. En effet, ſi la figure de la ſection eſt une ellipſe décrite par les points M, N, K, L, ſon moment par rapport à l'axe MN ſera $= \frac{1}{8} D.KL^2$.

16. Poſons la hauteur de la partie ſubmergée, ou le tirant d'eau $= k$; & ſi la figure de cette partie étoit cylindrique, ou que toutes les ſections horiſontales fuſſent égales entr'elles, le volume V de cette partie ſeroit $= 2Dk$; or, ſi la figure étoit pyramidale, terminée en bas par une pointe, on auroit $V = \frac{1}{3} Dk$; mais ſuppoſant le volume enfoncé, terminé en bas par une ligne droite horiſontale qui repréſente la quille; en ſorte que les ſections verticales & perpendiculaires à la quille ſoient des triangles, le volume V deviendroit $= Dk$. Quoique ce volume ſoit ordinairement vers le milieu plus enflé que dans cette dernière figure, on en rabbat par le devant & le der-

nière ; de ſorte qu'on ne ſe trompera pas beaucoup en ſuppoſant la ſolidité de ce volume $V = Dk$. Par conſéquent, ſuppoſant $U = \frac{1}{9} D.KL^2$, la ſtabilité par rapport à l'axe de la longueur MN ſera $= M\left(\frac{KL^2}{9\alpha} - k\right)$.

17. Il eſt donc toujours de la dernière importance de déprimer le centre de gravité G auſſi bas qu'il eſt poſſible, auſſi bas que les autres circonſtances liées avec la deſtination du vaiſſeau le permettent ; puiſque nous venons de voir, que ſi, par quelque changement fait dans l'arrimage, on peut déprimer le centre de gravité G de la quantité $Gg = \gamma$, la ſtabilité du vaiſſeau, par rapport à tous les axes, prend un accroiſſement $= M\gamma$, qui eſt d'autant plus conſidérable, que la ſtabilité, par rapport à quelque axe, ſera plus petite par elle-même. Si, par ce moyen, la ſtabilité, par rapport à l'axe tiré ſelon la longueur du vaiſſeau, laquelle eſt la plus petite, pouvoit être rendue deux fois plus grande, les inclinaiſons autour de cet axe ſeroient réduites à la moitié, les forces inclinantes demeurant les mêmes. Or, on ſçait qu'un tel avantage eſt d'une très-grande importance, puiſqu'il met le vaiſſeau en état d'y employer des manœuvres plus efficaces pour la navigation. Et, comme il n'y a nulle conſidération qui s'oppoſe à la dépreſſion du centre de gravité, on tire cette règle générale pour l'arrimage, qu'il faut toujours déprimer le centre de gravité autant qu'il eſt poſſible.

18. Or, cela s'exécute, premièrement, en plaçant chaque fardeau auſſi bas qu'il eſt poſſible. Pour connoître tout l'avantage qu'on en retire, enviſageons un fardeau dont le poids ſoit $= A$, qui, étant en α, puiſſe être porté plus bas par l'eſpace $= \alpha$; l'on ſçait que le centre de gravité du vaiſſeau deſcendra par l'eſpace $= \frac{A\alpha}{M}$, la lettre M marquant le poids du vaiſſeau.

tout entier, dont l'augmentation de la ſtabilité du vaiſſeau qui en réſulte ſera $= A\alpha$. Or, puiſque le centre de gravité G ne doit pas être écarté de la ligne verticale QP, le poids A ne ſçauroit être tranſporté plus bas que dans la ligne verticale, qui paſſe par ſon lieu α. Mais ſi le même fardeau ne peut pas être déprimé verticalement, on n'a qu'à prendre deux ou pluſieurs fardeaux, & les mettre plus bas, en ſorte que leur commun centre de gravité deſcende par une ligne verticale; & alors, la ſomme de ces fardeaux multipliée par la deſcente de leur commun centre de gravité, donnera l'accroiſſement de la ſtabilité.

19. Mais, ſi toutes les places inférieures ſont déjà occupées par d'autres corps, il y a encore un autre moyen de porter plus bas le centre de gravité G, qui a lieu lorſqu'on trouve dans des places ſupérieures des fardeaux ſpécifiquement plus peſans que dans les inférieures: alors, on n'a qu'à changer la ſituation de deux tels fardeaux du même volume, & de tranſporter le fardeau plus peſant à la place du plus léger, & réciproquement. L'accroiſſement de la ſtabilité ſera donc égal au produit de la différence des poids de ces deux fardeaux multipliés par la différence des hauteurs. D'où l'on tire cette règle pour l'arrimage, qu'il faut non ſeulement diſpoſer tous les fardeaux auſſi bas qu'il eſt poſſible; mais qu'il faut aſſigner les places les plus profondes aux fardeaux les plus peſans ſpécifiquement, en obſervant cependant toujours la règle principale, que le centre de gravité G demeure dans la ligne preſcrite QP.

II.

Des avantages qu'on peut retirer en changeant le moment d'inertie du vaiſſeau par rapport à l'axe vertical.

20. Le moment d'inertie du vaiſſeau par rapport à

l'axe vertical n'entre en considération, que lorsqu'il s'agit du mouvement avec lequel le vaisseau tourne autour de cet axe. Car, en général, tant qu'on ne considère que le mouvement progressif d'un corps quelconque, produit par des forces quelconques, il n'y a que la masse du corps, & son centre de gravité qui entre dans le calcul. Mais quand le corps a, outre cela, un mouvement de rotation, qu'on peut toujours envisager comme se faisant autour d'un certain axe, qui passe par son centre de gravité, ce mouvement de rotation tire sa détermination du moment d'inertie qui convient au corps par rapport à cet axe. Or, en tant que le corps nage sur l'eau, tant sa situation, que les inclinaisons qu'il éprouve, dépendent uniquement de la position du centre de gravité, du centre de volume de la partie enfoncée, & de la figure de la section faite à fleur d'eau; les momens d'inertie, par rapport à quelque axe que ce soit, n'y font d'aucune conséquence.

21. Donc, dès que par l'arrimage le centre de gravité du vaisseau est fixé dans le point G, le mouvement progressif & les inclinaisons causées par les forces, auxquelles il est exposé, en peuvent être déterminés; & il est indifférent à cet égard de quelle manière tous les fardeaux soient disposés dans la cavité du vaisseau. Or, il est clair qu'un si grand nombre de fardeaux, dont on charge ordinairement les vaisseaux, peut être arrangé d'une infinité de manières différentes, sans que le centre de gravité du vaisseau en souffre le moindre changement; & toutes ces manières sont absolument indifférentes à l'égard du mouvement progressif du vaisseau, & de toutes les inclinaisons dont il est susceptible. Mais ces divers arrangemens des fardeaux peuvent changer très-considérablement les momens d'inertie qui résultent, lorsqu'on multiplie tous les poids élémentaires dont le vaisseau est composé, chacun par le quarré de sa distance à l'axe par rapport auquel on demande le moment d'inertie. Donc, en tant qu'un ou

pluſieurs fardeaux changent de diſtance à l'égard de cet axe, le moment d'inertie deviendra ou plus grand ou plus petit.

22. Ce n'eſt donc que le mouvement de rotation autour de l'axe vertical, ſur lequel influe le moment d'inertie par rapport à cet axe; & partant, nous examinerons combien l'action du gouvernail dépend de ce moment; le mouvement de rotation étant toujours ou l'effet du gouvernail, ou devant être détruit par ſon moyen. La force, ou plutôt le moment de force, dont le gouvernail agit ſur le vaiſſeau pour le faire tourner, dépend uniquement de la force, & de ſon application par rapport à l'axe vertical tiré par le centre de gravité du vaiſſeau; & le moment d'inertie n'y a aucune influence. Mais, pour déterminer le mouvement même qui eſt produit par un tel moment de force, il faut tenir compte du moment d'inertie qui convient au vaiſſeau par rapport à l'axe vertical. On ſçait, par les principes de méchanique, que l'accélération de ce mouvement de rotation eſt proportionnel au moment de force qui produit ce mouvement, diviſé par le moment d'inertie du vaiſſeau par rapport à l'axe vertical; où il faut remarquer que, ſous le moment de force, on comprend auſſi la réſiſtance que le vaiſſeau éprouve dans ce mouvement, dont il faut ſouſtraire le moment du moment des forces actuelles.

23. Plus donc le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical ſera grand, plus deviendra petite l'accélération du mouvement de rotation, & plus on pourra diminuer ce moment d'inertie, plus l'accélération du mouvement de rotation ſera augmentée dans la même raiſon. Donc, pour rendre l'effet du gouvernail plus prompt, il faut diminuer le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical du vaiſſeau; & partant, ſi nous concevons deux vaiſſeaux, d'ailleurs

parfaitement égaux, & ſemblables, tant par rapport à la conſtruction qu'à la ſituation du centre de gravité, mais tellement différens par rapport à l'arrimage que dans l'un, le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical ſoit plus grand que dans l'autre, celui où ce moment d'inertie eſt plus petit, tournera plus promtement, étant ſollicité par les mêmes forces, & obéïra plus vîte à l'action du gouvernail.

24. On compte parmi les bonnes qualités d'un vaiſſeau, lorſqu'il obéit promptement à l'action du gouvernail, & l'on tâche de lui procurer cette bonne qualité par une avantageuſe conſtruction & une figure propre à ce deſſein. Mais, le vaiſſeau étant déjà conſtruit, l'arrimage nous fournit encore un excellent moyen de porter cette bonne qualité à un plus haut degré. Il s'agit d'arranger les fardeaux, en ſorte que le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical en ſoit diminué autant qu'il eſt poſſible, ſans pourtant que le centre de gravité du vaiſſeau entier en ſoit altéré. Il eſt clair qu'on remplit cette condition, lorſqu'on approche, autant que les autres circonſtances le permettent, tous les fardeaux vers l'axe vertical, qui paſſe par le centre de gravité du vaiſſeau. Et, puiſque le moment d'inertie dépend du quarré des diſtances, l'avantage en pourra devenir aſſez conſidérable.

25. Concevons un fardeau, dont le poids $= A$, qui ſoit éloigné de l'axe vertical de la diſtance $= a$, & qu'on l'y approche de l'intervalle $= b$, de ſorte que ſa diſtance à préſent $= a - b$. Puiſque, auparavant, le produit $A a a$ entroit dans l'expreſſion du moment d'inertie, & qu'à préſent, ce produit eſt $= A (a - b)^2$, on voit que, par ce changement, le moment d'inertie ſera diminué de la quantité $= A (2ab - bb) = Ab.(2a - b)$. Or, par le tranſport de ce fardeau, le centre de gravité du vaiſſeau G ſouffrira quelque déplacement; mais on n'aura qu'à tranſporter auſſi de l'autre

côté

côté, un fardeau d'une manière ſemblable, pour rétablir le centre de gravité dans ſon juſte lieu; & par ce moyen, on obtiendra une double diminution du mouvement d'inertie.

26. Il faut donc changer à la fois la place de deux ou pluſieurs fardeaux, en ſorte que leur commun centre de gravité demeure au même lieu, afin que le centre de gravité du vaiſſeau tout entier n'en ſoit point altéré. Soient $A, B, C, D, \&c.$ les poids de ces fardeaux; qu'avant le changement, leurs diſtances à l'axe vertical ſoient $a, b, c, d, \&c$; & après le changement $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \&c.$ Cela poſé, le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical ſera diminué de la quantité $A(a^2-\alpha^2)+B(b^2-\beta^2)+C(c^2-\gamma^2)+D(d^2-\delta^2)+\&c.$ Or, en faiſant le calcul ſelon les règles connues pour la détermination du centre de gravité, on trouve que cette diminution du moment d'inertie devient la plus grande, lorſqu'on approche ces corps autant entre eux qu'il eſt poſſible; & s'il étoit poſſible de les réduire dans un ſeul point, c'eſt-à-dire dans leur commun centre de gravité, on obtiendroit le plus petit moment d'inertie, qui s'évanouïroit même, ſi toute la maſſe du vaiſſeau étoit réunie dans ſon centre de gravité.

27. La raiſon de cela eſt fondée ſur la règle aſſez connue que les auteurs cités ci-deſſus ont donnée, pour trouver le moment d'inertie de pluſieurs corps par rapport à un axe quelconque. Cette règle porte qu'ayant tiré par le commun centre de gravité de ces corps une ligne parallèle à l'axe propoſé, on cherche leur moment d'inertie à l'égard de cette ligne, en multipliant chaque corps par le quarré de ſa diſtance à cette ligne; & qu'à ce produit, il faut encore ajouter le produit de la ſomme de tous les corps multipliée par le quarré de la diſtance entre le commun centre de gravité des corps & l'axe propoſé. Donc,

ſi ces corps changent de place, en ſorte que leur commun centre de gravité demeure au même point, leur moment d'inertie par rapport à l'axe vertical du vaiſſeau en ſouffrira préciſément le même changement que leur moment d'inertie, pris à l'égard de la ligne verticale tirée par leur commun centre de gravité.

28. Donc, conſidérant deux fardeaux quelconques dans le vaiſſeau, dont il eſt permis de changer la ſituation, le moment d'inertie du vaiſſeau par rapport à ſon axe vertical en ſouffrira la même augmentation ou diminution que le moment d'inertie de ces deux corps, ſeulement par rapport à la ligne verticale tirée par leur commun centre de gravité. La diminution donc que nous avons ici en vue, dépend non ſeulement de ce qu'on approche ces deux corps de leur commun centre de gravité, mais auſſi de leur poſition à l'égard de la ligne verticale. Si ces deux corps ſe trouvoient dans la même ligne verticale, leur moment d'inertie par rapport à cette ligne ſeroit nul, & partant, incapable de recevoir aucune diminution, quoiqu'on approchât ces deux corps tout-à-fait enſemble. Ainſi, deux fardeaux ſitués dans une ligne verticale, ne ſçauroient ſervir à diminuer le moment d'inertie du vaiſſeau, par rapport à ſon axe vertical.

29. De-là, il s'enſuit que le moyen le plus propre pour diminuer le moment d'inertie d'un vaiſſeau, à l'égard de ſon axe vertical, c'eſt de choiſir des fardeaux ſitués dans un même plan horiſontal, & de les rapprocher entr'eux dans ce même plan, autant que les autres circonſtances le permettent, en ſorte pourtant que leur commun centre de gravité ne ſouffre aucune altération. Et il eſt clair que, plus ces fardeaux ſont peſants & plus on les pourra rapprocher, plus auſſi ſera grande la diminution du moment d'inertie du vaiſſeau par rapport à ſon axe vertical. Par

ce moyen, lorſqu'on l'exécute dans tous les plans horiſontaux, & qu'on y rapproche enſemble tous les fardeaux, autant qu'il eſt poſſible, on procurera aux vaiſſeaux la qualité d'obéir à l'action du gouvernail, dans le plus haut degré dont ils ſont ſuſceptibles par rapport à l'arrimage. Cependant, il faut bien que la conſtruction même du vaiſſeau concoure principalement à ce but; car ſi le vaiſſeau a déjà par ſa conſtruction le défaut qu'il ne ſe laiſſe pas diriger par le gouvernail, on ne ſçauroit prétendre de le corriger par l'arrimage, quoiqu'on puiſſe diminuer ce défaut par ce moyen.

III.

Des avantages qu'on peut retirer, en changeant le moment d'inertie du vaiſſeau par rapport aux axes horiſontaux.

30 La queſtion aboutit au même, à l'égard de tous les axes horiſontaux; & partant, pour fixer mes recherches, j'aurai en vue l'axe horiſontal tiré ſelon la longueur du vaiſſeau. Or le moment d'inertie, par rapport à cet axe, n'entre en conſidération qu'entant que le vaiſſeau ſe meut, en tournant autour de cet axe: ce mouvement eſt connu ſous le nom de *roulis*; de ſorte que le mouvement du roulis dépend du mouvement d'inertie du vaiſſeau par rapport à l'axe tiré ſelon la longueur. Je ne parle pas ici ni des forces, qui inclinent le vaiſſeau autour de cet axe, ni de la force qui tend à le rétablir dans ſa ſituation naturelle, & qui ſe trouve dans la ſtabilité du vaiſſeau qu'il eſt bon d'augmenter autant qu'il eſt poſſible, comme j'ai remarqué ci-deſſus. Mais ici, quelles que ſoient ces forces, il ne s'agit que du mouvement & de ſa modification, en tant qu'il dépend du moment d'inertie à l'égard de l'axe horiſontal tiré ſelon la longueur du vaiſſeau.

31. L'accélération du mouvement de roulis étant en raiſon compoſée de l'inclinaiſon du vaiſſeau, de la ſtabilité, & réciproquement du moment d'inertie, qui entre ici en conſidération, on voit que le roulis doit être d'autant plus rapide, que ce moment d'inertie ſera plus petit, la ſtabilité du vaiſſeau demeurant la même. Donc, ſi l'on veut calmer la rapidité de ce mouvement, il faut tâcher de groſſir ledit moment d'inertie, autant qu'il eſt poſſible. Or, on compte parmi les bonnes qualités d'un vaiſſeau, que ſon mouvement de roulis, de même que celui de tangage, ne ſoit pas impétueux ou trop violent; & partant, il ſera toujours fort avantageux d'augmenter autant qu'il eſt poſſible les momens d'inertie du vaiſſeau par rapport à tous les axes horiſontaux. Donc, puiſqu'on ſçait que tous ces momens ſont déterminés par les deux, qui ſe rapportent à l'axe de longueur & à celui de largeur, cette augmentation ſe réduit aux deux momens d'inertie par rapport aux axes tirés ſelon la longueur & la largeur du vaiſſeau.

32. Voyons donc quels changemens faits dans l'arrimage du vaiſſeau ſont les plus efficaces pour ce deſſein. Or, par ce que je viens de démontrer par rapport au mouvement autour de l'axe vertical, il eſt clair que, pour augmenter le plus efficacement le moment d'inertie par rapport à un axe horiſontal quelconque, il faut choiſir des fardeaux ſitués dans un plan vertical perpendiculaire à cet axe, & les éloigner dans le même plan chacun des autres, ou bien chacun de leur commun centre de gravité, autant qu'il eſt poſſible, ſans pourtant changer le lieu de leur commun centre de gravité. De cette manière, le moment d'inertie en queſtion ſera augmenté d'une quantité qu'on trouvera de cette ſorte. Soient $A, B, C,$ les poids des fardeaux qu'on aura éloignés de leur commun centre de gravité; & $a, b, c,$ leurs diſtances de ce centre au

commencement. Or, après les changemens, leurs distances soient $a + \alpha$, $b + \beta$, $c + \gamma$; & l'augmentation du moment d'inertie sera $A\alpha(2a + \alpha) + B\beta(2b + \beta) + C\gamma(2c + \gamma)$. D'où l'on voit que cette augmentation pourroit bien devenir assez considérable.

33. Un tel changement peut être exécuté à l'égard de tous les axes horisontaux du vaisseau; mais ordinairement, il n'y en a qu'un seul, autour duquel on voudroit que les agitations devinssent moins impétueuses. C'est communément le tangage, qui, par sa violence, est le plus funeste à la navigation, & qu'il est bon d'adoucir autant qu'il est possible; car, puisque la stabilité du vaisseau est la plus grande par rapport à son axe de largeur, les forces qui rétablissent le vaisseau lorsqu'il est incliné autour de cet axe, sont les plus grandes, & produisent par conséquent une grande rapidité dans le mouvement, à moins que le moment d'inertie par rapport à cet axe ne soit très-grand. Par cette raison, puisqu'il n'est pas à propos de diminuer la stabilité du vaisseau à l'égard de cet axe, il ne reste que l'arrimage, qui puisse servir à adoucir le tangage. Pour cet effet, il faut tâcher d'éloigner tous les fardeaux autant qu'il est possible, de l'axe horisontal tiré selon la largeur du vaisseau, ou bien d'appliquer en particulier à cet axe la règle que je viens de prescrire pour tous les axes horisontaux en général.

34. Donc, en tant que l'arrimage d'un vaisseau, après avoir réduit le centre de gravité dans la ligne droite prescrite, & l'avoir abbaissé autant qu'il est possible, est encore susceptible de quelque changement, on aura à observer les deux règles suivantes.

La première exige qu'on rapproche, autant qu'il est possible, tous les fardeaux vers l'axe vertical du vaisseau tiré par son centre de gravité.

La ſeconde, exige qu'on éloigne, autant qu'il eſt poſſible, tous les fardeaux de l'axe horiſontal tiré par le centre de gravité, ſelon la largeur du vaiſſeau.

La première règle ſert à procurer au vaiſſeau la qualité d'obeir plus aiſément à l'action du gouvernail, & l'autre à tranquilliſer les agitations cauſées par le tangage; & ce ſont les ſeuls objets, ſur leſquels l'arrimage a quelque influence.

35. Or, ces deux règles peuvent quelquefois devenir contraires; de ſorte qu'en ſatisfaiſant à l'une, on s'écarte de l'autre. Donc, pour faire voir comment on peut ſatisfaire à toutes les deux à la fois, autant qu'il eſt poſſible, ſoit G le centre de gravité
Fig. 3. du vaiſſeau, AB ſon axe horiſontal tiré ſelon la longueur, CD l'autre axe horiſontal tiré ſelon la largeur, & EF l'axe vertical. Que Z ſoit un fardeau quelconque, dont le lieu ſoit déterminé par les trois coordonnées $GX = x$; $XY = y$ & $YZ = z$ parallèles aux axes indiqués. Maintenant, pour le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical EF, le fardeau Z fournit la partie $Z\,(xx + yy)$; & pour le moment d'inertie par rapport à l'axe horiſontal de largeur CD, ce même fardeau fournit la partie $Z\,(xx + zz)$. Il s'agit donc de diſpoſer les fardeaux, en ſorte que la ſomme de toutes les formules $Z\,(xx + yy)$ devienne la plus petite, & la ſomme des formules $Z\,(xx + zz)$ la plus grande.

36. De-là, il eſt évident qu'il eſt poſſible de remplir ces deux conditions à la fois, en diminuant pour chaque fardeau Z la diſtance $XY = y$, autant qu'on peut, & en augmentant en même temps la diſtance $YZ = z$ autant qu'on peut, ſans changer la diſtance $GX = x$. Or y marque la diſtance du fardeau au plan vertical, qui paſſe ſelon la longueur du vaiſſeau par ſon centre de gravité; & puiſqu'il partage le vaiſſeau en deux parties égales & ſemblables, on le peut

nommer la ſection diamétrale. Pour la quantité z, elle exprime la diſtance du fardeau au plan horiſontal du vaiſſeau tiré par ſon centre de gravité, d'où nous tirons pour l'arrimage les deux règles ſuivantes.

1°. *Il faut approcher autant qu'il eſt poſſible tous les fardeaux vers la ſection verticale & diamétrale du vaiſſeau.*

2°. *Il faut éloigner, autant qu'il eſt poſſible, tous les fardeaux de la ſection horiſontale du vaiſſeau tirée par ſon centre de gravité.*

Or, ces changemens doivent toujours être faits en deux ou pluſieurs fardeaux à la fois, en obſervant la règle générale que leur commun centre de gravité n'en ſouffre aucune altération. Auſſi, faut-il prendre garde de ne pas tranſporter les fardeaux, ni plus en avant, ni plus en arrière du vaiſſeau, afin que la quantité x demeure la même.

CONCLUSION.

37. Voilà donc à quoi ſe réduiſent les avantages qu'on peut retirer de l'arrimage des vaiſſeaux, dont la détermination, après les découvertes qu'on a faites dans cette ſcience, ne demandoit plus des recherches fort profondes. Mais, ſi l'on vouloit pouſſer la queſtion plus loin, & déterminer exactement toutes les agitations dont les vaiſſeaux ſont ſuſceptibles, cette recherche ſeroit non ſeulement très-profonde, mais les principes connus de méchanique y ſuffiroient à peine, quoiqu'il ſoit permis de regarder les vaiſſeaux comme des corps ſolides qui, pendant le mouvement, ne ſouffrent aucun changement, ni dans leur figure, ni dans l'arrangement de leurs parties. Or, de ces corps, la théorie même de leur mouvement n'eſt pas encore aſſez développée, à l'égard de tous les mouvemens de rotation dont ils ſont ſuſceptibles. Comme cette matière eſt étroitement liée avec la queſtion

propoſée, je me crois obligé d'ajouter ſur ce ſujet quelques réflexions, qui pourroient devenir, avec le temps, aſſez intéreſſantes.

38. Pour qu'un corps ſolide puiſſe tourner librement autour d'un axe, ſans qu'il ait beſoin d'être ſoutenu, il ne ſuffit pas que cet axe paſſe par le centre de gravité du corps, il faut, outre cela, que toutes les forces centrifuges, qui réſultent du mouvement de tous les élémens du corps ſe détruiſent parfaitement. Je nommerai un tel axe, autour duquel un corps peut librement tourner, ſans qu'il ait beſoin d'être ſoutenu, je le nommerai, à cauſe de ſa grande préférence méchanique, à l'égard de tous les autres, *l'axe principal* du corps. Je ferai voir d'abord que tous les corps ſont non ſeulement doués d'un tel axe, mais qu'ils en ont toujours au moins trois, qui ſont perpendiculaires entre eux, dont je détermine la poſition de la manière ſuivante.

FIG. 3. 39. Soit G le centre de gravité du corps propoſé, ſa maſſe $= M$. Qu'on conſidère en Z un élément infiniment petit du corps dont la maſſe ſoit $= dM$, & qu'on détermine ſon lieu, à l'égard de trois axes GA, GC, GE, pris à volonté, mais perpendiculaires entr'eux, & tirés par le centre de gravité G du corps. Qu'on poſe enſuite les trois coordonnées parallèles aux trois axes $ZY = z$; $YX = y$ & $XG = x$ & ſoit enfin la diſtance de l'élément au centre de gravité $GZ = V$ $(xx + yy + zz) = v$; or G étant le centre de gravité, les trois quantités intégrales $\int x\,dM$, $\int v\,dM$, $\int z\,dM$ étant étendues par tout le corps, doivent s'évanouir. Soit maintenant GJ un axe quelconque, autour duquel le corps tourne actuellement, & qui paſſe auſſi par le centre de gravité G: qu'on détermine ſa poſition par les angles de ſon inclinaiſon aux trois axes fixes GA, GC, GE, qui ſoient $JGA = \alpha$, $JGC = \beta$, $JGE = \gamma$ & qu'enfin la

la vîteſſe angulaire du corps autour de cet axe GJ ſoit $\varkappa$; ou bien que cette lettre $\varkappa$ exprime l'angle parcouru par le mouvement de rotation dans un temps donné, par exemple dans une ſeconde.

40. Maintenant, pour que la droite GJ ſoit un axe principal du corps, il faut que les forces centrifuges à l'égard d'elle, ſe détruiſent, la vîteſſe angulaire $\varkappa$ avec la ſituation de l'axe GJ ou les angles α, β, γ demeurant invariables : c'eſt-à-dire, il faut que le mouvement de rotation ſe conſerve ſoi-même, ſans que ſon axe ait beſoin d'être ſoutenu. Pour cet effet, on n'a qu'à chercher en général les forces requiſes pour la conſervation du mouvement, leſquelles étant enſuite égalées à zéro, donneront la poſition de l'axe principal.

41. Qu'on conſidère donc le mouvement de la particule élémentaire dM en Z, & qu'on le décompoſe ſelon les trois directions Za, Zc, Ze parallèles aux trois axes fixes GA, GC, GE, les principes de méchanique donneront d'abord pour chacun d'eux, en tant qu'il n'eſt pas uniforme, les forces requiſes pour leur accélération. Pour faciliter cette décompoſition, & pour la mettre dans ſon plus grand jour, qu'on réduiſe toute la recherche à la trigonométrie ſphérique. Qu'on ſe repréſente donc une ſphère décrite autour du centre de gravité G, avec le rayon $GZ = \nu$, & ſoient A, C, E, les veſtiges des trois axes fixes ſur la ſurface de la ſphère, les arcs AC, CE, EA, ſeront donc des quarts de grands cercles ; enſuite que l'axe de rotation GJ paſſe par le point J, & que la maſſe élémentaire dM ſe trouve en Z. Cela poſé, qu'on tire les arcs de grands cercles JA, JC, JE & ZA, ZC, ZE ; on auroit, ſi le rayon de la ſphère étoit $= 1$; $JA = \alpha$; $JC = \beta$; $JE = \gamma$: enſuite $\cos.ZA = \frac{x}{\nu}$; $\cos.ZC = \frac{y}{\nu}$: $\cos.ZE = \frac{z}{\nu}$ FIG 4.

& partant, $cof. ZA^2 + cof. ZC^2 + cof. ZE^2 = 1$ à cauſe de $xx + yy + zz = vv$; on aura auſſi par la même raiſon $cof. JA^2 + cof. JC^2 + cof. JE^2 = 1$; & puiſque le rayon de la ſphère eſt $= v$, on n'aura qu'à multiplier enſuite tous les arcs par v.

42. Or, l'élément Z ſe mouvant autour de l'axe GJ avec une vîteſſe angulaire $= \omega$, en tirant l'arc JZ à cauſe de la diſtance du point Z à l'axe de rotation $= v \ ſin. JZ$ la même vîteſſe ſera $= \omega v \ ſin. JZ$, & ſa direction $Z\zeta$ perpendiculaire à JZ ſera dans la ſurface de la ſphère. Maintenant, pour décompoſer cette vîteſſe ſelon des directions parallèles aux trois axes fixes, on n'a qu'à rechercher ſous quel angle cette direction $Z\zeta$ eſt inclinée à chacun de ces trois axes; qu'on prolonge pour cet effet $Z\zeta$ en arc de grand cercle, juſqu'à ce que l'arc Z devienne un quart de cercle, & la droite tirée alors du centre de la ſphère G au terme V, étant parallèle à la direction $Z\zeta$, ſon inclination aux trois axes ſera meſurée par les arcs de grands cercles VA, VC, VE; & partant, cette décompoſition nous fournira les vîteſſes ſelon $Za = \omega v \ ſin. JZ \ cof. VA$, ſelon $Zc = \omega v \ ſin. JZ \ cof. VC$, ſelon $Ze = \omega v \ ſin. JZ \ cof. VE$. Fig. 3. & 4.

43. L'arc VZ étant un quart de cercle perpendiculaire à ZJ, l'arc VJ ſera de même un quart de cercle & perpendiculaire à JZ, d'où le triangle ſphérique AJV donnera $cof. AV = cof. AJV \ ſin. JA = ſin. AJZ \ ſin. JA$, & comme de la même manière les triangles CJV, EJV fourniſſent $cof. CV = - ſin. CJZ \ ſin. JC$; $cof. EV = ſin. EJZ \ ſin. JE$, la conſidération du point V s'en allant du calcul, on trouvera les vîteſſes (*fig.* 3). . . . . .

ſelon $Za = + \omega v \ ſin. JZ \ ſin. JA \ ſin. AJZ$,

ſelon $Zc = - \omega v \ ſin. JZ \ ſin. JC \ ſin. CJZ$;

ſelon $Ze = + \omega v \ ſin. JZ \ ſin. JE \ ſin. EJZ$;

mais la considération du triangle sphérique AJZ donne $sin.\ JZ\ sin.\ AJZ = sin.\ AZ\ sin.\ ZAJ$; & comme il en est de même des autres CJZ, EJZ, nous aurons les vîtesses . . . . . .

selon $Za = + s\,v\ sin.\ JA\ sin.\ ZA\ sin.\ ZAJ$;

selon $Zc = - s\,v\ sin.\ JC\ sin.\ ZC\ sin.\ ZCJ$;

selon $Ze = + s\,v\ sin.\ JE\ sin.\ ZE\ sin.\ ZEJ$.

44. Les arcs AC, AE, CE étant des quarts de cercle, & les angles A, C, E droits, on aura $cos.\ EAJ = sin.\ CAJ = \frac{cos.\ EJ}{sin.\ AJ}$; $cos.\ CAJ = sin.\ EAJ = \frac{cos.\ CJ}{sin.\ AJ}$; $cos.\ EAZ = sin.\ CAZ = \frac{cos.\ EZ}{sin.\ AZ}$; $cos.\ CAZ = sin.\ EAZ = \frac{cos.\ CZ}{sin.\ AZ}$: de-là $sin.\ ZAJ = sin.\ (EAJ - EAZ) = \frac{cos.\ CJ\ cos.\ EZ - cos.\ EJ\ cos.\ CZ}{sin.\ AJ\ sin.\ AZ}$ & par la même raison $sin.\ ZCJ = sin.\ (ECJ - ECZ) = \frac{cos.\ AJ\ cos.\ EZ - cos.\ EJ\ cos.\ AZ}{sin.\ CJ\ sin.\ CZ}$: $sin.\ ZEJ = sin.\ (CEJ - CEZ) = \frac{cos.\ AJ\ cos.\ CZ - cos.\ CJ\ cos.\ AZ}{sin.\ EJ\ sin.\ EZ}$.

45. Lorsqu'on substitue ces valeurs dans les formules trouvées pour les vîtesses (43), il arrive très à propos que les dénominateurs s'en vont, & les *cosinus* qui restent encore, pouvant être exprimés par les lettres x, y, z, α, ζ, γ, on obtiendra la vîtesse $Za = s\,(z\ cos.\ b - y\ cos.\ \gamma)$; la vîtesse $Zc = s\,(x\ cos.\ \gamma - z\ cos.\ \alpha)$ & la vîtesse $Ze = s\,(y\ cos.\ \alpha - x\ cos.\ \zeta)$. De-là, on pourroit aussi assigner la valeur de l'arc JZ, dont j'aurai besoin dans la suite : car le triangle JAZ donnant $cos.\ JZ = cos.\ JAZ\ sin.\ AJ\ sin.\ AZ + cos.\ AJ\ cos.\ AZ$, à cause de $cos.\ JAZ = cos.\ (EAJ - EAZ) = \frac{cos.\ EJ\ cos.\ EZ + cos.\ CJ\ cos.\ CZ}{sin.\ AJ\ sin.\ AZ}$ (44), l'on obtiendra $cos.\ JZ = cos.\ AJ\ cos.\ AZ + cos.\ CJ\ cos.\ CZ + cos.\ EJ\ cos.\ EZ$; & partant $cos.\ JZ = \frac{x\,cos.\ \alpha + y\,cos.\ \zeta + z\,cos.\ \gamma}{v}$.

46. Ayant trouvé les viteſſes ſelon les directions fixes GA, GC, GE (*fig.* 3), on en peut aſſigner les eſpaces dx, dy, dz, par leſquels l'élément dM qui, à préſent, eſt en Z, ſera emporté dans le temps infiniment petit dt, ſçavoir $dx = \varepsilon\, dt\,(z\,cos.\,\zeta - y\,cos.\,\gamma)$; $dy = \varepsilon\, dt\,(x\,cos.\,\gamma - z\,cos.\,\alpha)$; $dz = \varepsilon\, dt\,(y\,cos.\,\alpha - x\,cos.\,\beta)$ (45), leſquelles formules nous mettent en état de trouver les accroiſſemens de chacune de ces trois viteſſes; car en prenant les quantités ε, α, β, γ, pour conſtantes, & écrivant pour dx, dy, dz, les valeurs que nous venons de marquer, nous obtiendrons :

$$d.\,vit.Za = \varepsilon(dz\,cos.\zeta - dy\,cos.\gamma) = \varepsilon\varepsilon dt\,(y\,cos.\alpha\,cos.\zeta + z\,cos.\alpha\,cos.\gamma - x\,cos.\zeta^2 - x\,cos.\gamma^2)$$
$$d.\,vit.Zc = \varepsilon(dx\,cos.\gamma - dz\,cos.\alpha) = \varepsilon\varepsilon dt\,(z\,cos.\zeta\,cos.\gamma + x\,cos.\alpha\,cos.\zeta - y\,cos.\gamma^2 - y\,cos.\alpha^2)$$
$$d.\,vit.Ze = \varepsilon(dy\,cos.\alpha - dx\,cos.\zeta) = \varepsilon\varepsilon dt\,(x\,cos.\alpha\,cos.\gamma + y\,cos.\zeta\,cos.\gamma - z\,cos.\alpha^2 - z\,cos.\zeta^2)$$

47. Les accélérations demandent de certaines forces pour leur production qu'il n'eſt pas difficile de déterminer par les premiers principes de méchanique, en vertu deſquels, on trouve que l'élément dM en Z doit être ſollicité par les trois forces ſuivantes : 1°., ſelon $Za = \frac{\varepsilon\varepsilon\, dM}{2g}(y\,cos.\alpha\,cos.\zeta + z\,cos.\alpha\,cos.\gamma - x\,cos.\zeta^2 - x\,cos.\gamma^2)$; 2°., ſelon $Zc = \frac{\varepsilon\varepsilon\, dM}{2g}(z\,cos.\zeta\,cos.\gamma + x\,cos.\alpha\,cos.\zeta - y\,cos.\gamma^2 - y\,cos.\alpha^2)$; 3°., ſelon $Ze = \frac{\varepsilon\varepsilon\, dM}{2g}(x\,cos.\alpha\,cos.\gamma + y\,cos.\zeta\,cos.\gamma - z\,cos.\alpha^2 - z\,cos.\zeta^2)$, où j'ai introduit la lettre g, pour marquer la hauteur de la chûte d'un corps grave dans une ſeconde : or, je ſuppoſe qu'on exprime les maſſes & les forces par des poids, & les viteſſes par des eſpaces parcourus dans une ſeconde, pour ramener d'autant plus facilement toutes les déterminations à des meſures abſolues.

48. Ici, il ne s'agit pas tant de ces forces abſolues que de leurs momens à l'égard de nos trois axes fixes GA, GC, GE : or, le moment de ces trois forces élémentaires à l'égard de l'axe GA, eſt *force* Zc. YZ

$-$ *force* $Ze.ZY = \frac{\varpi\varpi dM}{2g}((\zeta\zeta - yy)\cos.\mathfrak{C}\cos.\gamma + x\zeta\cos.\alpha\cos.\mathfrak{C} - y\zeta(\cos.\gamma^2 - \cos.\mathfrak{C}^2) - xy\cos.\alpha\cos.\gamma)$: de la même manière, le moment de ces forces à l'égard de l'axe GC eſt *force* $Ze.GX - $ *force* $Za.YZ = \frac{\varpi\varpi dM}{2g}((xx - \zeta\zeta)\cos.\alpha\cos.\gamma + xy\cos.\mathfrak{C}\cos.\gamma - x\zeta(\cos.\alpha^2 - \cos.\gamma^2) - y\zeta\cos.\alpha\cos.\mathfrak{C})$; & enfin, le moment des forces par rapport à l'axe GE eſt *force* $Za.XY - $ *force* $Zc.GX = \frac{\varpi\varpi dM}{2g}((yy - xx)\cos.\alpha\cos.\mathfrak{C} + y\zeta\cos.\alpha\cos.\gamma - xy(\cos.\mathfrak{C}^2 - \cos.\alpha^2) - x\zeta\cos.\mathfrak{C}\cos.\gamma)$.

49. Tout revient donc à trouver les intégrales de ces expreſſions ; & puiſque ϖ, α, $\mathfrak{C}$, γ, ſont conſtantes, les intégrales de ces trois expreſſions impliquent les ſix formules intégrales ſuivantes $\int xx\,dM$, $\int yy\,dM$, $\int \zeta\zeta\,dM$, $\int xy\,dM$, $\int x\zeta\,dM$, $\int y\zeta\,dM$, qui s'étendent ſur toute la maſſe du corps propoſé ; & comme elles ne dépendent que de la ſeule qualité du corps, on les pourra regarder comme connues. Nommons donc $\int xx dM = A$; $\int yy dM = B$; $\int \zeta\zeta dM = C$; $\int y\zeta dM = D$; $\int x\zeta dM = E$; $\int xy dM = F$; & nous aurons les momens ſuivans, qui ſont requis pour le maintien du mouvement de rotation autour de l'axe GJ.

1°. A l'égard de l'axe $GA = \frac{\varpi\varpi}{2g}((C - B)\cos.\mathfrak{C}\cos.\gamma + E\cos.\alpha\cos.\mathfrak{C} - F\cos.\alpha\cos.\gamma - D\cos.\gamma^2 + D\cos.\mathfrak{C}^2)$

2°. A l'égard de l'axe $GC = \frac{\varpi\varpi}{2g}((A - C)\cos.\alpha\cos.\gamma + F\cos.\mathfrak{C}\cos.\gamma - D\cos.\alpha\cos.\mathfrak{C} - E\cos.\alpha^2 + E\cos.\gamma^2)$

3°. A l'égard de l'axe $GE = \frac{\varpi\varpi}{2g}((B - A)\cos.\alpha\cos.\mathfrak{C} + D\cos.\alpha\cos.\gamma - E\cos.\mathfrak{C}\cos.\gamma - F\cos.\mathfrak{C}^2 + F\cos.\alpha^2)$

50. Maintenant, nous n'avons qu'à faire évanouir ces trois expreſſions pour avoir les conditions d'un axe principal, dont la poſition ſera par conſéquent

déterminée par les trois équations suivantes

$$(C-B)\cos.\alpha\cos.\beta+E\cos.\alpha\cos.\delta-F\cos.\alpha\cos.\gamma-D\cos.\gamma^2+D\cos.\delta^2=0$$
$$(A-C)\cos.\alpha\cos.\gamma+F\cos.\beta\cos.\gamma-D\cos.\alpha\cos.\beta-E\cos.\alpha^2+E\cos.\gamma^2=0$$
$$(B-A)\cos.\alpha\cos.\beta+D\cos.\alpha\cos.\gamma-E\cos.\beta\cos.\gamma-F\cos.\beta^2+F\cos.\alpha^2=0$$

où il faut remarquer que deux de ces équations contiennent déjà la troisième, puisque la somme de la première multipliée par $\cos.\alpha$, celle de la seconde par $\cos.\beta$ & celle de la troisième par $\cos.\gamma$, s'évanouissent, il suffira donc de n'en prendre que deux, & d'y ajouter celle-ci $\cos.\alpha^2+\cos.\beta^2+\cos.\gamma^2=1$.

51. Il ne nous reste donc pour la détermination des axes principaux qu'à déterminer les valeurs des trois angles α, β, γ, par le moyen de ces trois équations trouvées. Pour en faciliter le calcul, soient les angles $AGF=\zeta$, $FGJ=\eta$; & posant $GJ=1$, nous aurons $JF=\sin.\eta$; $GF=\cos.\eta$; $AF=\sin.\zeta\cos.\eta$; $GA=\cos.\zeta\cos.\eta$; & partant, $\cos.\alpha=\cos.\zeta\cos.\eta$; $\cos.\beta=\sin.\zeta\cos.\eta$; $\cos.\gamma=\sin.\eta$. Ces valeurs, qui renferment déjà l'égalité $\cos.\alpha^2+\cos.\beta^2+\cos.\gamma^2=1$, réduiront les équations trouvées dans les formes suivantes.

$$(C-B)\sin.\zeta^2\cos.\eta^2+E\sin.\zeta\cos.\zeta\cos.\eta^2-F\cos.\zeta\sin.\eta\cos.\eta-D\sin.\eta^2+D\sin.\zeta^2\cos.\eta^2=0$$
$$(A-C)\cos.\zeta^2\cos.\eta^2+F\sin.\zeta\cos.\zeta\cos.\eta^2-D\sin.\zeta\cos.\zeta\cos.\eta^2-E\cos.\zeta^2\cos.\eta^2+E\sin.\eta^2=0$$
$$(B-A)\sin.\zeta\cos.\zeta\cos.\eta^2+D\sin.\eta\cos.\eta-E\sin.\zeta\sin.\eta\cos.\eta-F\sin.\zeta^2\cos.\eta^2+F\cos.\zeta^2\cos.\eta^2=0$$

dont la troisième, divisée par $\cos.\eta^2$ donne $\frac{\sin.\eta}{\cos.\eta}=tang.\eta=\frac{(B-A)\sin.\zeta\cos.\zeta-F(\sin.\zeta^2+F\cos.\zeta^2}{E\sin.\zeta-D\cos.\zeta}$. Or, la première multipliée par $\sin.\zeta$, moins la seconde multipliée par $\cos.\zeta$, à cause de $\sin.\eta\cos.\eta=\frac{1}{2}\sin.2\eta\cos.\eta^2-\sin.\eta^3=\cos.2\eta$ donne, après avoir divisé par $\cos.2\eta$, cette égalité:

$$\frac{\sin.2\eta}{\cos.2\eta}=tang.2\eta=\frac{2(E\cos.\zeta+D\sin.\zeta)}{2F\sin.\zeta\cos.\zeta+A\cos.\zeta^2+B\sin.\zeta^2-C}$$

deſorte que, ſi l'angle ζ étoit connu, l'angle φ en pourroit être tiré d'une double manière.

52. Or, puiſque $tang.\ 2\varphi = \frac{2\,tang.\,\varphi}{1-tang.\,\varphi^2}$, ou bien $2\ cof.\ 2\varphi = \frac{1}{tang.\,\varphi} - tang.\,\varphi$, on aura en ſubſtituant

$$\frac{2F\,ſin.\,\zeta\,cof.\,\zeta + A\,cof.\,\zeta^2 + B\,ſin.\,\zeta^2 - C}{E\,cof.\,\zeta + D\,ſin.\,\zeta} = \frac{E\,ſin.\,\zeta - D\,cof.\,\zeta}{(B-A)\,ſin.\,\zeta\,cof.\,\zeta + F(cof.\,\zeta^2 - ſin.\,\zeta^2)}$$

$$= \frac{(B-A)\,ſin.\,\zeta\,cof.\,\zeta - F(cof.\,\zeta^2 - ſin.\,\zeta^2)}{E\,ſin.\,\zeta - D\,cof.\,\zeta}, \text{ \& en combinant}$$

le dernier membre avec le premier :

$$\frac{E\,ſin.\,\zeta - D\,cof.\,\zeta}{(B-A)\,ſin.\,\zeta\,cof.\,\zeta + F(cof.\,\zeta^2 - ſin.\,\zeta^2)} = \frac{(EF+CD-AD)cof.\,\zeta - (DE+CE-BE)ſin.\,\zeta}{(EE-DD)ſin.\,\zeta\,cof.\,\zeta - DE\,(cof.\,\zeta^2 - ſin.\,\zeta^2)};$$

enfin, en poſant $tang.\,\zeta = \theta$, nous aurons l'équation ſuivante :

$$\left.\begin{matrix} +D(FF-EE) \\ +EF(C-B) \end{matrix}\right\}\theta^3 + \left\{\begin{matrix} +E(2DD-EE-FF) \\ +DF(2A-B-C) \\ +E(A-B)(C-B) \end{matrix}\right\}\theta^2 + \left\{\begin{matrix} +D(2EE-DD-FF) \\ +FF(2B-A-C) \\ +D(B-A)(C-A) \end{matrix}\right\}\theta + \left\{\begin{matrix} +E(FF-DD) \\ +DF(C-A) \end{matrix}\right\} = 0$$

53. Cette équation étant cubique, aura infailliblement une racine réelle, & partant, de quelque figure & de quelque qualité que ſoit le corps propoſé, on y pourra toujours aſſigner un axe GJ, qui paſſe par le centre de gravité, & autour duquel le corps puiſſe tourner librement, ou bien on pourra toujours aſſigner au moins un axe principal, autour duquel toutes les forces centrifuges ſe détruiſent, & qui, pendant que le centre G reſte en repos, conſerve toujours la même ſituation, ſans qu'on ait beſoin de le ſoutenir : or auſſi, quand le corps a un mouvement progreſſif, l'axe GJ recevra le même mouvement, en demeurant toujours parallèle à ſoi même, & le corps pourſuivra le même mouvement de rotation, à moins que des forces étrangères ne l'en détournent. On voit encore par la même équation cubique que nous venons de trouver, qu'en général un corps quelconque ne ſçauroit avoir plus de trois axes principaux.

54. Or, pour nous assurer tant du nombre que de la position des axes principaux dans chaque corps, parce que nous sçavons qu'il y en a surement un, supposons que l'axe GA même soit déjà un axe principal, & cherchons les autres, en cas qu'il y en ait des réels. L'axe GJ étant donc supposé tomber en GA, on aura $\zeta = o$, $\eta = o$, & les formules du §. 51 donneront $E = o$, $F = o$, de sorte que l'axe GA, en tant qu'il est principal, demande les propriétés suivantes : $E = \int x z \, dM = o$; $F = \int x y \, dM = o$; & partant, supposant que GJ soit un autre axe principal déterminé par les angles ζ & η comme auparavant, nous aurons pour sa position 1°. $(C - B) \sin. \zeta \sin. \eta \cos. \eta - D \sin. \eta^2 + D \sin. \zeta^2 \cos. \eta^2 = o$. 2°. $(A - C) \cos. \zeta \sin. \eta \cos. \eta - D \sin. \zeta \cos. \zeta \cos. \eta^2 = o$. 3°. $(B - A) \sin. \zeta \cos. \zeta \cos. \eta^2 + D \cos. \zeta \sin. \eta \cos. \eta = o$.

55. Les deux dernières équations exigent ou $\cos. \zeta = o$, ou $\cos. \eta = o$: or la valeur $\cos. \eta = o$ ne satisfaisant pas à la première équation, à moins que D ne s'évanouisse, il faut s'en tenir à la première $\cos. \zeta = o$, ou $\zeta = 90°$. & la première équation donnera $(C - B) \sin. \eta \cos. \eta + D (\cos. \eta^2 - \sin. \eta^2) = o$, ou bien $(C - B) \sin. 2\eta + 2D \cos. 2\eta = o$; delà $\text{tang.}\ 2\eta = \frac{2D}{B - C}$ & partant on trouvera pour cet angle η une double valeur : car, en posant $\text{tang.}\ \eta = \tau$ on obtiendra $D\tau\tau = (C - B)\tau + D$ & enfin, $\tau = \frac{C - B \pm \sqrt{((C - B)^2 + 4DD)}}{2D}$; ces deux valeurs sont toujours réelles, & leur produit est $= -1$: donc, si on appelle ces deux angles η & η', à cause de $\text{tang.}\ \eta' = -\cos. \eta = \text{tang.}\ (\eta + 90°.)$, on aura $\eta' - \eta = 90°.$, c'est-à-dire que les deux autres axes principaux sont tant entre eux qu'avec le premier GA un angle droit.

56. C'est ainsi que nous venons de découvrir cette remarquable propriété, dont tous les corps, de quelque

que figure & de quelque nature qu'ils ſoient, ſont doués. Chaque corps, ſans exception, a toujours trois axes principaux, c'eſt-à-dire trois axes qui paſſent par le centre de gravité du corps, autour deſquels le corps peut librement tourner, ſans qu'on ait beſoin de les ſoutenir; & ces trois axes, comme nous venons de le trouver, ſont toujours perpendiculaires entre eux. Nous venons en même temps de donner la méthode comment ces axes principaux peuvent être trouvés, la figure & la nature du corps propoſé étant connue. En ſuppoſant donc que les trois axes fixes GA, GC, GE, pris à volonté, ſoient eux-mêmes les axes principaux du corps propoſé, à cauſe de $\nu = 0$ ou à zéro, ou à 90°, & $D = 0$, la propriété analytique de ces trois axes principaux demandera que les trois formules intégrales ſuivantes étendues par tout le corps s'évanouiſſent, ſçavoir que

$$\int yz\,dM = D = 0\,;\ \int xz\,DM = E = 0\,;\ \int xy\,dM = F = 0\,;$$

& réciproquement, toutes les fois que ces formules s'évanouiſſent, les axes orthogonaux GA, GC, GE, ſont en même temps principaux.

57. Cependant, quoique nous n'ayons trouvé en général que trois axes principaux en chaque corps, il y a des cas où leur nombre devient même infini: il en eſt à peu près comme de l'ellipſe en général qui, n'ayant que deux axes, en acquiert pourtant une infinité, dans le cas où elle devient un cercle, chaque diamètre pouvant être regardé comme ſon axe. De même, dans le cas préſent, la droite GA étant un axe principal, lorſqu'il arrive dans un corps que $D = 0$ & $B = C$, l'angle ν reſte indéterminé, d'où l'on conclut que tous les axes perpendiculaires à GA ſont principaux; & lorſqu'il arrive, outre cela, que $A = B = C$, les deux angles ζ & ν reſtant indéterminés, chaque droite paſ-

ſant par le centre de gravité G, ſera un axe principal. Ce dernier cas a lieu dans les corps ſphériques, compoſés d'une matière homogène, où tous les diamètres ſont, ſans contredit, des axes principaux; & dans les corps ſphéroïdiques, ſans compter l'axe de la figure, tous les diamètres ſeront encore des axes principaux : d'où il eſt clair que tous les corps ont toujours, pour le moins, trois axes principaux, mais qu'il y a pourtant des cas, où le nombre des axes devient infini.

58. Lors donc qu'un corps quelconque aura, au commencement, reçu un mouvement de rotation autour d'un axe principal, ce mouvement ſe conſervera toujours avec la même rapidité, & l'axe de rotation même, ou demeurera en repos, ou en ſe mouvant reſtera toujours parallèle à ſoi-même, à moins que des forces étrangères ne l'en détournent. Or, ſi le mouvement de rotation ne ſe faiſoit pas autour d'un axe principal, il ne ſçauroit ſubſiſter par lui-même, & il en réſulteroit des forces qui, en agiſſant ſur le corps, en troubleroient le mouvement, & changeroient l'axe autour duquel la rotation avoit commencé; & s'il ſurvenoit encore des forces externes, le mouvement entier du corps pourroit devenir très-irrégulier : cependant, tous les changemens dont il eſt ſuſceptible, peuvent être exprimés par des formules analytiques. D'abord, on peut toujours ſuppoſer le centre de gravité en repos, & alors tous les changemens ſe réduiſent à deux choſes, l'une regarde la vîteſſe angulaire avec laquelle le corps tourne à chaque inſtant, & l'autre eſt la variation de l'axe même de rotation.

Fig. 3. 59. Pour réſoudre ce problême, établiſſons les trois directions fixes GA, GC, GE, deſorte qu'elles conviennent avec les axes principaux du corps. On pourroit objecter que, puiſque les axes principaux ne ſont pas fixes, & qu'ils s'écartent de leurs pre-

mières directions dès le premier inſtant, la variation de l'axe de rotation n'y ſçauroit être rapportée, & qu'on la devroit plutôt rapporter à des directions fixes : mais, à la méthode dont je me ſervirai dans cette recherche, on s'appercevra aiſément que cette hypothèſe n'empêche point que les axes principaux ne ſoient mobiles en eux-mêmes. Au reſte, l'analyſe qui ſuit, diſſipera tous les doutes auxquels cette hypothèſe paroît aſſujettie.

60. Qu'on conſidère, comme ci-deſſus, un élément du corps dM au point Z ; & en gardant les mêmes dénominations (39), $GX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, $GZ = v$, la nature du centre de gravité G nous fournira ces intégrales $\int x\,dM = o$; $\int y\,dM = o$; $\int z\,dM = o$; enſuite la propriété des axes principaux donnera (52), $\int yz\,dM = D = o$; $\int xz\,dM = E = o$; $\int xy\,dM = F = o$. Outre cela, ſi nous introduiſons les momens d'inertie principaux, c'eſt-à-dire par rapport aux axes principaux du corps, & que nous ſuppoſions le moment d'inertie par rapport à l'axe $GA = Maa$, par rapport à l'axe $GC = Mbb$, & par rapport à l'axe $GE = Mcc$, à cauſe de $Maa = \int (yy + zz)\,dM$, $Mbb = (xx + zz)\,dM$, $Mcc = \int (xx + yy)\,dM$, nous aurons encore les intégrales indiquées ci-deſſus (47), par les lettres A, B, C ; $\int xx\,dM = A = \frac{1}{2} M\,(bb + cc - aa)$; $\int yy\,dM = B = \frac{1}{2} M\,(aa + cc - bb)$; $\int zz\,dM = C = \frac{1}{2} M\,(aa + bb - cc)$.

61. Que le corps tourne à préſent autour de l'axe GJ dans le ſens ACE avec la viteſſe angulaire $= \omega$, & que la poſition de cet axe ſoit déterminée comme ci-deſſus par les angles que l'axe de rotation fait avec les axes principaux $AGJ = \alpha$: $CGJ = \beta$: $EGJ = \gamma$.

de ſorte que $cof.\alpha^2 + cof.\zeta^2 + cof.\gamma^2 = 1$. Or, le mouvement de l'élément du corps dM en Z étant décompoſé ſelon des directions parallèles aux axes principaux, les trois vîteſſes ſelon ces directions Za, Zc, Ze, ſeront exprimées ainſi (45) : la vîteſſe ſuivant $Za = s(z\,cof.\zeta - y\,cof.\gamma) = u$; ſuivant $Zc = s(x\,cof.\gamma - z\,cof.\alpha) = v$; ſuivant $Ze = s(y\,cof.\alpha - x\,cof.\zeta) = w$, vîteſſes que j'indiquerai pour abréger par les lettres u, v, w : or, je ſuppoſerai maintenant cet axe de rotation GJ variable d'une manière quelconque, de même que la vîteſſe angulaire s.

62. Pour trouver les accroiſſemens qu'elles prendront dans l'élément du temps dt, il faut remarquer que non ſeulement nous devons avoir égard à la variabilité des coordonnées x, y, z, dont on trouve les différentielles au §. 46 exprimées ainſi, $dx = s\,dt(z\,cof.\zeta - y\,cof.\gamma) = u\,dt$; $dy = s\,dt(x\,cof.\gamma - z\,cof.\alpha) = v\,dt$; $dz = (y\,cof.\alpha - x\,cof.\zeta) = w\,dt$; mais que les quantités s, α, ζ, γ croiſſent auſſi de leurs différentielles, de ſorte que nous obtiendrons les différentielles ſuivantes de nos trois vîteſſes u, v, w, après avoir ſubſtitué pour u, v, w leurs valeurs indiquées au §. précédent.

$du = zd.s\,cof.\zeta - yd.s\,cof.\gamma + ss\,dt(y\,cof.\alpha\,cof.\zeta + z\,cof.\alpha\,cof.\gamma - x\,fin.\alpha^2)$
à cauſe de $cof.\zeta^2 + cof.\gamma^2 = fin.\alpha^2$
$dv = xd.s\,cof.\gamma - zd.s\,cof.\alpha + ss\,dt(z\,cof.\zeta\,cof.\gamma + x\,cof.\zeta\,cof.\alpha - y\,fin.\zeta^2)$
à cauſe de $cof.\alpha^2 + cof.\gamma^2 = fin.\zeta^2$
$dw = yd.s\,cof.\alpha - xd.s\,cof.\zeta + ss\,dt(x\,cof.\gamma\,cof.\alpha + y\,cof.\gamma\,cof.\zeta - z\,fin.\gamma^2)$
à cauſe de $cof.\alpha + cof.\zeta^2 = fin.\gamma^2$

63. Cherchons à préſent les forces requiſes pour ce mouvement ſuppoſé. Pour imprimer à l'élément du corps dM en Z les trois accélérations trouvées ſelon les directions Za, Zc, Ze, il faut, de même que nous venons de le voir au §. 47, que cet élément dM ſoit ſollicité ſelon les mêmes directions par ces forces élé-

mentaires, ſçavoir, ſuivant Za, par la force $= \frac{dM}{dt}.du$; ſuivant Zc, par la force $= \frac{dM}{2gdt}.dv$; ſuivant Ze, par la force $= \frac{dM}{dt}.dw$. Il s'agit à préſent d'aſſembler toutes ces forces élémentaires par toute l'étendue du corps, où il eſt clair qu'il faut uniquement avoir égard à la variabilité du point Z avec l'élément de matière dM qui s'y trouve, parce que nous ne nous embarraſſons que des forces qui doivent agir dans l'inſtant préſent, ſans avoir égard à leur variabilité dans la ſuite. Nous n'aurons donc d'autres variables que les trois coordonnées x, y, z, & les letttes α, ζ, γ, ε, avec leurs différentielles, ſeront traitées comme conſtantes.

64. Or, puiſque les formules trouvées pour les différentielles du, dv, dw, ne contiennent que les premières dimmenſions de x, y, z, qui ſont les ſeules variables que nous ayons à conſidérer, à cauſe de $\int x\,dM = o$; $\int y\,dM = o$; $\int z\,dM = o$; il eſt évident que les intégrales des forces élémentaires s'évanouiſſent, de ſorte que $\int \frac{du\,dM}{2gdt} = o$; $\int \frac{dv\,dM}{2gdt} = o$; $\int \frac{dw\,dM}{2gdt} = o$; tout comme la condition que le centre de gravité eſt en repos, l'exige; car s'il y avoit des forces finies qui agiſſent ſur le corps, elles lui imprimeroient un mouvement progreſſif, dont je fais ici abſtraction. Mais, puiſqu'il s'agit ici uniquement du mouvement de rotation, il faut moins avoir égard aux forces ſollicitantes elles-mêmes, qui s'évanouiſſent, comme nous venons de voir, qu'à leurs momens. Il faut donc d'abord chercher les momens des forces élémentaires que nous venons de trouver par rapport aux trois axes principaux, pour en conclure enſuite leurs intégrales, qui nous fourniront les momens néceſſaires de force pour engendrer le mouvement ſuppoſé, tant par rapport à l'accélération du mouvement de rotation qu'à la variation même de l'axe de rotation.

65. Or, les forces élémentaires trouvées (63), donnent, à l'égard des axes principaux, les momens ſuivans :

1. Le moment de forces par rapport à l'axe GA dans le ſens $CE = \frac{dM}{2g\,dt}(y\,dw - z\,dv)$.

2. Le moment de forces par rapport à l'axe GC dans le ſens $EA = \frac{dM}{2g\,dt}(z\,du - x\,dw)$.

3. Le moment de forces par rapport à l'axe GE dans le ſens $AC = \frac{dM}{2g\,dt}(x\,dv - y\,du)$.

Il faut à préſent ſubſtituer au lieu des différentielles du, dv, dw, leurs valeurs trouvées (62), & enſuite chercher les intégrales de ces formules, pour avoir les momens entiers de forces par rapport aux trois axes principaux du corps.

66. Faiſons ces opérations pour le premier moment élémentaire par rapport à l'axe principal GA, puiſqu'il ſera aiſé d'en conclure les deux autres par la ſeule analogie. Or, l'expreſſion $y\,dw - z\,dv$ ſe changera par la ſubſtitution en celle-ci $(yy+zz)\,d.\,s\,cof.\,\alpha - yz\,d.\,s\,cof.\,\beta - xz\,d.\,s\,cof.\,\gamma + ss\,dt.(xy\,cof.\,\alpha\,cof.\,\gamma - xz\,cof.\,\alpha\,cof.\,\beta + (yy - zz)\,cof.\,\beta\,cof.\,\gamma + yz(\,fin.\,\beta^2 - fin.\,\gamma^2))$. laquelle étant multipliée par $\frac{dM}{2g\,dt}$ & intégrée par la ſeule variabilité des trois coordonnées x, y, z. donnera, à cauſe de $\int x\,y\,dM = o$, $\int x\,z\,dM = o$, $\int y\,z\,dM = o$; $\int (yy+zz)\,dM = Maa$, $\int (yy - zz)\,dM = M\,(cc - bb)$ (60), l'expreſſion ſuivante pour le moment de forces à l'égard de GA:

$$\frac{Maa\,d.\,s\,cof.\,\alpha}{2g\,dt} + \frac{M(cc - bb)\,ss\,cof.\,\beta\,cof.\,\gamma}{2g}.$$

67. Donc, pour produire dans le mouvement du corps les changemens élémentaires ſuppoſés, tant à l'égard de la viteſſe angulaire que de la poſition de l'a-

xe de rotation, ſi nous ſuppoſons les momens de forces,

Par rapport à l'axe principal $GA = P$, dans le ſens CE, nous aurons $P = Ma^2 \frac{d.\varpi \cdot cof.\alpha}{2gdt} + M(cc - bb) \frac{\varpi\varpi cof.\zeta\, cof.\gamma}{2g}$;

Par rapport à l'axe principal $GC = Q$, dans le ſens EA, nous aurons $Q = Mbb. \frac{d.\varpi cof.\zeta}{2gdt} + M(aa - cc) \frac{\varpi\varpi cof.\gamma cof.\alpha}{2g}$;

Par rapport à l'axe principal $GE = R$, dans le ſens AC, nous aurons $R = Mcc. \frac{d.\varpi cof.\gamma}{2gdt} + M(bb - aa) \frac{\varpi\varpi cof.\alpha \cdot cof.\zeta}{2g}$;

& partant réciproquement, ces trois momens de forces produiront préciſément les changemens ſuppoſés.

68. Il faut donc des forces pour produire ces changemens, à moins que les trois valeurs trouvées pour P, Q & R, ne s'évanouiſſent; ce qui pourroit bien arriver, quoique, ni la vîteſſe angulaire ϖ, ni les angles α, ζ, γ, ne demeuraſſent les mêmes. Mais, ſuppoſons que tant la viteſſe angulaire ϖ que la poſition de l'axe de rotation doivent demeurer les mêmes; pour cet effet, il faudroit que le corps fût ſollicité par les trois momens de forces ſuivans: $P = M(cc - bb) \frac{\varpi\varpi cof.\zeta\, cof.\gamma}{2g}$; $Q = M(aa - cc) \frac{\varpi\varpi cof.\gamma\, cof.\alpha}{2g}$; $R = M(bb - aa) \frac{\varpi\varpi cof.\alpha\, cof.\zeta}{2g}$, leſquels ne s'évanouiſſent pas tous à la fois, à moins que des trois coſinus, $cof.\alpha$, $cof.\zeta$, $cof.\gamma$, deux ne deviennent $= o$: or cela n'arrive pas, à moins qu'un des trois angles α, ζ, γ, ne s'évanouiſſe, c'eſt-à-dire à moins que l'axe de rotation ne ſoit un des principaux: ce qui eſt parfaitement d'accord avec ce que j'ai d'abord remarqué, qu'un corps ſolide ne ſcauroit tourner librement autour d'un axe, à moins que ce ne fût un axe principal du corps; & cette même propriété m'a conduit à la connoiſſance des axes principaux.

69. Maintenant, nous ſommes en état de réſoudre le problême général, auquel cette recherche aboutit, & qu'on peut concevoir en ces termes :

Un corps ſolide étant ſollicité par des forces quelconques, pendant qu'il tourne autour d'un axe de rotation donné avec une viteſſe angulaire donnée, déterminer les changemens élémentaires qui ſeront produits tant dans la viteſſe angulaire que dans la poſition de l'axe de rotation.

Il ne s'agit ici que d'un inſtant de temps, auquel je regarde la poſition des axes principaux comme connue, ſoient ces axes GA, GC, GE, par rapport auxquels les momens d'inertie du corps ſoient Maa; Mbb, Mcc, M marquant la maſſe du corps. Que le corps tourne à préſent autour de l'axe GJ dans le ſens ACE, avec une vîteſſe angulaire $= \varpi$, & que la poſition de cet axe ſoit déterminée par les angles qu'il fait avec les axes principaux $AGJ = \alpha$; $CGJ = \zeta$; $EGJ = \gamma$.

70. Pour les forces ſollicitantes données, qu'on cherche leurs momens par rapport aux axes principaux du corps, qui ſoient pour l'axe $GA = P$ dans le ſens CE; pour l'axe $GC = Q$ dans le ſens EA; pour l'axe $GE = R$ dans le ſens AC; alors pendant l'élément du temps dt, la vîteſſe angulaire ϖ prendra un accroiſſement $= d\varpi$, & l'axe de rotation changera de ſituation par rapport aux axes principaux du corps, en ſorte que les angles α, ζ, γ, ſeront augmentés de leurs différentielles $d\alpha$, $d\zeta$, $d\gamma$; & ces changemens élémentaires ſeront déterminés par les trois équations ſuivantes :

$$d.\varpi \cos.\alpha \pm \frac{cc-bb}{aa}\varpi\varpi\, dt \cos.\zeta \cos.\gamma = \frac{2gP\,dt}{Maa}\ ;\ d.\varpi \cos.\zeta + \frac{aa-cc}{bb}$$

$$\varpi\varpi\, dt \cos.\alpha \cos.\gamma = \frac{2gQ\,dt}{Mbb}\ ;\ d.\varpi \cos.\gamma + \frac{bb-aa}{cc}\varpi\varpi\, dt \cos.\alpha \cos.\zeta = \frac{2gR\,dt}{Mcc}\ ;$$

& c'eſt là la ſolution du problême propoſé.

71.

71. Mais si l'on veut déterminer le mouvement de rotation tout entier d'un corps sollicité par des forces quelconques, il faut avoir égard aux changemens continuels des axes principaux du corps, & y rapporter à chaque instant l'axe de rotation & les momens des forces sollicitantes. Donc la position des axes principaux étant variable, il les faut rapporter à des directions fixes; &, puisque nous avons suivi jusqu'ici en partie la méthode reçue parmi les astronomes pour représenter la position mutuelle des axes, gardons encore cette méthode astronomique, pour chercher les changemens des axes principaux par rapport à des directions fixes. Considérons pour cet effet une sphère fixe décrite autour du centre de gravité du corps G: Fig. 5. soit $PQSR$ un grand cercle fixe tel que le méridien & P un point fixe comme le pole; qu'après le temps $= t$ secondes, les axes principaux du corps répondent aux points A, C, E, d'où ayant tiré au point P les arcs de grands cercles AP, CP, EP, soient ces arcs $AP = l$; $CP = m$; $EP = n$; & les angles $QPA = \lambda$; $QPC = \mu$; $QPE = \nu$; de-là, on a d'abord $cos.\ l^2 + cos.\ m^2 + cos.\ n^2 = 1$: ensuite

$$cos.\ (\mu - \lambda) = -\frac{cos.\ l\ cos.\ m}{sin.\ l\ sin.\ m};\quad cos.\ (\nu - \lambda) = -\frac{cos.\ l\ cos.\ n}{sin.\ l\ sin.\ n};$$

$$cos.\ (\mu - \nu) = -\frac{cos.\ m\ cos.\ n}{sin.\ m\ sin.\ n}.$$

72. Que le corps tourne à présent autour de l'axe GJ avec une vîtesse angulaire $= \omega$ dans le sens ACE; & pour la position du point J, soient les arcs de grands cercles $AJ = \alpha$; $CJ = \varepsilon$; $EJ = \gamma$, & supposons, pour abréger nos formules, $\omega\ cos.\ \alpha = x$; $\omega\ cos.\ \varepsilon = y$; $\omega\ cos.\ \gamma = z$; & nous aurons $\omega\omega = xx + yy + zz$. Cherchons ensuite les momens des forces sollicitantes par rapport aux axes principaux GA, GC, GE du corps, qui soient P, Q, R, dans le sens CE, EA, AC.

Cela posé, nos équations, pour déterminer les variables x, y, z, seront :

$$dx + \frac{cc-bb}{aa}yz\,dt = \frac{2gP\,dt}{Maa}\,;\ dy + \frac{aa-cc}{bb}xz\,dt = \frac{2gQ\,dt}{Mbb}\,;\ dz + \frac{bb-aa}{cc}xy\,dt = \frac{2gR\,dt}{Mcc}$$

& ayant trouvé ces quantités x, y, z, on aura les angles α, ε, γ, par les formules $cos.\,\alpha = \frac{x}{s}$; $cos.\,\varepsilon = \frac{y}{s}$; $cos.\,\gamma = \frac{z}{s}$.

73. Mais il faut aussi considérer qu'à cause du mouvement de rotation, les points A, C, E, & partant les arcs l, m, n & les angles λ, μ, ν sont variables. Le point A tournera autour du point J avec la vitesse $s\ sin.\ JA = s\ sin.\,\alpha$ dans le sens CE, & partant, dans le temps dt, le point A décrira le petit arc $Aa = s\,dt\ sin.\,\alpha$ perpendiculaire à l'arc JA. Donc, tirant $a\alpha$ perpendiculaire à l'arc PA, nous aurons $dl = -A\alpha$ & $d\lambda = \frac{-a\alpha}{sin.\,l}$; mais à cause de l'angle JAa droit, on trouve $A\alpha = s\,dt\ sin.\,\alpha\ sin.\ JAP$ & $a\alpha = s\,dt\ sin.\,\alpha\ cos.\,JAP$; or le triangle CAP fournit $cos.\,CAP = \frac{cos.\,m}{sin.\,l}$, & le triangle EAP donne $cos.\ EAP = -\ sin.\ CAP = \frac{cos.\,n}{sin.\,l}$ ou $sin.\ CAP = \frac{-cos.\,n}{sin.\,l}$. De la même manière, les triangles CAJ & EAJ donnent $cos.\ CAJ = \frac{cos.\,\varepsilon}{sin.\,\alpha}$; $cos.\ EAJ = sin.\ CAJ = \frac{cos.\,\gamma}{sin.\,\alpha}$: d'où, puisque l'angle $JAP = CAP + CAJ$, il s'ensuit que

$$sin.\ JAP = \frac{cos.\,\gamma\,cos.\,m - cos.\,\varepsilon\,cos.\,n}{sin.\,\alpha\ sin.\,l}\ \&\ cos.\ JAP = \frac{cos.\,\varepsilon\,cos.\,m + cos.\,\gamma\,cos.\,n}{sin.\,\alpha\ sin.\,l}$$

74. Substituons ces valeurs, & nous aurons $dl = \frac{-s\,dt\ cos.\,\gamma\,cos.\,m - cos.\,\varepsilon\,cos.\,n}{sin.\,l}$ & $d\lambda = \frac{-s\,dt\,(cos.\,\varepsilon\,cos.\,m + cos.\,\gamma\,cos.\,n)}{sin.\,l^2}$

ou si nous mettons, au lieu de $s\ cos.\,\varepsilon$, $s\ cos.\,\gamma$ leurs va-

leurs y, z, nous trouverons les six équations qu'il faut ajouter aux trois précédentes que nous avons données ci-dessus (72), de sorte que nous aurons en tout les neuf équations suivantes :

$$1°.\ dx+\frac{cc-bb}{aa}yz\,dt=\frac{2gP\,dt}{Maa}$$

$$2°.\ dy+\frac{aa-cc}{bb}xz\,dt=\frac{2gQ\,dt}{Mbb}$$

$$3°.\ dz+\frac{bb-aa}{cc}xy\,dt=\frac{2gR\,dt}{Mcc}$$

$$4°.\ dl\,\mathrm{sin.}\,l=dt\,(y\,\mathrm{cos.}\,n-z\,\mathrm{cos.}\,m)$$

$$5°.\ dm\,\mathrm{sin.}\,m=dt\,(z\,\mathrm{cos.}\,l-x\,\mathrm{cos.}\,n)$$

$$6°.\ dn\,\mathrm{sin.}\,n=dt\,(x\,\mathrm{cos.}\,m-y\,\mathrm{cos.}\,l)$$

$$7°.\ d\lambda\,\mathrm{sin.}\,l^2=-dt\,(y\,\mathrm{cos.}\,m+z\,\mathrm{cos.}\,n)$$

$$8°.\ d\mu\,\mathrm{sin.}\,m^2=-dt\,(z\,\mathrm{cos.}\,n+x\,\mathrm{cos.}\,l)$$

$$9°.\ d\nu\,\mathrm{sin.}\,n^2=-dt\,(x\,\mathrm{cos.}\,l+y\,\mathrm{cos.}\,n)$$

Voilà donc les équations, dans lesquelles est renfermée la solution de tous les problêmes, où il s'agit du mouvement de rotation de quelque corps solide. Or, il faut remarquer qu'à cause de la relation indiquée entre les quantités l, m, n, & λ, μ, ν, il suffira de prendre trois des six dernières.

75. Il peut bien arriver que l'application de ces formules à un cas proposé, devienne extrêmement difficile, & qu'elle surpasse même les forces de l'analyse : mais c'est alors du côté analytique où est la difficulté, le méchanique étant heureusement développé. Cependant, pour donner une idée de l'usage de ces formules, je m'en vais résoudre le cas où les trois momens de force P, Q, R, s'évanouissent : ce cas est fort remarquable en soi-même, puisqu'il s'agit du problême suivant, dont personne n'a encore donné une solution suffisante.

Un corps solide n'étant sollicité par aucune force, s'il a reçu un mouvement de rotation quelconque autour d'un axe différent de ses axes principaux, déterminer la continuation de son mouvement.

76. Ayant donc $P=0$; $Q=0$ $R=0$, nous au-

rons à résoudre les neuf équations suivantes :

$1°.\ dx + \frac{cc - bb}{aa} yz\,dt = 0;$ | $5°.\ dm\sin.m = dt\,(z\cos.l - x\cos.n);$

$2°.\ dy + \frac{aa - cc}{bb} xz\,dt = 0;$ | $6°.\ dn\sin.n = dt\,(x\cos.m - y\cos.l);$

$3°.\ dz + \frac{bb - aa}{cc} xy\,dt = 0;$ | $7°.\ d\lambda\sin.l^2 = -dt(y\cos.m + z\cos.n);$

$4°.\ di\sin.l = dt\,(y\cos.n - z\cos.m);$ | $8°.\ d\mu\sin.m^2 = -dt(z\cos.n + x\cos.l);$

$9°.\ d\nu\sin.n^2 = -dt(x\cos.l + y\cos.m).$

Des trois premières, nous tirons d'abord $\frac{aax\,dx}{bb - cc} = \frac{bby\,dy}{cc - aa} = \frac{cc\,z\,dz}{aa - bb} = xyz\,dt$; donc supposant $xyz\,dt = du$, & pour abréger, $\frac{bb - cc}{aa} = A$; $\frac{cc - aa}{bb} = B$; $\frac{aa - bb}{cc} = C$; nous trouverons, en intégrant $xx = 2Au + \Gamma$; $yy = 2Bu + \Delta$; $zz = 2Cu + \Theta$; & de-là $dt = \frac{du}{\sqrt{(2Au + \Gamma)(2Bu + \Delta)(2Cu + \Theta)}}$.

77. Par rapport aux lettres A, B, C, il faut remarquer que $Aaa + Bbb + Ccc = 0$ & $Aa^4 + Bb^4 + Cc^4 = 0$: de-là, il est évident que $aaxx + bbyy + cczz$ sera égal à une quantité constante $\Gamma\, aa + \Delta\, bb + \Theta\, cc$. Or, cette expression se réduit à celle-ci $vv\,(aa\cos.\alpha^2 + bb\cos.\xi^2 + cc\cos.\gamma^2)$, où la formule $aa\cos.\alpha^2 + bb\cos.\xi^2 + cc\cos.\gamma^2$ étant multipliée par la masse du corps M, exprime le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe de rotation GJ autour duquel le corps tourne à présent : donc, supposant ce moment d'inertie $= Mrr$, la quantité $Mrrvv$, qui exprime ce qu'on nomme la force vive du corps, demeurera invariable, ou bien le corps conservera toujours la même force vive. Puisque dans le mouvement progressif, s'il n'y a point de force sollicitante, le corps conserve toujours la même vîtesse, il s'en suit, quelque mouve-

ment qu'on imprime à un corps, qu'il conſervera toujours la même force vive.

78. La dernière équation différentielle trouvée (76), ſert à déterminer pour tout temps t la variable u; & de-là, on définira les quantités $x = V(2Au + \Gamma)$; $y = V(2B\ldots + \Delta)$; $z = V(2Cu + \Theta)$: d'où la viteſſe angulaire dont le corps tourne à préſent, ſera $\omega = V(2(A+B+C)u + \Gamma + \Delta + \Theta)$. Or, pour la poſition de l'axe de rotation GJ à l'égard des axes principaux du corps, laquelle eſt déterminée par les angles α, ζ, γ, on aura $cof.\alpha = \frac{x}{\omega}$; $cof.\zeta = \frac{y}{\omega}$; $cof.\gamma = \frac{z}{\omega}$: mais nous ne ſçavons pas encore la poſition des axes principaux du corps, pour l'inſtant préſent qu'il faut chercher par la réſolution des ſix autres équations, les trois premières étant déjà parfaitement réſolues.

79. Pour faciliter cette recherche, il eſt bon d'obſerver que les trois premières équations y peuvent beaucoup contribuer; car ſi nous multiplions la première par $aa\,cof.l$; la ſeconde par $bb\,cof.m$ & la troiſième par $cc\,cof.n$, nous obtiendrons cette ſomme : $aa\,dx\,cof.l + bb\,dy\,cof.m + cc\,dz\,cof.n + cc\,y\,z\,dt\,cof.l - cc\,x\,z\,dt\,cof.m - bb\,y\,z\,dt\,cof.l + bb\,x\,y\,dt\,cof.n + aa\,x\,z\,dt\,cof.m - aa\,x\,y\,dt\,cof.n = o$, laquelle, par les équations 4, 5 & 6, ſe change en cette forme : $o = aa\,dx\,cof.l + bb\,dy\,cof.m + cc\,dz\,cof.n - aa\,x\,dl\,ſin.l - bb\,y\,dm\,ſin.m - cc\,z\,dn\,ſin.n$, qui étant intégrable, donne $aa\,x\,cof.l + bb\,y\,cof.m + cc\,z\,cof.n = conſt. = A$; & nous avions déjà $cof.l^2 + cof.m^2 + cof.n^2 = 1$: donc, ſi nous avions encore une ſeule équation intégrale entre les arcs l, m & n, nous les pourrions déterminer chacun à part. Les équations 4, 5, 6, fourniſſent cette équation différentielle aſſez ſimple :

$$x\,dl\,ſin.l + y\,dm\,ſin.m + z\,dn\,ſin.n = o.$$

80. Au lieu des arcs l, m, n, introduiſons une

nouvelle variable v, en ſuppoſant $x\ cof.\ l + y\ cof.\ m + z\ cof.\ n = v$; & à cauſe de la propriété remarquée, nous aurons $dv = dx\ cof.\ l + dy\ cof.\ m + dz\ cof.\ n$ ou $\frac{dv}{du} = \frac{A\ cof.\ l}{x} + \frac{B\ cof.\ m}{y} + \frac{C\ cof.\ n}{z}$; & maintenant tout revient à déterminer v par u. Pour cet effet, il faut chercher les valeurs de $cof.\ l$, $cof.\ m$, $cof.\ n$ de ces trois équations : $cof.\ l^2 + cof.\ m^2 + cof.\ n^2 = 1$; $aax\ cof.\ l + bby\ cof.\ m + ccz\ cof.\ n = \Lambda$; $x\ cof.\ l + y\ cof.\ m + z\ cof.\ n = v$, dont la réſolution mène enfin à cette formule irrationelle :

$$\sqrt{(AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy - \Lambda\Lambda(xx + yy + zz) + 2\Lambda v(aaxx + bbyy + cczz) - vv(a^4xx + b^4yy + c^4zz))}.$$

81. Mettons, pour abréger, le ſigne $\sqrt{(\ldots)}$ pour cette formule, & l'on trouvera les valeurs ſuivantes :

$$cof.\ l = \frac{\Lambda x(Cccyy - Bbbzz) + bbccxv(Bzz - Cyy) + Aaayz\sqrt{(\ldots)}}{AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy};$$

$$cof.\ m = \frac{\Lambda y(Aaazz - Cccxx) + aaccyv(Cxx - Azz) + Bbbxz\sqrt{(\ldots)}}{AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy}$$

$$cof.\ n = \frac{\Lambda z(Bbbxx + Aaayy) + aabbzv(Ayy - Bxx) + Cccxy\sqrt{(\ldots)}}{AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy}$$

& ſi nous ſubſtituons ces valeurs dans l'équation différentielle $\frac{dv}{du} = \frac{A\ cof.\ l}{x} + \frac{B\ cof.\ m}{y} + \frac{C\ cof.\ n}{z}$, nous parviendrons cette équation à intégrer $\frac{dv}{du}(AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy) = ABC\Lambda(aaxx + bbyy + cczz) - ABCv(a^4xx + b^4yy + c^4zz) + \frac{AAaayyzz + BBbbxxzz + CCccxxyy}{xyz}\sqrt{(\ldots)}$.

82. Maintenant, nous n'avons qu'à ſubſtituer au lieu de x, y, z, leurs valeurs aſſignées ci-deſſus, qui donnent

$$AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy = AAa^4\Delta\Theta + BBb^4\Gamma\Theta + CCc^4\Gamma\Delta - 2ABCu(\Gamma a^4 + \Delta b^4 + \Theta c^4),$$

$$AAaayyzz + BBbbxxzz + CCccxxyy = AAaa\Delta\Theta + BBbb\Gamma\Delta + CCcc\Gamma\Theta - 2ABCu(\Gamma aa + \Delta bb + \Theta cc).$$

$$xx+yy+zz=2(A+B+C)u+\Gamma+\Delta+\Theta;$$
$$aaxx+bbyy+cczz=\Gamma aa+\Delta bb+\Theta cc;$$
$$a^4xx+b^4yy+c^4zz=\Gamma a^4+\Delta b^4+\Theta c^4.$$

Posons ensuite pour abréger $\Gamma+\Delta+\Theta=E$; $\Gamma aa+\Theta bb+\Theta cc=F$; $\Gamma a^4+\Delta b^4+\Theta c^4=G$; $AA\Gamma aa\Delta\Theta+BB\Gamma bb\Theta+CC\Theta cc\Delta=H$; $AA\Gamma a^4\Delta\Theta+BB\Gamma b^4\Theta+CC\Theta c^4\Delta=K$; d'où il s'en suit $K=EG-FF$.

83. En introduisant ces valeurs, à cause de $A+B+C=-ABC$, notre formule irrationelle sera $V(\cdot\cdot)=V(K-2ABCGu+2AAABCu-AAE+2AFv-Gvv)$; & notre équation différentielle deviendra $\frac{1}{dt^n}(K-2ABCGu)=ABCAF-ABCGv+\frac{H-2ABCFu}{xyz}V(\cdot\cdot)$ qui se réduit à cette forme

$$\frac{Kdv-ABCFAdu-2ABCGudv+ABCGvdu}{K-AAE+2ABC(AA-G)u+2AFv-Gvv}=\frac{Hdu-2ABCFudu}{V(2Au+\Gamma)(2Bu+\Delta)(2Cu+\Theta)}$$

dont il s'agit de trouver l'intégrale.

84. Comme le dernier membre de cette équation ne renferme que la seule variable u, il est évident que, si l'on pouvoit trouver une fonction de u, par laquelle le premier membre étant multiplié devînt intégrable, on auroit la résolution complette de cette équation. M. Euler a exposé une méthode pour trouver de tels facteurs; & si l'on en fait l'application à cette équation proposée, on découvre ce facteur cherché $=\frac{1}{K-2ABCGu}$; ou bien, si nous divisons notre équation par $K-2ABCGu$, l'un & l'autre membre deviendra intégrable ou constructible par des quadratures. Multiplions donc par $\frac{VG}{K-2ABCGu}$ & mettons le dernier membre $\frac{(H-2ABCFu\,du\sqrt{G}}{(K-2ABCGu)V(2Au+\Gamma)(2Bu+\Delta)(2Cu+\Theta)}=dU$, de sorte que U puisse être regardé comme une fonction connue de la variable u, dont nous avons déjà le rapport au temps t.

85. Pour le premier membre, en le multipliant par $\frac{G}{(K-2ABCGu)\sqrt{G}}$, la formule radicale pourra être représentée ainsi $\sqrt{((G-\Lambda\Lambda)(K-2ABCGu)-(Gv-\Lambda F)^2)}$ à cause de $K=EG-FF$; & partant, le premier membre sera $\frac{(K-2ABCGu)\,Gdv+ABCG\,(Gv-\Lambda F)\,du}{(K-2ABCGu)\sqrt{((G-\Lambda\Lambda)(K-2ABCGu)-(Gv-\Lambda F)^2)}}$ qui supposant $K-2ABCGu=pp$; $Gv-\Lambda F=q$ & $G-\Lambda\Lambda=ff$ prendra cette forme $\frac{pdq-qdp}{p\sqrt{(ffpp-qq)}}$, qui, supposant $q=ps$, se change en celle-ci $\frac{ds}{\sqrt{(ff-ss)}}$, dont l'intégrale est $Arc.\,sin.\,\frac{s}{f}=Arc.\,sin.\,\frac{q}{fp}$; & partant, l'intégrale du premier membre sera $Arc.\,sin.\,\frac{Gv-\Lambda F}{f\sqrt{(K-2ABCGu)}}=Arc.\,sin.\,\frac{Gv-\Lambda F}{\sqrt{(G-\Lambda\Lambda)(K-2ABCGu)}}$.

86. Cette quantité est donc égale à la formule intégrale $U=\int\frac{(H-2ABCFu)\,du\sqrt{G}}{(K-2ABCGu)\sqrt{(2Au+\Gamma)(2Bu+\Delta)(2Cu+\Theta)}}$ & considérant U comme un angle, notre équation intégrale sera $\frac{Gv-\Lambda F}{\sqrt{(G-\Lambda\Lambda)(K-2ABCGu)}}=sin.\,U$: d'où nous tirons $\frac{\sqrt{((G-\Lambda\Lambda)(K-2ABCGu)-(Gv-\Lambda F)^2)}}{\sqrt{(G-\Lambda\Lambda)(K-2ABCGu)}}=cos.\,U$: de sorte que notre formule irrationelle sera

$$\sqrt{(..)}=\frac{\sqrt{(G-\Lambda\Lambda)(K-2ABCGu)}}{\sqrt{G}}\,cos.\,U.$$

87. Substituons ces valeurs pour v, & la formule irrationelle, dans les expressions assignées ci-dessus pour

pour les cosinus des arcs l, m & n (81); & après avoir fait les réductions nécessaires, nous trouverons

$$cos.\, l = \frac{\Lambda aax}{G} + \frac{bbcx(B\Theta - C\Delta)\sqrt{(G-\Lambda\Lambda)}}{G\sqrt{(K-2ABCGu)}}\, sin.\, U + \frac{Aayz\sqrt{(G-\Lambda\Lambda)}}{\sqrt{G(K-2ABCGu)}}\, cos.\, U$$

$$cos.\, m = \frac{\Lambda bby}{G} + \frac{aacy(C\Gamma - A\Theta)\sqrt{(G-\Lambda\Lambda)}}{G\sqrt{(K-2ABCGu)}}\, sin.\, U + \frac{Bbbxz\sqrt{(G-\Lambda\Lambda)}}{\sqrt{G(K-2ABCGu)}}\, cos.\, U$$

$$cos.\, n = \frac{\Lambda ccz}{G} + \frac{aabbz(A\Delta - B\Gamma)\sqrt{(G-\Lambda\Lambda)}}{\sqrt{G(K-2ABCGu)}}\, sin.\, U + \frac{Cccxy\sqrt{(G-\Lambda\Lambda)}}{\sqrt{G(K-2ABCGu)}}\, cos.\, U$$

Donc, puisqu'on peut déterminer pour un temps écoulé quelconque t la quantité u, & tirer de celle-ci les variables x, y, z avec la formule intégrale U, on connoîtra aussi pour le même temps les arcs l, m, n, de sorte que le problème est résolu jusqu'à la détermination des angles λ, μ, ν, dont il suffit de chercher un seul.

88. Mais, puisque nous avons trouvé tant les quantités x, y, z que les arcs l, m, n, exprimés par la seule quantité u, & que nous avons $dt = \frac{du}{xyz}$, la détermination de l'angle $QPA = \lambda$ n'aura aucune difficulté par le moyen de l'équation différentielle $d\lambda = -\frac{dt(y\, cos.\, m + z\, cos.\, n)}{sin.\, l^2}$. Cependant, puisqu'il n'y a point de raison de chercher plutôt cet angle λ que les deux autres μ & ν, il semble qu'on fera mieux de chercher l'angle QPJ que fait l'arc PJ avec le cercle fixe PQS. Supposons donc l'angle $QPJ = \varphi$; & puisque nous avons déjà trouvé $sin.\, JAP = \frac{cos.\, \gamma\, cos.\, m - cos.\, \delta\, cos.\, n}{sin.\, \alpha\, sin.\, l}$

FIG. 5.

& $cos.\ JAP = \frac{cos.\zeta\, cos.\, m + cos.\gamma\, cos.\, n}{sin.\,\alpha\, sin.\, l}$ (73), nous aurons $cos.\ JP = cos.\,\alpha\ cos.\, l + cos.\,\zeta\ cos.\, m + cos.\,\gamma\ cos.\, n = \frac{\nu}{\varpi}$, à cause de $\nu = x\, cos.\, l + y\, cos.\, m + z\, cos.\, n$. Mais nous venons de trouver $\nu = \frac{\Lambda\ F}{G} + \frac{V\,(G - \Lambda\Lambda)\,(K - 2ABCGu)}{G}\, sin.U$ & pour ϖ nous avons $\varpi\varpi = E - 2ABCu$.

89. Que dans le temps infiniment petit dt le pole de rotation J soit transporté en i, & tirant l'arc Ai avec la perpendiculaire Jp, nous aurons $ip = d\omega$; & puisque le pole J change également par rapport aux axes principaux, soit que nous les regardions comme fixes, ou que nous tenions compte de leur mouvement, considérons l'angle CAJ pour lequel nous avons $cos.\, CAJ = \frac{cos.\,\zeta}{sin.\,\alpha}$ & $sin.\, CAJ = \frac{cos.\,\gamma}{sin.\,\alpha}$; de-là nous tirerons $d.\ CAJ = JAi = \frac{-d\alpha\, cos.\,\alpha\, cos.\,\gamma - d\gamma\, sin.\,\alpha\, sin.\,\gamma}{sin.\,\alpha\, cos.\,\zeta}$, & partant $Jp = \frac{-d\alpha\, cos.\,\alpha\, cos.\,\gamma - d\gamma\, sin.\,\alpha\, sin.\,\gamma}{cos.\,\zeta}$. Prolongeons l'arc iJ en V, & nous aurons $tang.\, AiJ = tang.\, AJV = \frac{-cos.\,\alpha\, cos.\,\gamma}{cos.\,\zeta} - \frac{d\mu\, sin.\,\alpha\, sin.\,\gamma}{d\alpha\, cos.\,\zeta}$ & $Ji. = \frac{d\omega}{cos.\, AJV}$ $= V\,(d\alpha^2\, sin.\,\alpha^2 + d\zeta^2\, sin.\,\zeta^2 + d\gamma^2\, sin.\,\gamma^2)$, qui se réduit à cette forme $Ji = \frac{1}{\varpi} V\,(dx^2 + dy^2 + dz^2 - d\varpi^2)$. Maintenant, pour trouver l'angle PJV, nous avons pour l'angle AJP, $sin.\, AJP = \frac{sin.\, JAP.\, sin.\, l}{sin.\, PJ} = \frac{cos.\gamma\, cos.\, m - cos.\,\zeta\, cos.\, n}{sin.\,\alpha\, sin.\, PJ}$ & $cos.\, AJP = \frac{cos.\, l - cos.\alpha cos.\, JP}{sin.\,\alpha\, sin.\, PJ} = \frac{sin.\,\alpha^2 cos.\, l - cos.\,\alpha cos.\,\zeta cos.\, m - cos.\,\alpha cos.\,\gamma cos.\, n}{sin.\,\alpha\, sin.\, PJ}$ & parconséquent, $sin.\, PJV =$

$$\frac{(cos.\,\gamma\, cos.\, m - cos.\,\zeta\, cos.\, n)\, cos.\, AJV - sin.\,\alpha^2 cos.\, l - cos.\,\alpha cos.\,\zeta cos.\, m - cos.\,\alpha cos.\,\gamma cos.\, n)\, sin.\, AJV.}{sin.\,\alpha\, sin.\, PJ}$$

90. Or $Ji.\ sin.\ PJV$ donne le petit arc Jq perpendiculaire à l'arc Pi, lequel étant auſſi $= d\phi\ sin.\ PJ$, nous aurons $d\phi\ sin.\ PJ = Ji\ sin.\ PJV = \frac{d\alpha\ sin.\ PJV}{cos.\ AJV}$ & partant, $d\varphi = \frac{d\alpha}{sin.\ \alpha sin.\ PJ^2}\ (cos.\ \gamma\ cos.\ m - cos.\ \zeta\ cos.\ n -$ $(sin.\ \alpha^2\ cos.\ l - cos.\ \alpha\ cos.\ \zeta\ cos.\ m - cos.\ \alpha\ cos.\ \gamma\ cos.\ n)\ tang.\ AJV)$. Subſtituons ici la valeur de $tang.\ AJV = -\frac{d\alpha cos.\alpha cos.\gamma - d\gamma sin.\alpha sin.\gamma}{d\alpha\ cos.\ \zeta}$ & parce que $d\alpha\ sin.\alpha\ cos.\zeta + d\zeta\ sin.\zeta\ cos.\zeta + d\gamma\ sin.\gamma\ cos.\gamma = 0$, nous trouverons $d\phi\ sin.\ PJ^2 = (d\gamma\ cos.\zeta\ sin.\gamma - d\zeta sin.\zeta\ cos.\gamma)$ $cos.\ l + (d\alpha\ sin.\alpha\ cos.\gamma - d\gamma\ cos.\alpha\ sin.\gamma)\ cos.\ m + (d\zeta\ cos.\alpha\ sin.\zeta$ $- d\alpha\ sin.\alpha cos.\zeta)\ cos.\ n$. Or, puiſque $cos.\ \alpha = \frac{x}{s}$; $cos.\ \zeta = \frac{y}{s}$; $cos.\ \gamma = \frac{z}{s}$ on aura $d\zeta\ sin.\zeta = \frac{y\,ds}{ss} - \frac{dy}{s}$ & $d\gamma\ sin.\gamma = \frac{z\,ds}{ss}$ $- \frac{dz}{s}$; donc $d\gamma\ cos.\zeta\ sin.\gamma - d\zeta\ sin.\zeta\ cos.\gamma = \frac{z\,dy - y\,dz}{ss} =$ $\frac{du\ (Bzz - Cyy)}{ss\ yz} = \frac{x\,dt\ (Bzz - Cyy)}{ss}$; & partant, à cauſe de $Bzz - Cyy = B\Theta - C\Delta$ (76), nous aurons $d\phi$ $= \frac{dt\ (x\ (B\Theta - C\Delta)\ cos.\ l + y\ (C\Gamma - A\Theta)\ cos.\ m + z\ (A\Delta - B\Gamma)\ cos.\ n)}{E - 2ABCu - vv}$.

91. Subſtituons enfin pour $cos.\ l$, $cos.\ m$ & $cos.\ n$, leurs valeurs trouvées; & puiſque

$aaxx\ (B\Theta - C\Delta) + bbyy\ (C\Gamma - A\Theta) + cczz\ (A\Delta - B\Gamma) = -H + 2ABCFu;$

$bbccxx\ (B\Theta - C\Delta)^2 + aaccyy\ (C\Gamma - A\Theta)^2 + aabbzz\ (A\Delta - B\Gamma)^2 =$

$(aaxx + bbyy + cczz)\ (A^2a^2y^2z^2 + B^2b^2x^2z^2 + C^2c^2x^2y^2) -$

$xxyyzz\ (Aaa + Bbb + Ccc)^2 = F\ (H - 2ABCGFu);$

$Aaa\ (B\Theta - C\Delta) + Bbb\ (C\Gamma - A\Theta) + Ccc\ (A\Delta - B\Gamma) = ABCF;$

de-là nous concluons $\frac{d\phi\ (E - 2ABCu - vv)}{dt} = \frac{\Lambda\ (H - 2ABCFu)}{G}$

$+ \frac{F(H - 2ABCFu)\sqrt{(G - \Lambda\Lambda)}}{G\sqrt{(K - 2ABCGu)}}\ sin.\ U + \frac{ABCFxyz\sqrt{(G - \Lambda\Lambda)}}{\sqrt{G\,(K - 2ABCGu)}}\ cos.\ U,$

où il faut remarquer qu'il y a $GG\,E - 2ABCu - vv) =$
$(G - AA)\,FF + G\,(K - 2ABCGu) - (G - AA)\,(K - 2ABCGu)\,\mathit{fin.}\,U^2$
$- 2AF\sqrt{}\,(G - AA)\,(K - 2ABCGu).\,\mathit{fin.}\,U.$

92. Puiſque $dU = \frac{dt\,(H - 2ABCFu)\sqrt{G}}{K - 2ABCGu}$ (76, 84)

& $du = xyz\,dt$, notre différentielle $d\phi$ ſera égale à une fraction, dont le numérateur eſt

$$-AdU\,(K - 2ABCGu)\sqrt{G} + FdU\sqrt{G}\,(G - AA)\,(K - 2ABCGu).\,\mathit{fin.}\,U$$
$$+ \frac{ABCFG\,du\sqrt{G}\,(G - AA)}{\sqrt{}\,(K - 2ABCGu)}.\,\mathit{cof.}\,U$$

& le dénominateur

$$(G - AA)\,FF - G\,(K - 2ABCGu) - 2AF\sqrt{}\,(G - AA)\,(K - 2ABCGu).\,\mathit{fin.}\,U$$
$$- (G - AA)\,(K - 2ABCGu).\,\mathit{fin.}\,U^2.$$

Pour abréger cette formule, ſuppoſons $\sqrt{}\,(K - 2ABCGu) = s$ & $\sqrt{}\,(G - AA) = h$, deſorte que $ABCG\,du = -s\,ds$, & le numérateur ſera

$$-AssdU\sqrt{G} + FhsdU\sqrt{G}.\,\mathit{fin.}\,U - Fhds\sqrt{G}.\,\mathit{cof.}\,U$$

& le dénominateur

$$hhFF + Gss - 2AFhs\,\mathit{fin.}\,U - hhss\,\mathit{fin.}\,U^2$$

93. Ayant introduit ces valeurs abrégées, nous aurons à intégrer cette formule

$$d\varphi = \frac{-AssdU + FhsdU\,\mathit{fin.}\,U - Fhds\,\mathit{cof.}\,U}{FFhh + Gss - 2AFhs\,\mathit{fin.}\,U - hhss\,\mathit{fin.}\,U^2}\sqrt{G},$$ laquelle, à cauſe de $hh = G - AA$, ſe réduit à

$$d\varphi = \frac{-AssdU + FhsdU\,\mathit{fin.}\,U - Fhds\,\mathit{cof.}\,U}{(Fh - As\,\mathit{fin.}\,U)^2 + Gss\,\mathit{cof.}\,U^2}\sqrt{G},$$ dont l'intégrale eſt évidemment

$$\varphi = \mathit{Arc.\,tang.}\,\frac{Fh - As\,\mathit{fin.}\,U}{s\,\mathit{cof.}\,U.\sqrt{G}} \text{ ou bien } \mathit{tang.}\,\varphi = \frac{Fh - As\,\mathit{fin.}\,U}{s\,\mathit{cof.}\,U.\sqrt{G}}.$$

Cette formule, en reſtituant pour s & h les valeurs ſuppoſées, ſe réduit à celle-ci

$$\mathit{tang.}\,\varphi = \frac{F\sqrt{(G - AA)} - A\,\mathit{fin.}\,U\sqrt{(K - 2ABCGu)}}{\mathit{cof.}\,U\sqrt{G\,(K - 2ABCGu)}}.$$

94. On peut donc trouver cet angle $QPJ = \phi$ indépendamment de la quantité v, où je n'ai pas introduit une nouvelle constante, puisque le cercle fixe PQS peut être établi à volonté. Donc, supposant cet angle ϕ connu, puisque nous venons de trouver $s\,sin.\,PJ = \sqrt{(E - 2ABCu - vv)}$, cette quantité est égale à $\frac{\sqrt{((Eh - As\,sin.U)^2 + Gss\,cos.U^2)}}{G}$, & partant à $\frac{s\,cos.U}{cos.\phi\sqrt{G}}$; d'où il s'ensuit que $s\,sin.PJ = \frac{\sqrt{(K - 2ABCGu)}}{\sqrt{G}} \cdot \frac{cos.U}{cos.\phi}$; $sin.PJ = \frac{\sqrt{(K - 2ABCGu)}}{\sqrt{G(E - 2ABCu)}} \cdot \frac{cos.U}{cos.\phi}$ & $cos.PJ = \frac{AF + \sqrt{(G - AA)}(K - 2ADCGu).sin.U}{G\sqrt{(E - ABCu)}}$.

Or, ayant trouvé l'angle $QPJ = \phi$, il en faut retrancher l'angle APJ pour avoir $QPA = \lambda$; pour cet effet, nous avons $sin.APJ = \frac{x\,cos.m - y\,cos.n}{s\,sin.PJ.sin.l}$ & $cos.APJ = \frac{x\,sin.l^2 - y\,cos.l\,cos.m - z\,cos.l\,cos.n}{s\,sin.PJ.sin.l}$.

Voici donc la solution de ce problême :

Un corps solide, d'une figure quelconque, n'étant sollicité par aucune force, si on lui imprime un mouvement quelconque, déterminer la continuation de ce mouvement.

95. Si le corps a un mouvement progressif, qui demeure perpétuellement le même, qu'on l'en dépouille, ensorte que son centre de gravité demeure en repos; & la question revient à déterminer le mouvement de rotation, ou déterminer pour chaque temps écoulé, tant l'axe de rotation que la vitesse angulaire. Pour cet effet, il faut considérer les trois axes principaux du corps, qui soient (*fig.* 3) GA, GC, GE, & par rapport à eux les momens d'inertie Maa, Mbb, Mcc. Rapportons le corps à une sphère fixe décrite autour du centre de gravité du corps G (*fig.* 5), & qu'après le

temps $= t$ secondes, les axes principaux du corps répondent aux points A, C, E, dans la surface de la sphère & l'axe de rotation au point J, autour duquel le corps tourne dans le sens ACE, avec la vîteſſe angulaire $= \varsigma$ où ς marque l'angle décrit dans une seconde, le sinus total ou le rayon de la sphère étant $= 1$.

96. Posons pour ce temps de t secondes, écoulé depuis le commencement, $\varsigma cos.AJ = x$; $\varsigma cos.CJ = y$; $\varsigma cos.EJ = z$; & soit pour abréger, $\frac{bb-cc}{aa} = A$; $\frac{cc-bb}{bb} = B$; $\frac{aa-bb}{cc} = C$. Cela posé, s'il fut au commencement $x = \sqrt{\Gamma}$, $y = \sqrt{\Delta}$, $z = \sqrt{\Theta}$, & partant, la vîteſſe angulaire $\sqrt{(\Gamma+\Delta+\Theta)}$, il faut intégrer cette équation $dt = \frac{du}{\sqrt{(\Gamma+2Au)(\Delta+2Bu)(\Theta+2Cu)}}$, enſorte que faiſant $t = o$, il devienne $u = o$: de-là on aura pour le temps indéfini t la valeur de u; & enſuite $x = \sqrt{(\Gamma+2Au)}$; $y = \sqrt{(\Delta+2Bu)}$; $z = \sqrt{(\Theta+2Cu)}$; d'où l'on tirera la vîteſſe angulaire $\varsigma = \sqrt{(\Gamma+\Delta+\Theta-2ABCu)}$, puiſque $A + B + C = -ABC$. Après cela, on connoîtra aiſément les arcs JA, JC, JE des formules $cos.JA = \frac{x}{\varsigma}$; $cos.JC = \frac{y}{\varsigma}$; $cos.JE = \frac{z}{\varsigma}$, qui déterminent la ſituation de l'axe de rotation GJ par rapport aux axes principaux du corps.

97. Enſuite, pour trouver la poſition des axes principaux à l'égard de la ſphère fixe, où je prends à plaiſir un point fixe P avec un cercle fixe PQS, poſons les arcs $PA = l$; $PC = m$; $PE = n$; & ſoit pour abréger $\Gamma+\Delta+\Theta = E$; $\Gamma aa+\Delta bb+\Theta cc = F$; $\Gamma a^4+\Delta b^4+\Theta c^4 = G$; $AAaa\Delta\Theta+BBbb\Gamma\Theta+CCcc\Gamma\Delta = H$; $AAa^4\Delta\Theta+BBb^4\Gamma\Theta+CCc^4\Gamma\Delta = K$. Qu'on cherche maintenant un arc ou angle U, deſorte que U ſoit $= \int \frac{(H-2ABCFu)\,du\sqrt{G}}{(K-2ABCGu)\sqrt{(\Gamma+2Au)(\Delta+2Bu)(\Theta+2Cu)}}$.

qui renferme une conſtante arbitraire, outre laquelle on en introduira encore une autre α, & on aura

$$cof.\, l = \frac{\Lambda aax}{G} + \frac{bbccx\,(B\Theta - C\Delta)\sqrt{(G - \Lambda\Lambda)}}{G\sqrt{(K - 2ABCGu)}} \cdot sin.\, U + \frac{Aaayz\sqrt{(G - \Lambda\Lambda)}}{\sqrt{G}(K - 2ABCGu)} \cdot cof.\, U$$

$$cof.\, m = \frac{\Lambda bby}{G} + \frac{aaccy\,(C\Gamma - A\Theta)\sqrt{(G - \Lambda\Lambda)}}{G\sqrt{(K - 2ABCGu)}} \cdot sin.\, U + \frac{Bbbxz\sqrt{(G - \Lambda\Lambda)}}{\sqrt{G}(K - 2ABCGu)} \cdot cof.\, U$$

$$cof.\, n = \frac{\Lambda ccz}{G} + \frac{aabbz\,(A\Delta - B\Gamma)\sqrt{(G - \Lambda\Lambda)}}{G\sqrt{(K - 2ABCGu)}} \cdot sin.\, U + \frac{Cccxy\sqrt{(G - \Lambda\Lambda)}}{\sqrt{G}(K - 2ABCGu)} \cdot cof.\, U.$$

98. Pour ces deux conſtantes, dont l'une eſt α & l'autre renfermée dans l'arc U, il les faut prendre enſorte que pour le commencement, où $t = o$ & $u = o$, les arcs l, m, n deviennent auſſi grands qu'ils ont été préciſément alors; car quoiqu'il y en ait trois, il ſuffit d'en avoir déterminé deux, à cauſe de leur relation $cof.\, l^2 + cof.\, m^2 + cof.\, n^2 = 1$. Enfin, pour la poſition à l'égard du cercle PQS, ſi nous poſons l'angle $JPQ = \phi$, nous aurons, en introduiſant une nouvelle conſtante pour l'ajuſter à l'état initial

$$tang.\,(\phi + P) = \frac{F\sqrt{(G - \Lambda\Lambda)} - \Lambda\, sin.\, U.\sqrt{(K - 2ABCGu)}}{cof.\, U.\sqrt{G\,(K - 2ABCGu)}}\text{; or,}$$

$$sin.\, APJ = \frac{z\, cof.\, m - y\, cof.\, n}{\alpha\, sin.\, PJ.\, sin.\, l} \;\&\; \alpha\, sin.\, PJ = \frac{\sqrt{(K - 2ABCGu)}}{\sqrt{G}} \cdot \int \frac{cof.\, U}{cof.\,(\phi + P)}.$$

Par ces formules, le problême propoſé eſt parfaitement réſolu.

Autre ſolution du même problême.

99. La ſolution précédente n'eſt ſi compliquée que parce qu'elle ſe rapporte en général à un point fixe quelconque P & à un cercle fixe quelconque PQS, d'où il doit y entrer un grand nombre de conſtantes. Mais, puiſque ces lieux fixes ſont arbitraires, on les peut établir enſorte que nos formules deviennent beaucoup plus ſimples. La conſtante α dépendant principalement du point P, rien n'empêche qu'on ne le prenne au

commencement, enſorte que l'on ait $G - AA = 0$ ou $A = \sqrt{G} = \sqrt{(\Gamma a^4 + \Delta b^4 + \Theta c^4)}$. Alors, ayant trouvé l'angle U comme ci-deſſus, on aura, par des formules fort ſimples, $cof.\ l = \frac{aax}{\sqrt{G}}$; $cof.\ m = \frac{bby}{\sqrt{G}}$; $cof.\ n = \frac{ccz}{\sqrt{G}}$; & partant, pour déterminer ces arcs l, m, n, on n'a pas même beſoin de chercher l'angle U. Or, pour l'angle $JPQ = \phi$, on aura, en négligeant la conſtante P, cette équation $tang.\ \varphi = -\frac{ſin.\ u}{cof.U}$, ou bien $\phi = -U$, deſorte que

$$\varphi = -\int \frac{(H - 2ABCFu)\,du\sqrt{G}}{(K - 2ABCGu)\sqrt{(\Gamma + 2Au)(\Delta + 2Bu)(\Theta + 2Cu)}}.$$

100. Mais ayant exprimé ſi commodément les arcs l, m & n, on peut immédiatement déterminer les angles $QPA = \lambda$; $QPC = \mu$; $QPE = \nu$ par les premières formules n°. VII, VIII & IX; car puiſque $ſin.\ l^2 = cof.\ m^2 + cof.\ n^2 = \frac{bbyy + cczz}{G} = \frac{G - aaxx}{G}$ & $y\,cof.\ m + z\,cof.\ n = \frac{bbyy + cczz}{\sqrt{G}} = \frac{F - aaxx}{\sqrt{G}}$, nous aurons $d\lambda = \frac{-dt(F - aaxx)}{G - aaxx}\sqrt{G}$ ou bien $d\lambda = \frac{-du(\Delta bb + \Theta cc - 2Aaau)\sqrt{G}}{(\Delta b^4 + \Theta c^4 - 2Aa^4u)\sqrt{(\Gamma + 2Au)(\Delta + 2Bu)(\Theta + 2Cu)}}$.

Outre cela, puiſque $K = G(\Gamma + \Delta + \Theta) - FF$ nous trouvons,

$$cof.\ PJ = \frac{aa + bbyy + cczz}{2\sqrt{G}} = \frac{F}{\sqrt{G}(\Gamma + \Delta + \Theta - 2ABCu)} \text{ \& }$$

$$ſin.\ PJ = \frac{\sqrt{(K - 2ABCGu)}}{\sqrt{G}(\Gamma + \Delta + \Theta - 2ABCu)} \text{ \& de-là}$$

$$ſin.\ APJ = \frac{Aaayz\sqrt{G}}{\sqrt{(K - 2ABCGu)}(G - aaxx)} \text{ \& } cof.\ APJ = \frac{Gx\sqrt{(\Gamma + \Delta + \Theta - 2ABCu)} - Faax}{\sqrt{(K - 2ABCGu)}(G - aaxx)}$$

or, pour avoir le point P, on n'a qu'à prendre au commencement

$$cof.\ AP = aa\sqrt{\frac{\Gamma}{G}};\ cof.\ BP = bb\sqrt{\frac{\Delta}{G}};\ cof.\ EP = cc\sqrt{\frac{\Theta}{G}}.$$

FIN.

MÉMOIRE

SUR

L'ARRIMAGE DES NAVIRES.

Pour concourir au Prix proposé par l'Académie Royale des Sciences, pour l'année 1761.

Par M. l'Abbé Bossut, *Professeur Royal de Mathématiques aux Ecoles du Génie de Mezieres; Correspondant de l'*Académie Royale des Sciences *de Paris.*

Cette pièce est l'une des deux entre lesquelles le Prix a été partagé.

MÉMOIRE

SUR

L'ARRIMAGE DES NAVIRES.

Sur ſon centre fixé, le navire orgueilleux
Oſe braver des mers l'effort impétueux.

EXPOSITION DU SUJET.

Le ſujet du Prix propoſé par l'Académie-Royale des Sciences pour l'année 1761, conſiſte à déterminer *la meilleure manière de leſter & d'arrimer un vaiſſeau; & les changemens qu'on peut faire en mer à l'arrimage, ſoit pour faire mieux porter la voile au navire, ſoit pour lui procurer plus de vîteſſe, ſoit pour le rendre plus ou moins ſenſible au gouvernail.* Cette queſtion eſt aſſurément une des plus importantes & des plus curieuſes qu'on pût offrir aux recherches des géomètres. Je ne doute pas qu'elle ne faſſe naître pluſieurs vues utiles au progrès de la navigation. Je me ſuis efforcé de la traiter par une méthode nouvelle & toujours ſubordonnée aux beſoins de la pratique. Mon travail aura le ſuccès le plus flatteur que je deſire, s'il peut fixer quelques momens l'attention du tribunal éclairé à qui j'en fais hommage.

Je diviſerai ce mémoire en cinq chapitres. Dans

le premier, je remettrai ſous les yeux du lecteur les principales propoſitions d'hydroſtatique, d'hydraulique & de dynamique, qui me ſeront néceſſaires pour la ſolution du problême. Dans le ſecond, je déterminerai la meilleure manière de leſter & d'arrimer un vaiſſeau. Les trois autres ſeront reſpectivement deſtinés à l'examen des changemens qu'on peut faire en mer à l'arrimage, ou pour faire mieux porter la voile au navire, ou pour lui procurer plus de viteſſe, ou pour le rendre plus ou moins ſenſible au gouvernail. Cet ordre m'eſt indiqué par l'énoncé même du programme.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

I.

LORSQU'UN navire, ou en général un corps quelconque, flotte ſur un fluide, à chaque inſtant il eſt ſoulevé par le fluide de bas en haut, ſuivant la verticale, avec une force égale au poids du volume de fluide qu'il déplace.

Cela eſt également vrai, ſoit que le corps ſoit en repos, ſoit qu'il ſoit agité par des forces quelconques, pourvu néanmoins que dans ce dernier cas, la ſurface du fluide reſte toujours à même hauteur. J'ajoute cette reſtriction, parce que ſi le corps, en s'enfonçant plus ou moins, forçoit le fluide à monter ou à deſcendre, il y auroit une partie de l'effort du fluide déplacé, qui ſeroit employée à produire le mouvement d'aſcenſion ou de deſcenſion dont il s'agit. L'exactitude demandoit que nous fiſſions cette remarque; mais il eſt évident que ces

mouvemens doivent être ici regardés comme nuls; car le navire n'eſt qu'un point ſur la vaſte étendue des mers.

II.

Suppoſons le corps dans une immobilité abſolue ſur le fluide : il eſt clair que le poids du corps & la pouſſée verticale de l'eau ſe font équilibre, & que par conſéquent ces deux forces ſont égales & directement oppoſées. Or le poids du corps ſe réunit à ſon centre de gravité, & la pouſſée verticale de l'eau ſe réunit au centre de gravité de la partie ſubmergée, conſidérée comme homogène : par conſéquent ces deux centres de gravité ſeront néceſſairement placés ſur une même ligne verticale; en ſorte que ſi, par quelque cauſe que ce puiſſe être, l'un d'eux vient à s'écarter de cette ligne, le corps fera des oſcillations, à la manière des pendules.

III.

Mais ſi le corps étoit mu ſur le fluide par quelque force étrangère, comme, par exemple, un navire l'eſt par le vent, alors il réſulteroit, & de cette force, & de la réſiſtance de l'eau, une force verticale, qui ſoutiendroit une partie de ſon poids. Ainſi, en général, ce poids eſt égal à la réſultante de la pouſſée verticale de l'eau, & de toutes les autres puiſſances qui tendent à le ſoulever ſuivant la verticale.

IV.

Lorſqu'un fluide frappe perpendiculairement un plan en repos, la force du choc eſt en raiſon compoſée du plan, de la denſité du fluide, & du quarré de ſa viteſſe. Le choc ſeroit le même, ſi le plan alloit frapper le fluide en repos. Mais ſi le fluide &

le plan viennent à la rencontre l'un de l'autre, ou ſi l'un ſuit devant l'autre, le choc ſera en raiſon compoſée du plan, de la denſité du fluide, & du quarré de la ſomme ou de la différence des viteſſes du fluide & du plan (*a*).

V.

Si un fluide frappe obliquement un plan, ou le plan le fluide, la force du choc qui en réſulte perpendiculairement contre le plan, eſt, en général, en raiſon compoſée du plan, de la denſité du fluide, du quarré de la ſomme ou de la différence des viteſſes du fluide & du plan, & du quarré du ſinus de l'angle d'incidence du fluide ſur le plan.

VI.

Il réſulte des deux articles précédens que, lorſqu'on connoîtra par l'expérience l'impulſion directe d'un fluide, ſous une certaine viteſſe, contre un plan donné, on connoîtra auſſi l'impulſion d'un fluide quelconque, ſous une viteſſe différente, contre un plan différent, ſoit que le choc ſe faſſe directement ou obliquement.

Dans la pratique, on peut, ſuivant M. Bouguer (*Man. des vaiſſ. pag. 185*), ſuppoſer que l'impulſion de l'eau de mer, ſous une viteſſe d'un pied par ſeconde, contre un plan d'un pied quarré en ſurface, eſt équivalente à un poids d'une livre trois onces; & que celle du vent, ſous les mêmes conditions, équivaut à un poids d'un quarantième d'once.

VII.

Si un corps eſt pouſſé par une force qui paſſe par

(*a*) Cette règle, & la ſuivante qui en dépend, ne ſont pas vraies en rigueur; mais elles ſuffiſent pour la pratique, & je m'en ſervirai avec tous les géomètres qui ont écrit ſur ces matières.

ſon centre de gravité, toutes ſes parties marcheront d'un mouvement parallèle à la direction de la force imprimée, avec une viteſſe égale à cette force diviſée par la maſſe du corps.

VIII.

Mais ſi la force imprimée ne paſſe pas le centre de gravité du corps, ce centre ſera mu de la même manière que s'il ſe trouvoit ſur la direction de la force; & de plus le corps *pirouettera* ſur ce même point.

IX.

Sur ce principe, lorſqu'il s'agira de déterminer le mouvement d'un corps ſollicité par des forces quelconques & de directions quelconques,

1°. On trouvera le chemin du centre de gravité, en imaginant que toutes les puiſſances paſſent par ce centre avec des directions parallèles à celles qu'elles ont, & déterminant leur réſultante par les principes ordinaires de la méchanique. Cette réſultante ſera la force avec laquelle le centre de gravité ſera mu.

2°. Pour déterminer le pirouettement du corps autour de ſon centre de gravité, on pourra imaginer par ce centre un axe à volonté, ſur lequel tourne le corps, tandis que cet axe a lui-même un mouvement de nutation. Enſuite les règles de la méchanique fourniront le moyen de décompoſer & d'aſſigner les forces qui doivent produire chacun de ces mouvemens. C'eſt ainſi que M. d'Alembert a enviſagé la queſtion dans ſes *Recherches ſur la préceſſion des équinoxes* : ouvrage où ce grand problème a été réſolu pour la première fois.

X.

Si pluſieurs corpuſcules *A*, *B*, *D*, &c., liés en-

FIGURE I. ſemble d'une manière quelconque, tendent à tourner autour d'un point ou d'un axe C, la réſiſtance qu'ils oppoſeront au mouvement angulaire, ſera la même que ſi, en un ſeul & même point G, on ſubſtituoit, à la place du corps A, un corps exprimé par $\frac{A \times \overline{CA}^2}{\overline{CG}^2}$; à la place du corps B, un corps exprimé par $\frac{B \times \overline{CB}^2}{\overline{CG}^2}$; à la place du corps D, un corps exprimé par $\frac{D \times \overline{CD}^2}{\overline{CG}^2}$ &c.

D'où l'on voit que ſi on appelle dn une particule quelconque d'un corps ſenſible, z la diſtance de cette particule à un axe ſur lequel tourne le corps, a la diſtance d'un point donné à l'axe, on pourra, à la place du corps propoſé, ſubſtituer à la diſtance donnée a, un autre corps repréſenté par $\int \frac{zz\,dn}{a^2}$. Ainſi nommant de plus, F la force qui tend à faire tourner le corps, b ſon bras de levier, u la vîteſſe de rotation pour le rayon a, on aura, par le principe ordinaire du levier, $F \times b = u \times a \times \int \frac{zz\,dn}{a^2} = u \int \frac{zz\,dn}{a}$.

XI.

La ſomme des produits des particules d'un corps par les quarrés de leurs diſtances à un axe qui ne paſſe pas par ſon centre de gravité, eſt toujours égale à la ſomme des produits des mêmes particules, par les quarrés de leurs diſtances à un axe paſſant par le centre de gravité & parallèle au premier, plus au produit de la maſſe du corps multipliée par le quarré de la diſtance des deux axes.

CHAPITRE

CHAPITRE SECOND.

De la meilleure manière de leſter & d'arrimer un navire.

XII.

Les marins comprennent quelquefois ſous la dénomination générale de *leſt* tout ce qui compoſe la charge du navire; mais ils affectent plus particulièrement ce nom à ces corps étrangers & peſants qu'on place au fond du navire, ſoit pour le mettre en équilibre, ſoit pour faciliter ſes mouvements.

L'art de diſtribuer la charge de la manière convenable, eſt ce qu'ils appellent l'*arrimage*.

XIII.

Il n'eſt pas ici queſtion de diſcuter la figure du navire & de ſes parties, relativement aux bonnes qualités qui en dépendent. Cet examen préliminaire doit être fait par le conſtructeur inſtruit, qui trouvera tout ce qu'on peut deſirer ſur ce ſujet dans la *Science navale* de M. Euler, dans le *Traité du navire* de M. Bouguer, & dans l'*Architecture navale* de M. Duhamel. Il s'agit uniquement de leſter & d'arrimer un navire *donné*, de la manière la plus avantageuſe.

XIV.

Suppoſant donc que le navire ait la figure requiſe, & qu'on ait tracé en conſéquence ſur ſon plan des belles *lignes d'eau*, c'eſt-à-dire, des lignes propres à diviſer facilement le fluide, & à favoriſer ſon impulſion ſur le gouvernail; le problême conſiſtera à diſtribuer tellement la charge, que le navire prenne en effet dans l'eau les lignes projettées. J'attribue ici à ces lignes toute la perfection deſirable; mais ſi

elles étoient défectueuſes, on verra dans la ſuite les changemens qu'il faut faire à l'arrimage pour leur en ſubſtituer d'autres.

XV.

Lorſqu'on aura fixé, d'après les conſidérations que je viens d'expoſer, la *carène* du navire, & qu'on aura déterminé de plus le centre de gravité de cette même carène, regardée comme homogène, il faudra faire en ſorte, en chargeant le navire (*art I & II*),

1°. Que le poids abſolu du navire, tout armé, ſoit égal au poids du volume d'eau déplacé par la carène. Le premier poids ſe connoîtra par le ſecond, qui eſt très-aiſé à calculer.

2°. Que le centre de gravité du poids total du navire, & celui de la carène, ſe trouvent dans une même ligne verticale.

Je ne conſidère ici que la ſimple flottaiſon primitive du navire, & je fais abſtraction de toutes les autres forces qui pourroient contribuer à ſoutenir une petite partie de ſon poids, dans le ſens de l'*art. III.*

XVI.

Il eſt viſible que le poids du navire eſt conſtant; mais qu'on peut diſtribuer diverſement ce poids, de manière cependant que ſon centre de gravité, & celui de la carène, toujours ſuppoſée homogène, ſoient dans une même ligne verticale. Or de toutes ces différentes diſtributions, il eſt clair qu'il faut choiſir celle qui maintiendra fixément le navire dans ſa première aſſiette, ou qui, du moins, le ramènera par les voies les plus douces, à cette première aſſiette, ſuppoſé qu'il vienne à la perdre. Par cet arrangement, le navire portera parfaitement la voile: avantage capital auquel ſont attachées tout-à-la-fois la ſureté & la facilité de la navigation.

XVII.

Or on ne peut pas parvenir à déterminer l'arrimage qui procure au navire la ſtabilité la plus avantageuſe, ſans connoître d'abord les mouvements qu'il prend, lorſque, venant à s'incliner, ſon centre de gravité & celui de la carêne ne ſe trouvent plus dans la même verticale. Ainſi le premier objet que nous devions nous propoſer eſt la détermination des mouvements dont il s'agit.

XVIII.

Les *bouffées* de vent & les chocs des lames ſont les cauſes qui font incliner le navire, & qui par-là occaſionnent les oſcillations que nous avons ici en vue. Toutes ces oſcillations ſe réduiſent à deux claſſes principales : les unes ſe font d'un bord à l'autre, & ſe nomment mouvements de *roulis ;* les autres ſe font ſuivant la longueur du navire, & s'appellent mouvements de *tangage*. De ces deux eſpèces d'oſcillations ſimples il réſulte très-ſouvent des oſcillations compoſées de roulis & de tangage, & même de rotation horiſontale. Je donnerai ci-deſſous la méthode générale pour déterminer tous ces mouvements. Lorſqu'ils ne ſe font ſentir que d'un bord à l'autre, ou que ſuivant la longueur, le problême ſe ſimplifie conſidérablement.

XIX.

Les géomètres qui ont écrit ſur ces matières n'ont pas manqué d'examiner les mouvements de roulis & de tangage. L'Académie elle-même a propoſé pour ſujets des prix des dernières années, de diminuer le plus qu'il eſt poſſible les mauvais effets qui en réſultent. Aujourd'hui il s'agit encore, du moins enpartie, de remplir le même objet, mais en ſe bornant uniquement aux reſſources que peut fournir l'ar-

rimage; au lieu qu'on pouvoit auparavant tirer parti de quelques changements faits à la figure même du navire. Je vais tâcher de réſoudre la queſtion de manière que la pratique en retire tout l'avantage poſſible.

XX.

Pour aller du plus ſimple au plus compoſé, je ne conſidérerai d'abord qu'un ſimple profil du navire, fait ou ſuivant ſa longueur, ou perpendiculairement à ſa longueur; & je ſuppoſerai que cette figure ſe balance autour d'un axe qui la traverſe perpendiculairement par ſon centre de gravité. Ce premier problême aura ſon application immédiate aux mouvements de roulis & de tangage de certains bâtiments uſités dans les pays du Nord & à la Chine, leſquels ont à-peu-près la figure de parallélepipèdes rectangles, ou de demi cylindres; & avec de légères additions, le même problême s'appliquera aux mouvements de roulis & de tangage de toutes ſortes de navires, comme on le verra bientôt.

Je prie le lecteur de ne pas perdre de vue que les oſcillations ſeront toujours cenſées fort petites, pour ne pas donner à ces problêmes une généralité ſuperflue & embarraſſante.

XXI.

PROBLEME I.

FIG. 2. *Suppoſons que ADHTEB ſoit la coupe longitudinale ou latitudinale d'un navire, laquelle ait ſon centre de gravité G ſur la verticale GC; que cette figure s'étant inclinée d'une quantité connue, elle enfonce dans l'eau la partie DHTE dont le centre de gravité E ſoit à une diſtance donnée de la verticale GC; qu'en ce moment elle ſoit abandonnée uniquement à l'action de ſa peſanteur & de la pouſſée verticale de l'eau; on demande les oſcillations qu'elle fera.*

SOLUTION.

Suivant l'article VIII, le centre de gravité de la figure montera verticalement, & en même temps la figure tournera sur ce centre. Tels sont les deux mouvements qu'il s'agit de déterminer.

Supposons que la figure partant de l'état fixé par l'énoncé du problême s'incline de manière qu'au bout d'un certain temps sa droite $z\,x$ soit sa section commune avec la surface de la mer. Comme les oscillations sont fort petites par hypothèse, il est clair que les droites $D\,E$, $z\,x$ peuvent être censées se couper au point C. Soit S le centre de gravité de $D\,E$. Du point F soient menées parallèlement à $D\,E$ & à $z\,x$, les droites $F\,f$, $F\,o$; & du centre de gravité G de la figure soient abbaissées sur $D\,E$ & sur $z\,x$ les perpendiculaires $G\,C$, $G\,L$. Soient $G\,g$ l'espace parcouru verticalement par le centre de gravité, $Q\,q$ l'espace parcouru circulairement par un point donné à une distance donnée du point G. Cela posé,

Soient
- $C\,E = a$
- $C\,D = b$
- $D\,E = a + b = c$
- $C\,S = k$
- $F\,f = f$
- $G\,f = h$
- $G\,Q = m$
- $G\,g$ ou $C\,c = x$
- $Q\,q = y$
- L'élément du temps $= dt$
- L'aire de la figure $A\,D\,H\,T\,E\,B = N$
- L'élément de cette aire $= dN$
- La distance indéterminée d'un élément dN au point $G = z$
- L'aire de la partie $D\,H\,T\,E = M$
- La gravité $= g$
- La densité de la figure $A\,D\,H\,T\,E\,B = p$
- La densité de l'eau $= \pi$

La masse de la figure proposée sera $= p\,N$; son

poids $= gpN$. La maſſe d'eau déplacée par la partie $DHTE$ ſera $= \pi M$; ſon poids $= g\pi M$.

Maintenant, il eſt viſible que la nouvelle partie plongée ζhtx eſt égale à la première $DHTE$, moins l'eſpace $DEed$, plus le triangle ECx, moins le triangle $Dc\zeta$. Or

1°. L'aire $DEed$. qu'on peut prendre pour un rectangle, $= cx$;

2°. Les deux triangles rectangles GQq, CEx, qui ſont évidemment ſemblables, puiſque les côtés qui forment les angles aigus G & C ſont perpendiculaires chacun à chacun, donneront $\frac{aay}{2m}$ pour l'aire du triangle ECx;

3°. De même l'aire du triangle $DC\zeta = \frac{bby}{2m}$.

Par conſéquent le volume de la nouvelle partie enfoncée $= M - cx + \frac{aay}{2m} - \frac{bby}{2m}$ & le poids du pareil volume d'eau $= g\pi.\left(M - cx + \frac{aay}{2m} - \frac{bby}{2m}\right)$. Retranchant de ce poids, le poids gpN de la figure, on aura $g\pi\left(M - cx + \frac{(aa-bb)y}{2m}\right) - gpN$ pour la force abſolue qui ſoulève la figure ſuivant la verticale : c'eſt pourquoi le principe ordinaire des forces accélératrices donnera cette première équation $\left(g\pi\left(M - cx + \frac{(aa-bb)}{2m}\right) - gpN\right) dt^2 = pNddx$.

Pour en trouver une ſeconde, on obſervera que comme $\zeta htx = DHTE - DEed + ECx - DC\zeta$, le moment de ζhtx par rapport à l'axe de rotation, eſt égal à la ſomme des moments de toutes les parties qui compoſent le ſecond membre, en prenant ces moments avec des ſignes convenables. Or faiſant d'abord abſtraction de la denſité de l'eau & de la peſanteur.

1°. Le moment de $DLTE = DHTE \times Fo = DHTE \times (Ff - fk) = M\left(f - \frac{hy}{m}\right)$;

2°. Le moment de $DEed = ckx$, & ce moment doit être pris négativement;

3°. Le moment du triangle $ECx = \frac{a^3 y}{3m}$, & ce moment doit être pris négativement;

4°. Le moment du triangle $DCz = \frac{b^3 y}{3m}$, & ce moment doit être pris positivement.

Par conséquent, tous les signes bien combinés; le moment de $zhtx = M\left(f - \frac{hy}{m}\right) + ckx - \frac{a^3 y}{3m} - \frac{b^3 y}{3m}$; & faisant entrer dans cette expression la densité de l'eau & la pesanteur, on aura $g\pi.\left(M\left(f - \frac{hy}{m}\right) + ckx - \frac{(a^3 + b^3)y}{3m}\right)$ pour le moment de la force absolue qui tend à faire tourner la figure sur son centre de gravité. Or à la place de la masse de cette figure, on peut (*art. x*) substituer en Q une masse représentée par $p\int\frac{\zeta\zeta dN}{m^2}$: multipliant cette masse par son bras de levier m, on aura $p\int\frac{\zeta\zeta dN}{m}$ pour le moment de la résistance qu'elle fait à parcourir l'espace Qq : donc par le principe des forces accélératrices, on aura cette nouvelle équation, $g\pi\left(M\left(f - \frac{hy}{m}\right) + ckx - \frac{(a^3 + b^3)y}{3m}\right)dt^2 = pddy\int\frac{\zeta\zeta dN}{m}$. Je n'intègre pas les deux équations que j'ai trouvées, parce que j'en intègrerai de toutes pareilles que fournira le problême suivant.

XXII.

PROBLEME II.

Déterminer les mouvements de roulis ou de tangage de toutes ſortes de navires.

Je ſuppoſe, conſéquemment à cet énoncé, que le centre de gravité de la carêne demeure toujours, du moins ſenſiblement, ou dans le plan longitudinal mené de la proue à la poupe, lorſqu'il s'agit des mouvements de tangage; ou dans le plan latitudinal paſſant par le centre de gravité du navire, lorſqu'il s'agit des mouvements de roulis; en ſorte que le navire puiſſe être cenſé ſe balancer ſuivant l'un ou l'autre plan. Ce cas eſt celui des oſcillations ſimples.

SOLUTION.

Pour fixer l'imagination, ſuppoſons qu'il s'agiſſe des mouvements de tangage; on verra bien les changements qu'il faudra faire au diſcours, pour l'adapter aux mouvements de roulis.

FIG. 2, 3, 4. Soient $ADHTEB$ (*fig.* 2) la coupe longitudinale du navire, coupe dans laquelle ſe trouvent les centres de gravité du navire & de la carêne: $DOEo$ (*fig.* 3) la coupe horiſontale faite à fleur d'eau: C le point ou la verticale GC élevée par le centre de gravité du navire rencontre l'axe DE. Par le point C ſoit mené perpendiculairement à DE l'axe $\varepsilon\delta$, & ſoit faite ſuivant cet axe la coupe latitudinale $\varepsilon V\delta$ (*fig.* 4) dans laquelle la droite $\mu G\zeta$ repréſente un axe perpendiculaire à $ADHTEB$, & paſſant par le centre de gravité G. Suppoſons, comme dans l'article précédent, que le navire s'incline du côté de E. Soient (*fig.* 2) Gg l'eſpace parcouru verticalement par le centre de gravité, Qq l'eſpace parcouru circulairement à une diſtance donnée du centre G.

Cela

Cela posé, il est visible que tout sera le même que ci-dessus, à cela près qu'au lieu du rectangle $DEed$ (*fig.* 2), il faudra considérer un prisme ayant pour base la figure $DOEo$ (*fig.* 3), & pour hauteur Gg; qu'au lieu des triangles ECx, $DC\zeta$ (*fig.* 2), il faudra considérer les onglets formés par la rotation des espaces $E\varepsilon\delta$, $D\varepsilon\delta$ (*fig.* 3) autour de l'axe $\varepsilon\delta$; qu'enfin, au lieu de la somme des produits des particules de la simple surface $ADHTEB$ par les quarrés de leurs distances au point G, il faudra prendre la somme des produits des particules du solide même du navire par les quarrés de leurs distances à l'axe $\mu G\mathfrak{G}$. Ainsi

Supposant

L'aire $E\varepsilon\delta$. . . . . $= aa$

L'aire $D\varepsilon\delta$. . . . . $= bb$

L'aire entière $DEd\delta$. . . . . $= aa + bb = cc$

La distance SC du centre de gravité S de la coupe de flottaison à la verticale GC. . . . . $= k$

La distance initiale Ff du centre de gravité F de la carène à la verticale GC. . . . . $= f$

Gf. . . . . $= h$

GQ. . . . . $= m$

Gg. . . . . $= x$

Qq. . . . . $= y$

L'élément du temps. . . . . $= dt$

Le volume du navire. . . . . $= N$

La somme des produits des particules de ce volume par les quarrés de leurs distances à l'axe $\mu G\mathfrak{G}$. . . . $= R$

L'onglet formé par la rotation de l'aire $E\varepsilon\delta$ autour de l'axe $\varepsilon\delta$. . . . . $= \mathfrak{G}a^2y$ *

Le moment du même onglet par rapport à l'axe de rotation $\mu G\mathfrak{G}$. . . . . $= \theta a^3y$

L'onglet formé par la rotation de l'aire $D\varepsilon\delta$ autour de l'axe $\varepsilon\delta$. . . . . $= \mathfrak{G}'b^2y$

Le moment du même onglet par rapport à l'axe $\mu G\mathfrak{G}$. $= \theta' b^3y$

Le volume de la carène au premier instant. . . . . $= M$

La gravité. . . . . $= g$

La densité de la charge. . . . . $= p$

La densité de l'eau. . . . . $= \pi$

* *Les lettres* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$, θ, θ' *sont des coëfficients constants, qui se déterminent par les principes ordinaires de la géométrie.*

on aura évidemment les deux équations suivantes

$$(A)\quad \left(g\tau\left(M-ccx+(\mathfrak{C}a^2-\mathfrak{C}'b^2)y\right)-gpN\right)dt^2=pNdx;$$

$$(B)\quad g\tau\left(M\left(f-\frac{h}{n}\right)+cckx-(\mathfrak{C}a^3+\mathfrak{C}'b^3)y\right)dt^2=\frac{pRddy}{m}.$$

Il ne reſte plus qu'à intégrer ces deux équations : c'eſt ce que nous ferons dans la ſuite.

XXIII.

Remarque premiere. Si, tout étant d'ailleurs le même, le centre de gravité F de la carène au premier inſtant du mouvement, au lieu d'être placé en avant de la verticale GC, comme on l'a ſuppoſé, étoit placé en arrière de la même ligne, à la place de l'équation (A), on auroit l'équation

$$(C)\quad \left(g\tau\left(M-ccx-(\mathfrak{C}a^2-\mathfrak{C}'b^2)y\right)-gpN\right)dt^2=pNddx;$$

& à la place de l'équation (B), on auroit l'équation

$$(D)\quad g\tau\left(M\left(f-\frac{h}{n}\right)-cckx-(\mathfrak{C}a^3+\mathfrak{C}'b^3)y\right)dt^2=\frac{pRddy}{m}.$$

D'où l'on voit que ſuppoſant toujours la verticale GC placée en avant du centre de gravité S de la coupe de flottaiſon, les équations (A) & (B) & les équations (C) & (D) auront deux à deux le même ſigne au troiſième terme de leur premier membre, pourvu que l'on ait $\mathfrak{C}a^2>\mathfrak{C}'b^2$. Il n'eſt pas moins viſible que ſi la verticale GC paſſoit en arrière du point S, les équations auroient encore deux à deux le même ſigne au troiſième terme de leur premier membre, pourvu que l'on eût $\mathfrak{C}'b^2>\mathfrak{C}a^2$. Or dans le premier cas on a en effet $\mathfrak{C}a^2>\mathfrak{C}'b^2$, & dans le ſecond on a $\mathfrak{C}'b^2>\mathfrak{C}a^2$. Ainſi on peut établir que les équations des deux balancements auront toujours le même ſigne au troiſième terme de leur premier membre. C'eſt ce qu'il faut bien obſerver pour la ſuite.

XXIV.

Remarque deuxéme. Je ferai encore ici

une remarque qui n'auroit pas sans doute échappé au lecteur, mais qui entre dans le plan que je me suis proposé de rendre ce mémoire clair & facile.

La partie du navire enfoncée dans l'eau au premier instant du mouvement, n'est pas la carène primitive qui, avant l'inclinaison, occupoit la place d'un volume d'eau de même poids que le navire. Si on appelle μ cette carène primitive, on verra aisément par ce qui précède que $M = \mu \pm \left(\mathcal{G}a^2 - \mathcal{G}'b^2\right)\frac{mf}{h} + cc\downarrow$. $\downarrow$ étant la hauteur verticale parcourue par le centre de gravité du navire, hauteur qui dépend de l'inégalité des poussées des deux onglets $\frac{\mathcal{G}a^2mf}{h}$, $\frac{\mathcal{G}'b^2mf}{h}$ & du coup qui a produit l'inclinaison primitive. Cette quantité $\downarrow$ sera toujours facile à déterminer ou par le calcul ou par estime. On peut encore observer que le point F ne sera jamais fort éloigné du point qu'occupe actuellement le centre de gravité de la carène primitive.

EXAMEN PARTICULIER du cas où la verticale élevée par le centre de gravité du navire, passe par le centre de gravité du plan de flottaison.

XXV.

Quoique le cas dont il s'agit puisse se tirer sans peine du problême général, j'ai cru devoir le traiter ici à part, parce qu'il a effectivement lieu dans plusieurs navires, & que d'ailleurs il fournit des résultats très-simples & très-propres à jetter du jour sur toute cette matière. La nature observe dans la production des effets du même genre une gradation qui met à portée de juger de l'un par l'autre avec une exactitude suffisante, lorsque les circonstances essentielles ne diffèrent pas trop sensiblement. Ainsi pourvu que la verticale élevée par le centre de

gravité du navire ne paſſe qu'à peu de diſtance du centre de gravité du plan de flottaiſon, on pourra ſe ſervir ſans crainte des règles que nous allons établir, en attendant que nous donnions la méthode générale pour tous les cas.

XXVI.

Il eſt évident que dans l'hypothèſe propoſée, les deux onglets $\mathcal{C}a^2$, $\mathcal{C}'b^2$ ſont égaux : ainſi, ſuppoſant qu'on n'ait fait qu'écarter horiſontalement le centre de la carêne de ſa première poſition, le centre de gravité du navire ne doit ni monter ni deſcendre. Par conſéquent l'équation (A) eſt nulle, & l'équation (B) devient

$$(E)\quad ddy = \frac{g\pi}{pR}\left(Mfm - (Mh + 2m\theta a^3)y\right)dt^2 :$$

multipliant tout par dy, on aura

$$dy\,ddy = \frac{g\pi}{pR}\cdot\left(Mfm\,dy - (Mh + 2m\theta a^3)\,y\,dy\right)dt^2,$$

dont l'intégrale eſt

$$\frac{dy^2}{2} = \frac{g\pi}{pR}\cdot\left(Mfmy - (Mh + 2m\theta a^3)\,\frac{yy}{2}\right)dt^2.$$

Je n'ajoute point de conſtante, parce que $dt = o$ rend $dy = o$, comme cela doit être. Cette équation donne

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{2Mfm.y}{Mh+2m\theta a^3} - yy}} = dt\sqrt{\frac{g\pi}{pR}\cdot(Mh + 2m\theta a^3)} :$$

ſoit $\frac{Mfm}{Mh+2m\theta a^3} - y = u$; on aura la transformée

$$\frac{-du}{\sqrt{\frac{M^2f^2m^2}{(Mh+2m\theta a^3)^2} - uu}} = dt\sqrt{\frac{g\pi}{pR}\cdot(Mh + 2m\theta a^3)} :$$

d'où l'on tire $u = \frac{Mfm}{Mh+2m\theta a^3} \times cof.\, t\sqrt{\frac{g\pi}{pR}\cdot(Mh+2m\theta a^3)}$.

Par conſéquent

$$y = \frac{M f m}{Mh + 2m\theta a^3} \times \left(1 - cof. t \sqrt{\frac{g\pi}{pR} \cdot (Mh + 2m\theta a^3)} \right).$$

Il ne faut encore point de conſtante, parce que $t = o$ rend le coſinus qui entre dans le ſecond membre $= 1$, & par conſéquent $y = o$. Cette formule ſera pour nous la ſource de pluſieurs réflexions.

XXVII.

Si la quantité radicale qui multiplie t eſt réelle, & qu'on ſe rappelle que le coſinus d'un angle qui augmente à l'infini, de poſitif devient négatif, & réciproquement, on verra que la valeur de y ſera toujours infiniment petite. Or la quantité dont il s'agit ſera toujours réelle, lorſque h ſera poſitive; & h ſera toujours poſitive, lorſque le centre de gravité du navire tombera au deſſous de celui de la carêne. Ainſi le navire ne fera que des oſcillations infiniment petites, & ſera par conſéquent *ſtable* dans ſa poſition, lorſque l'arrimage ſera tel que le centre de gravité de la carêne ſoit placé au deſſus de celui du navire.

XXVIII.

Si h étoit négative, ou que le centre de gravité du navire fût au deſſus de celui de la carêne, & qu'on eût cependant $2m\theta a^3 > Mh$, le navire tendroit encore à ſe rétablir dans ſon premier état, mais non pas avec la même force que dans le premier cas.

XXIX.

Mais ſi h étant négative, on avoit $Mh > 2m\theta a^3$, alors en reprenant l'équation fondamentale (E), on trouveroit qu'il entreroit des logarithmes dans la valeur de y: d'où il ſuit que t augmentant, y augmenteroit auſſi: par conſéquent le navire ne feroit plus des oſcillations infiniment petites, comme on

l'a ſuppoſé, & il n'auroit par conſéquent pas de ſtabilité.

XXX.

Enfin ſi h étoit négative & qu'on eût $Mh = 2m\theta a^3$, l'équation fondamentale (E) donneroit $y = \frac{g\pi Mfm \cdot t^2}{2pR}$; d'où l'on voit que le navire manqueroit encore de ſtabilité. Veut-on un exemple bien ſimple de ce dernier cas? Suppoſons que tout le corps flottant ſe réduiſe à un cercle $ADHBP$ poſé verticalement ſur un fluide : ſoient le ſegment DHE la partie
FIGURE 5. enfoncée dans l'eau, GH la verticale paſſant par le centre G de gravité & de figure du cercle, F le centre de gravité du ſegment DHE : on aura, par la propriété du cercle, $DHE \times GF = \frac{2}{3}\overline{CE}^3$ ou, pour me ſervir de nos expreſſions, $Mh = m\theta a^3$. Par conſéquent le cercle mis une fois en mouvement continueroit à tourner : ce qui eſt conforme à l'expérience.

De-là réſulte une règle pour l'arrimage des navires de figure cylindrique; c'eſt de placer le centre de gravité de ces ſortes de navires au deſſous de l'axe du cylindre, ſans quoi ils verſeroient infailliblement à la première occaſion.

XXXI.

La même équation

$$y = \frac{Mfm}{Mh + 2m\theta a^3} \times \left(1 - \text{cof.}\, t\sqrt{\frac{g\pi}{pR} \cdot (Mh + 2m\theta a^3)}\right)$$

fournit le moyen de régler l'amplitude des balancements du navire.

Car quelle que puiſſe être la valeur (toujours réelle) de la quantité $\sqrt{\frac{g\pi}{pR} \cdot (Mh + 2m\theta a^3)}$, il eſt

évident que le facteur $1 - cos.\ t\sqrt{\frac{g\pi}{pR}.(Mh + 2mba^3)}$ augmentera depuis o jusqu'à ce qu'il soit égal au diamètre, après quoi il diminuera par les mêmes degrés : d'où il suit qu'il ne peut contribuer en rien à augmenter ou à diminuer un balancement dont la grandeur absolue pour le rayon m est toujours exprimée par $\frac{2Mfm}{Mh + 2mba^3}$. Mais plus on diminuera le premier facteur $\frac{Mfm}{Mh + 2mba^3}$, qui est déjà fort petit à cause de f qu'on suppose fort petit, plus on diminuera la grandeur absolue d'un balancement. Or pour diminuer ce facteur, nous n'avons qu'à augmenter h, c'est-à-dire qu'à faire descendre de plus en plus le centre de gravité du navire.

On voit donc que pour diminuer l'amplitude des balancements, l'opération se réduit à enfoncer de plus en plus le centre de gravité du navire. Toutes les distributions imaginables de la charge qui peuvent conduire à ce but, sont d'ailleurs absolument indifférentes : proposition assez singulière, qui n'avoit été qu'entrevue à l'aide d'une physique vague & incertaine.

XXXII.

Mais pour ne pas tomber dans l'inconvénient d'augmenter trop la vivacité des balancements en diminuant leur amplitude, il faut encore trouver le moyen de modérer cette vivacité : c'est à quoi on parviendra par la détermination du pendule *synchrone*.

Supposons un pendule de la longueur m : soient n la distance initiale du poids de ce pendule à la verticale, t' le temps qu'il emploie à parcourir l'espace y : on aura $d'dy = g.\left(\frac{n-y}{m}\right)dt'^2$ pour l'équation de ce pendule. Soit l la longueur du pendule synchrone cherché, on aura, par les propriétés des

pendules, $l : m :: dt^2 : dt'^2 = \frac{m\,dt^2}{l}$ & l'équation précédente deviendra $ddy = \frac{g}{l}\left(n - y\right) dt^2$: comparons cette équation avec l'équation (E) qu'on mettra d'abord ſous cette forme $ddy = \frac{g\pi}{pR} \cdot (Mh + 2m\theta a^3)\left(\frac{Mfm}{Mh + 2m\theta a^3} - y\right) dt^2$, nous aurons $\frac{g}{l} = \frac{g\pi}{pR} \cdot (Mh + 2m\theta a^3)$; d'où l'on tire $l = \frac{pR}{\pi \cdot (Mh + 2m\theta a^3)}$.

La diſtance initiale du poids de ce pendule à la verticale eſt $\frac{Mfm}{Mh + 2m\theta a^3}$.

Nous pouvons, à l'aide de cette formule, indiquer divers moyens d'arrimage, qui tendront à ralentir la vîteſſe des balancements du navire.

XXXIII.

On voit d'abord que ſi on diminue h dans le cas où le centre de gravité du navire eſt au deſſous de celui de la carêne, ou qu'on augmente h dans le cas où le centre de gravité du navire eſt au deſſus de celui de la carêne ; on voit, dis-je, qu'on augmentera la longueur du pendule, ou qu'on diminuera la viteſſe des balancements, parce que le numérateur de la valeur de l eſt moins augmenté par le changement de h, que le dénominateur n'eſt diminué. Cet expédient eſt ſouvent utile, & les marins s'en ſervent lorſque le vaiſſeau doit porter des effets très-peſants, tels que du fer, des canons, du plomb, &c. Si on mettoit ces gros poids ſur la *carlingue*, le vaiſſeau viendroit à ſa flottaiſon avant que d'avoir ſa cale toute remplie, & il auroit des mouvements fort rudes, qui tourmenteroient conſidérablement l'équipage & la mâture. Pour prévenir ces

ces inconvénients, on élève le centre de gravité par le moyen d'un *fardage* ſur lequel on poſe les poids dont il s'agit. Il faut prendre garde cependant de ne pas trop élever le centre de gravité, parce qu'on perd en même temps ſur la ſtabilité du navire (*art. XXVII* & *XXVIII*), & qu'on augmente l'amplitude de ſes oſcillations (*art XXXI*).

XXXIV.

Le moyen que nous venons de propoſer ne peut pas toujours être mis en uſage : car, ſi on avoit à embarquer avec ces corps très-peſants des marchandiſes très-légères, telles que des balles de cotton, il ne ſeroit pas poſſible d'occuper une partie de la cale par le fardage dont nous avons parlé ; mais on peut alors ſe ſervir de cet autre expédient qui eſt très-avantageux. Pour diminuer les mouvements de roulis, on diſtribuera les effets les plus peſants *bas-bord* & *ſtribord* dans les flancs du vaiſſeau ; &, pour diminuer les mouvements de tangage, on tranſportera vers la proue & vers la poupe quelques poids fort peſants, autant que la ſolidité de l'aſſemblage des pièces pourra le permettre. Par tous ces arrangements, le centre de gravité du navire ne changera pas ſenſiblement de place : ainſi la ſtabilité du navire demeurera ſenſiblement la même, & le navire fera les mêmes excurſions en amplitude ; mais la longueur du pendule ſynchrone augmentera conſidérablement.

XXXV.

Il ſe préſente un nouveau moyen qui participe des avantages des deux autres : ce moyen conſiſteroit à diſtribuer tellement la charge, que le centre de gravité & celui de la carêne fuſſent au même point. Alors la carêne ſeroi chargée proportionnellement à ſes capacités ; la ſtabilité demeureroit ſuffiſante ;

les excurſions ne ſeroient pas trop amples, & la longueur du pendule ſynchrone augmenteroit conſidérablement : mais il ne faut pas ſe flatter d'atteindre à ce but dans la pratique. Les emplacements fixes qu'on eſt obligé de donner à la plupart des effets qui compoſent la charge, y mettent un obſtacle peut-être inſurmontable. Par exemple, dans les vaiſſeaux de guerre, le canon eſt toujours au-deſſus de la ligne de flottaiſon. Pluſieurs autres agrès, tels que les poudres, les proviſions de bouche, les tonneaux de vin ou d'eau, &c., ont auſſi leurs places marquées. Tout ce que peut faire le navigateur eſt de tirer le meilleur parti du leſt proprement dit, & de quelques effets qu'on peut tranſpoſer ſans inconvénient.

XXXVI.

Scholie. Les maximes d'arrimage que je viens d'établir n'ont pas à tous égards le dégré d'exactitude & de préciſion que je me propoſe de leur donner dans la ſuite : mais elles ne peuvent pas manquer de répandre déjà la plus grande lumière ſur les manœuvres des marins : je dis les manœuvres des marins, car ici la pratique a devancé la théorie. Cela ne doit pas ſurprendre. Dans tous les arts qui peuvent intéreſſer la fortune ou le ſalut des hommes, l'induſtrie obſerve attentivement les réſultats des expériences, & en tire à la longue des moyens de perfection; mais on ne peut pas porter un jugement certain ſur l'avantage excluſif de ces moyens, avant qu'ils aient paſſé par le creuſet de la géométrie.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS (*A*) & (*B*) *de l'art. XXII.*

XXXVII.

Revenons maintenant à l'intégration des deux équations générales (*A*) & (*B*) de l'*article XXII*.

Pour abréger le calcul, nous ſuppoſerons $\frac{g\pi cc}{pN} = A$; $\frac{g\pi(6a^2 - 6'b^2)}{pN} = B$; $\frac{g\pi M - gpN}{pN} = C$; $\frac{g\pi(hM + m\theta a^3 + m\theta' b^3)}{pR} = D$; $\frac{g\pi mccK}{pR} = E$; $\frac{g\pi Mfm}{pR} = F$. En faiſant ces ſubſtitutions, on aura les deux transformées

$$(F)\quad ddx + Axdt^2 - Bydt^2 - Cdt^2 = o$$
$$(G)\quad ddy + Dydt^2 - Exdt^2 - Fdt^2 = o.$$

Cela poſé, je multiplie * l'une de ces équations, la ſeconde par exemple, par un coëfficient indéterminé K, & je l'ajoute à la première; ce qui me donne

(*H*) $ddx + Axdt^2 - Bydt^2 - Cdt^2 + Kddy + KDydt^2 - KExdt^2 - KFdt^2 = o$;

je fais en ſorte que $Ax - By + KDy - KEx$ ſoit un multiple de $x + Ky$, c'eſt-à-dire que je ſuppoſe $Ax - By + KDy - KEx = H(x + Ky)$, H étant un coëfficient indéterminé. Comparant les termes ſemblables de cette équation, j'aurai $H = A - KE$, $H = \frac{KD - B}{K}$. Ces deux équations donneront deux valeurs de K que j'appelle K & K', & deux valeurs de H que j'appelle H & H'. Soit $x + Ky = S$, $x + K'y = S'$: l'équation (*H*) donnera ces deux autres:

$$dds + HSdt^2 - (C + KF)\,dt^2 = o,$$
$$dds' + H'S'dt^2 - (C + K'F)\,dt^2 = o;$$

ou bien, en ſuppoſant $C + KF = G$, $C + K'F = G'$,

$$dds + HSdt^2 = Gdt^2,$$
$$dds' + H'S'dt^2 = G'dt^2;$$

* Voy. les Mém. de l'Acad. de Berlin, an. 1748, pag. 283.

d'où l'on tire aiſément

$$S = \frac{G}{H} \times \left(1 - \text{cof. } t\sqrt{H} \right),$$

$$S' = \frac{G'}{H'} \times \left(1 - \text{cof. } t\sqrt{H'} \right) :$$

par conſéquent

$$x = \frac{K}{K-K'} \times \frac{G'}{H'}\left(1 - \text{cof. } t\sqrt{H'}\right) - \frac{K'}{K-K'} \times \frac{G}{H}\left(1 - \text{cof. } t\sqrt{H}\right),$$

$$y = \frac{G}{H} \times \frac{(1 - \text{cof. } t\sqrt{H})}{K-K'} - \frac{G'}{H'} \frac{(1 - \text{cof. } t\sqrt{H'})}{K-K'} :$$

Ces deux valeurs de x & de y ſont complettes, parce qu'on doit avoir $x = 0$ & $y = 0$, lorſque $t = 0$; & que $t = 0$ donne $\text{cof. } t\sqrt{H} = 1$ & $\text{cof. } t\sqrt{H'} = 1$.

XXXVIII.

Il eſt évident que ſi H & H' ſont des quantités réelles & poſitives, les valeurs de x & de y ſeront infiniment petites, & que par conſéquent le navire ſera ſtable dans ſa poſition

XXXIX.

Mais ſi H & H' étoient des quantités réelles négatives, on trouveroit que les valeurs de x & de y dépendroient des logarithmes, & quainſi x & y augmenteroient ſans ceſſe : donc le navire n'auroit pas de ſtabilité.

XL.

Reſte encore à examiner ſi K & K', & par conſéquent auſſi H & H' ne peuvent pas devenir imaginaires ; ou ſi K & K' étant réelles, ces deux valeurs ne peuvent pas être égales entr'elles.

Les équations $H = A - KE$, $H = \frac{KD - B}{K}$ donnent

$$K = \frac{A - D + \sqrt{4BE + (D - A)^2}}{2E},$$

$$K' = \frac{A - D - \sqrt{4BE + (D - A)^2}}{2E},$$

$$H = \frac{A + D - \sqrt{4BE + (D - A)^2}}{2},$$

$$H' = \frac{A + D + \sqrt{4BE + (D - A)^2}}{2};$$

or par l'article XXIII les deux termes B & E ſont toujours de même ſigne : d'où il ſuit évidemment que les deux valeurs de K ne peuvent jamais être égales ni imaginaires.

XLI.

Par conſéquent, toutes les loix de la ſtabilité ſe réduiſent uniquement à faire en ſorte que h & H', qui ſont toujours réelles, ſoient toujours poſitives : or pour que H & H' ſoient poſitives, il faut

1°. Que $A + D$, c'eſt-à-dire $\frac{g\pi cc}{pN} + \frac{g\pi(Mh + m\theta a^3 + m\theta' b^3)}{pR}$ ſoit une quantité poſitive : condition, qui ſera toujours remplie, lorſque h ſera une quantité poſitive, & qui ne ceſſera d'avoir lieu que lorſque h étant négative, on auroit de plus

$$\frac{g\pi Mh}{pR} > \frac{g\pi cc}{pN} + \frac{g\pi(m\theta a^3 + m\theta' b^3)}{pR}.$$

2°. Qu'on ait $A + D > \sqrt{4BE + (D - A)^2}$, ou ſimplement $AD > BE$, c'eſt-à-dire

$$\frac{g\pi cc}{pN} \times \frac{g\pi(Mh + m\theta a^3 + m\theta' b^3)}{pR} > \frac{g\pi mccK}{pR} \times \frac{g\pi(\mathfrak{E}a^2 - \mathfrak{E}'b^2)}{pN}$$

condition qui ſera évidemment remplie, lorſque h ſera poſitive, & qui ne ceſſera d'avoir lieu que lorſque h étant négative, on auroit de plus le premier membre de cette inégalité plus petit que le ſecond.

XLII.

Sur toutes ces conſidérations, on voit qu'abſtraction

faite des meſures préciſes qu'on peut lire dans les Équations mêmes, la ſtabilité du navire, dans le cas général comme dans le cas de $\mathfrak{G}a^2 = \mathfrak{G}'b^2$, dépend de la profondeur du centre de gravité : on voit auſſi qu'on diminuera l'amplitude des oſcillations en augmentant cette profondeur. Il ne nous reſte plus qu'à déterminer la longueur du pendule ſur lequel doivent ſe règler ces oſcillations.

XLIII.

En comparant à l'équation ordinaire des pendules les équations qui expriment, l'une le mouvement d'aſcenſion du centre de gravité, l'autre le mouvement de rotation du navire autour du même centre, il eſt clair qu'en général ces deux mouvements ne ſont ni ſynchrones ni iſochrones dans chaque eſpèce ; mais ici je les ſuppoſerai tels, afin de me borner au cas le plus commun dans la nature : or pour remplir ces deux conditions tout-à-la-fois, il faut qu'on ait la proportion

$$Ax - By - C : Dy - Ex - F :: x : y ;$$

c'eſt-à-dire que le rapport de x à y doit être un rapport conſtant. Soit donc $y = rx$, r étant un coefficient conſtant que nous déterminerons ci-deſſous, & mettons cette valeur dans l'équation A, nous aurons

$$ddx = (A - Br)\left(\frac{C}{A - Br} - x\right) dt^2 :$$

d'où il eſt aiſé de conclure, par la méthode de l'article XXXII, que nommant l la longueur du pendule cherché, on aura

$$l = \frac{g}{A - Br} = \frac{p\,N}{\pi cc - \pi r\,(\mathfrak{G}a^2 - \mathfrak{G}b^2)}.$$

XLIV.

Quant à la valeur de r, elle ſe trouvera en cherchant une ſeconde valeur de l : mettons donc pour x

ſa valeur $\frac{y}{r}$ dans l'équation (G), & nous aurons

$$ddy = \left(D - \frac{E}{r}\right)\left(\frac{F}{D - \frac{E}{r}} - y\right) dt^2;$$

d'où l'on tire encore $l = \frac{g}{D - \frac{E}{r}}$. Comparant enſemble les deux valeurs de l, on aura $\frac{g}{A - Br} = \frac{g}{D - \frac{E}{r}}$, ou bien $Brr - Ar + Dr - E = 0$, équation qui donnera deux valeurs de r, dont chacune réſoudra également le problême.

Je ne m'étends pas davantage ſur ces recherches & ſur les conſéquences qui en réſultent, parce que ce détail n'a aucune difficulté.

XLV.

Scholie général. Juſqu'ici nous avons conſidéré ſéparément les mouvements de tangage & de roulis; mais il peut arriver, comme nous l'avons déjà dit, que le navire tangue & roule tout-à-la-fois, & qu'il ſoit même agité en toutes ſortes de ſens. Ainſi il nous reſte encore à examiner le ſyſtême de ces différents mouvements, pour réſoudre le problême dans toute ſa généralité. Ce n'eſt qu'à l'aide d'une pareille recherche qu'on peut donner aux règles de l'arrimage toute la perfection dont elles ſont ſuſceptibles.

XLVI.

Problème III.

Déterminer en général les oſcillations d'un navire,

lorſque ſon centre de gravité & celui de ſa carêne ne ſont pas dans une même ligne verticale.

SOLUTION.

Fig. 2, 3, 4, 6. Soient *ADHTEB* (*fig.* 2), la coupe longitudinale du navire, coupe dans laquelle ſe trouvent le centre de gravité du navire & la verticale *GC* élevée par ce centre : *DOEo* (*fig.* 3), la coupe horiſontal faite à fleur d'eau : $\varepsilon\nu\delta$ (*fig.* 4), la coupe latitudinale paſſant par le centre de gravité, coupe dans laquelle la droite $\mu G\zeta$ repréſente l'axe horiſontal paſſant par le centre de gravité ; & χy (*fig.* 6), la coupe faite par la verticale *GC* & par le point *F* centre de gravité de la carêne au premier inſtant : *L* (*fig.* 3), le point où la verticale élevée par le centre de gravité de la carêne rencontre l'axe diagonal χy. De ce point *L* ſoient abbaiſſées ſur *DE* & ſur $\delta\varepsilon$ les perpendiculaires *Lr*, *Lq*.

Maintenant (*art.* VIII), le navire montera verticalement & pirouettera ſur ſon centre de gravité. Or il eſt évident que, vu la place occupée par le centre de gravité *F* de la carêne au premier inſtant, les mouvements ſeront tels qu'il ſortira de l'eau

1°. Un priſme ayant pour baſe la figure *DOEo* (*fig.* 3), & pour hauteur le chemin du centre de gravité du navire ;

2°. Un onglet formé par la rotation de la partie *DoE* autour de *DE* ;

3°. Un onglet formé par la rotation de $D\varepsilon\delta$ autour de $\varepsilon\delta$;

Qu'au contraire il s'enfoncera dans l'eau

1°. Un onglet formé par la rotation de *DOE* autour de *DE* ;

2°. Un onglet formé par la rotation de $E\varepsilon\delta$ autour de $\varepsilon\delta$:

Ainſi

Ainſi

L'aire $E\varepsilon\delta$. . . . . $= aa$
L'aire $D\varepsilon\delta$. . . . . $= bb$
L'aire entière $DOEo$. . . . . $= aa + bb = cc$
La diſtance du centre de gravité S de cette aire au point C. . . . . $= k$
Lq. . . . . $= f$
Lr. . . . . $= f'$
La hauteur Gf (*fig.* 2) du centre de gravité de la carêne au deſſus de celui du navire. . . . . $= h$
La diſtance d'un point donné au centre de gravité du navire. . . . . $= m$
L'eſpace parcouru verticalement par le centre de gravité. . . . . $= x$
L'eſpace parcouru circulairement dans le plan $ADHIEB$ (*fig.* 2), à la diſtance m du centre de gravité. . . . $= y$
Suppoſant L'eſpace parcouru circulairement dans le plan $\varepsilon V\delta$ (*fig.* 4) à la même diſtance. . . . . $= z$
L'onglet formé par la rotation de $E\varepsilon\delta$ (*fig.* 3) autour de $\varepsilon\delta$. . . . . $= \mathfrak{G}a^2y$
Le moment de cet onglet par rapport à l'axe $\mu G\mathfrak{G}$ (*fig.* 4). . . . . $= \theta a^3y$
L'onglet formé par la rotation de $D\varepsilon\delta$ autour de $\varepsilon\delta$ (*fig.* 3). . . . . $= \mathfrak{G}'b^2y$
Le moment de cet onglet par rapport à $\mu G\mathfrak{G}$. . . $= \theta' b^3y$
L'onglet formé par la rotation de $D\varepsilon E$ ou de $D\delta E$ autour de DE. . . . . $= \mathfrak{G}''c^2z$
Le moment de cet onglet par rapport à l'axe longitudinal paſſant par le centre de gravité. . . $= \theta'' c^3z$
L'élément du temps. . . . . $= dt$
Le volume du navire. . . . . $= N$
Celui de la carêne au premier inſtant. . . . . $= M$
La gravité. . . . . $= g$
La denſité du leſt ou de la charge. . . . . $= p$
La denſité de l'eau. . . . . $= \pi$

il eſt viſible qu'après le temps t, la carêne du navire ſera $= M - ccx + \mathfrak{G}a^2y - \mathfrak{G}'b^2y + \mathfrak{G}''c^2z - \mathfrak{G}''c^2z = M - ccx + \mathfrak{G}a^2y - \mathfrak{G}'b^2y$, & que la force abſolue qui ſoulève le centre de graviré, ſera $= g\pi(M - ccx + (\mathfrak{G}a^2 - \mathfrak{G}'b^2)y) - gpN$; ainſi on aura

cette première équation

(A) $[g\tau(M - ccx + (\delta a^2 - \delta' b^2)y) - gpN]\,dt^2 = pN\,ddx.$

Il n'eſt pas moins clair par tout ce qui précède que le moment de la pouſſée de l'eau par rapport à l'axe longitudinal eſt $g\tau\left[M\left(f' - \frac{hz}{m}\right) - 2\theta'' c^3 z\right]$, & que le moment de la pouſſée par rapport à l'axe latitudinal eſt $g\tau\left[M\left(f - \frac{hy}{m}\right) + cckx - ba^3 y - b'b^3 y\right]$. Ces deux moments produiſent le pirouettement du navire ſur ſon centre de gravité, comme je vais l'expliquer.

Imaginons trois plans perpendiculaires entr'eux, qui conſervent la même poſition dans l'eſpace abſolu, de manière que leur ſyſtème ne faſſe que s'élever avec le centre de gravité du navire; le premier horiſontal & paſſant par le centre de gravité du navire; le ſecond vertical, paſſant par le centre de gravité du navire & par l'axe DE au premier inſtant; le troiſième vertical paſſant par le centre de gravité & par l'axe $\varepsilon\delta$ au premier inſtant. Ces trois plans ſont reſpectivement repréſentés par XGV, OGV, OGX (*fig.* 7), en ſorte que GV eſt la ſection commune des deux premiers, GX la ſection commune du premier & du troiſième, OG la ſection commune des deux derniers. Suppoſons qu'un élément dN du navire placé en R, durant l'inſtant dt, parcoure parallèlement à GV l'eſpace Rr, parallèlement à GX l'eſpace Rz, parallèlement à GO l'eſpace Rx. Du point R ſoit abbaiſſée ſur le plan VGX la perpendiculaire RZ, & ſoit tirée ZV perpendiculaire à GV. Soient, outre les dénominations précédentes,

FIGURE 7

GV . . . . . $= q$
VZ . . . . . $= r$
ZR . . . . . $= s$;

l'élément dN aura parallèlement à GV une force

représentée par $pdN \times \frac{ddq}{dt^2}$; parallèlement à GX une force représentée par $pdN \times \frac{ddr}{dt^2}$, parallèlement à GO une force représentée par $pdN \times \left(\frac{ddx + ddz}{dt^2}\right)$. En vertu de la première force, le navire aura autour de l'axe GX un moment de résistance représenté par $\int spdN.\frac{ddq}{dt^2}$, & autour de l'axe GO un moment représenté par $\int rpdN.\ \frac{ddq}{dt^2}$; en vertu de la seconde force, le navire aura autour de l'axe GV un moment représenté par $\int spdN.\ \frac{ddr}{dt^2}$, & autour de l'axe GO un moment représenté par $\int qpdN.\ \frac{ddr}{dt^2}$. Enfin en vertu de la troisième force, le navire aura autour de l'axe GX un moment représenté par $\int qpdN.\left(\frac{ddx + ddz}{dt^2}\right)$, & autour de l'axe GV un moment représenté par $\int rpdN.\ \left(\frac{ddx + ddz}{dt^2}\right)$. Or de tous ces moments particuliers, il est visible qu'il résultera autour de l'axe GV un moment unique représenté par $\int rpdN\left(\frac{ddx + ddz}{dt^2}\right) - \int spdN.\ \frac{ddr}{dt^2}$; autour de l'axe GX un moment unique représenté par $\int qpdN.\left(\frac{ddx + ddz}{dt^2}\right) - \int spdN.\ \frac{ddq}{dt^2}$; enfin autour de l'axe GO un moment unique représenté par $\int qpdN.\ \frac{ddr}{dt^2} - \int rpdN.\ \frac{ddq}{dt^2}$.

Cela posé, le premier de ces moments doit faire équilibre par sa réaction au moment de la poussée de l'eau par rapport à l'axe longitudinal : ainsi on aura l'équation

B) $$g\pi\left[M\left(f' - \frac{hz}{m}\right) - 2b''c^3z\right] = \int rpdN.\left(\frac{ddx+ddz}{dt^2}\right) - \int spdN.\frac{ddr}{dt^2}.$$

le second moment fait équilibre au moment de la

pouſſée de l'eau par rapport à l'axe latitudinal ; ce qui donne l'équation

(C) $g\pi\left[\nu\left(\gamma-\frac{h\gamma}{m}\right)+cckx-(\theta a^3+\theta' b^3)\gamma\right]=\int spdN\left(\frac{ddx+dd\gamma}{dt^2}\right)-\int spdN.\frac{dd\eta}{dt^2}$:

Enfin le troiſième moment ſera égal à zéro ; c'eſt-à-dire qu'on aura

(D) $$\int qpdN.\frac{ddr^2}{dt^2}-\int rpdN.\frac{dd\eta}{dt^2}=o.$$

Ces quatre équations donneront tous les mouvements du navire, ſi l'on peut parvenir à réduire les variables qui y entrent à quatre ſeulement, ſans compter le temps t.

XLVII

Remarque. Les deux équations (*B*) & (*C*) peuvent ſe ſimplifier, en obſervant que comme ddx eſt le même pour tous les points du navire, au lieu de $\int rpdN.\frac{ddx}{dt^2}$ & de $\int qpdN.\frac{ddx}{dt^2}$, on peut écrire $\frac{ddx}{dt^2}\int rpdN$ & $\frac{ddx}{dt^2}\int qpdN$: or par la propriété du centre de gravité $\int rpdN=o$, $\int qpdN=o$: par conſéquent, les deux équations (*B*) & (*C*) deviendront

(E) $g\pi\left[\nu\left(\gamma-\frac{h\gamma}{m}\right)-2\theta''c^3\gamma\right]=\int rpdN.\frac{dds}{dt^2}-\int spdN.\frac{ddr}{dt^2}$

(F) $g\pi\left[\nu\left(\gamma-\frac{h\gamma}{m}\right)+cckx-(\theta a^3+\theta' b^3)\gamma\right]=\int spdN.\frac{dds}{dt^2}-\int rpdN.\frac{dd\eta}{dt^2}$.

XLVIII.

Entre les différents moyens qu'on peut employer pour parvenir à la réduction dont nous avons parlé, voici celui qui m'a paru le plus ſimple ; il eſt fondé ſur l'article IX, & l'idée en eſt due à M. D'alembert *. La figure 8 étant d'ailleurs la même que la figure 7 ; en ſorte que les mêmes lignes ſont déſignées par les mêmes lettres dans l'une & l'autre, imaginons de plus par le point G, un axe GP faiſant avec le

* Voy. ſes recherches ſur la précеſſion des équinoxes. page 27 & ſuiv.

FIGURE 8

plan horiſontal VGX un très-petit angle pGp, & avec le plan vertical OGV un angle auſſi très-petit. Cet axe GP & ſa projection Gp ſur le plan horiſontal VGX peuvent être conſidérés comme exiſtants dans le plan vertical OGp, qui fait avec le plan OGV l'angle pGp'. Par le point R, ſoit mené perpendiculairement à l'axe GP le plan RPQ, enſorte que PQ ſoit la ſection commune des deux plans RPQ, OGp; que RQ ſoit perpendiculaire ſur PQ & que RP ſoit la droite qui joint les points R & P. Du point Q ſoit abbaiſſée ſur le plan VGX la perpendiculaire QV', qui rencontrera néceſſairement la projection Gp. Soient joints les points Z, V' par la droite ZV' qui ſera néceſſairement égale à RQ, puiſque les droites RZ, QV' ſont verticales & les droites RQ, ZV' horiſontales. Enfin ſoit tiré Pq perpendiculaire ſur QV'.

Maintenant, au lieu de rapporter le mouvement du point R aux trois coordonnées GV, VZ, ZR, concevons que, tandis que l'axe GP s'éloigne du plan VGX & que le plan OGp dans lequel ſe trouve cet axe tourne autour de la ligne immobile GO, le plan RPQ tourne auſſi circulairement autour de l'axe GP, en demeurant toujours perpendiculaire à cet axe. Il eſt évident que ces différents mouvements donneront le vrai mouvement du point R dans l'eſpace abſolu. Ainſi il ne s'agit plus que d'en exprimer analytiquement les conditions & d'en comparer les réſultats avec ceux de l'article XLVI. Pour cela, conſervant les dénominations ſuſdites & obſervant que l'eſpace z parcouru circulairement dans le plan OGX peut être cenſé égal à l'eſpace parcouru circulairement autour de l'axe GP,

Suppoſons $GP. \ldots = \lambda^*$
de plus $PR. \ldots = \psi$

* *Les quantités* λ, ψ, ϖ, *ſont conſtantes, tant qu'on conſidère un même point du navire; mais elles deviennent variables dans le paſſage de ce point à celui qui lui eſt immédiatement contigu; ce qu'il faut bien obſerver pour la ſuite.*

Suppoſons de plus :

L'angle RPQ au premier inſtant, lorſque le plan OGp ſe confondoit avec le plan OGV. . . . . $= \varpi$
Le même angle après le temps t écoulé. . . . $= \varpi + \zeta$
L'angle PGp. . . . . $= \xi$
L'angle pGp'. . . . . $= u$

on aura évidemment

PQ. . . . . $= \downarrow . \cos . (\varpi + \zeta)$
RQ ou ZV'. . . . . $= \downarrow \sin . (\varpi + \zeta)$
Pp. . . . . $= \lambda \sin . \xi$
Pq. . $= PQ \times \sin . \xi$. . . . . $= \downarrow \cos . (\varpi + \zeta) . \sin . \xi$
Qq. . $= PQ . \cos . \xi$. . . . . $= \downarrow \cos . (\varpi + \zeta) . \cos . \xi$
uV'. . $= ZV' . \sin . u$. . . . . $= \downarrow \sin . (\varpi + \zeta) . \sin . u$.

Donc 1°. ZR ou $V'Q = V'q + qQ = Pp + Qq = \lambda \sin . \xi + \downarrow \cos . (\varpi + \zeta) . \cos . \xi = \lambda \xi + \downarrow \cos . (\varpi + \zeta) = \lambda \xi + \downarrow \cos . \varpi - \downarrow \zeta \sin . \varpi$, parceque les angles ζ, ξ ſont ſuppoſés fort petits ; ainſi

$$s = \lambda \xi + \downarrow \cos . \varpi - \downarrow \zeta \sin . \varpi .$$

2°. GV ou $Gu = Gp - Pq - uV' = \lambda - \downarrow . \cos . (\varpi + \zeta) \sin . \xi - \downarrow \sin . (\varpi + \zeta) \sin . u = \lambda - \downarrow \xi \cos . \varpi - \downarrow u \sin . \varpi$, en négligeant les infiniment petits du ſecond ordre ; ainſi

$$q = \lambda - \downarrow \xi \cos . \varpi - \downarrow u \sin . \varpi .$$

3°. $ZV = ZV' + uV = ZV' + GV \sin . u = \downarrow \sin . (\varpi + \zeta) + (\lambda - \downarrow \xi \cos . \varpi - \downarrow u \sin . \varpi) \sin . u = \downarrow \sin . \varpi + \downarrow \zeta \cos . \varpi + \lambda u$, en négligeant toujours les infiniment petits du ſecond ordre ; ainſi

$$r = \downarrow \sin . \varpi + \downarrow \zeta \cos . \varpi + \lambda u .$$

Par conſéquent, on aura

$ds = \lambda d\xi - \downarrow d\zeta \sin . \varpi$
$dq = - \downarrow \cos . \varpi . d\xi - \downarrow \sin . \varpi . du$
$dr = \downarrow \cos . \varpi . d\zeta + \lambda du$

$dds = \lambda dd\xi - \downarrow \sin . \varpi . dd\zeta$
$ddq = - \downarrow \cos . \varpi . dd\xi - \downarrow \sin . \varpi . ddu$
$ddr = \downarrow \cos . \varpi . dd\zeta + \lambda ddu .$

Mettons ces valeurs de s, q, r, dds, ddq, ddr dans les équations (E), (F), (D) en négligeant les infiniment petits du troiſième ordre, & obſervant 1°. que $d\xi = dy$, $dd\xi = ddy$, parce que l'angle ξ

augmente à chaque inſtant de la même quantité que l'angle γ. 2°. Que comme $dd\zeta$, ddy, ddu ſont les mêmes pour tous les points du navire, on peut les écrire au-devant du ſigne d'intégration. Par ces ſubſtitutions & ces remarques, les trois équations ſuſdites deviendront

$$(G)\quad g\pi\left[M\left(f'-\frac{h\zeta}{m}\right)-2\theta''c^3\zeta\right]=\frac{ddy}{dt^2}\int\lambda\psi\,\text{ſin.}\,\varpi.\,pdN$$
$$-\frac{dd\zeta}{dt^2}\int\psi^2\left(\text{ſin.}\,\varpi^2+\text{coſ.}\,\varpi^2\right).pdN-\frac{ddu}{dt^2}\int\lambda\psi\,\text{coſ.}\,\varpi.\,pdN.$$

$$(H)\quad g\pi\left[M\left(f-\frac{hy}{m}\right)+cckx-\left(\theta a^3+\theta' b^3\right)y\right]=\frac{ddy}{dt^2}\int\left(\lambda\lambda+\psi^2\,\text{coſ.}\,\varpi^2\right).pdN$$
$$-\frac{dd\zeta}{dt^2}\int\lambda\psi\,\text{ſin.}\,\varpi.\,pdN+\frac{ddu}{dt^2}\int\psi^2.\,\text{ſin.}\,\varpi.\,\text{coſ.}\,\varpi.\,pdN.$$

$$(K)\quad \frac{ddy}{dt^2}\int\psi^2\,\text{ſin.}\,\varpi.\,\text{coſ.}\,\varpi.\,pdN+\frac{ddu}{dt^2}\int\left(\lambda\lambda+\psi^2\,\text{ſin.}\,\varpi^2\right).pdN$$
$$+\frac{dd\zeta}{dt^2}\int\lambda\psi\,\text{coſ.}\,\varpi.\,pdN=0.$$

XLIX.

Ces équations ſe ſimplifient conſidérablement, en obſervant que, comme le navire eſt diviſé en deux parties égales & ſemblables par le plan longitudinal, on a

$$\int\lambda\psi\,\text{ſin.}\,\varpi.\,pdN=0,\ \int\psi^2.\,\text{ſin.}\,\varpi.\,\text{coſ.}\,\varpi.\,pdN=0;$$

d'où il ſuit que les trois équations précédentes deviendront

$$(L)\quad g\pi\left[M\left(f'-\frac{h\zeta}{m}\right)-2\theta''c^3\zeta\right]=-\frac{dd\zeta}{dt^2}\int\psi^2\left(\text{ſin.}\,\varpi^2+\text{coſ.}\,\varpi^2\right).pdN$$
$$-\frac{ddu}{dt^2}\int\lambda\psi\,\text{coſ.}\,\varpi.\,pdN.$$

$$(M)\quad g\pi.\left[M\left(f-\frac{hy}{m}\right)+cckx-\left(\theta a^3+\theta' b^3\right)y\right]=\frac{d^2y}{dt^2}\int\left(\lambda\lambda+\psi^2\,\text{coſ.}\,\varpi^2\right).pdN.$$

$$(N)\quad \frac{ddu}{dt^2}\int\left(\lambda\lambda+\psi^2\,\text{ſin.}\,\varpi^2\right)pdN+\frac{dd\zeta}{dt^2}\int\lambda\psi\,\text{coſ.}\,\varpi.\,pdN=0.$$

Suppoſons, pour abréger le calcul, $\int \psi^2 . \left(\sin. \varpi^2 + \text{cof.} \varpi^2 \right) pdN$

ou $\int \psi^2 . pdN = pP$; $\int \lambda\psi \, \text{cof.} \varpi . pdN = pQ$;

$\int \left(\lambda\lambda + \psi^2 . \text{cof.} \varpi^2 \right) pdN = pR$; $\int \left(\lambda\lambda + \psi^2 \sin. \varpi^2 \right) pdN = pS$:

ces quantités P, Q, R, S, ſont données par la figure du navire : on aura les équations

$$(P) \quad g\pi \left[M \left(f' - \frac{h\zeta}{m} \right) - 2\theta'' c^3 \zeta \right] = - pP\,dd\zeta - pQ\,ddu;$$

$$(Q) \quad g\pi \left[M \left(f - \frac{hy}{m} \right) + cckx - \left(\theta a^3 + \theta' b^3 \right) y \right] = pR\,ddy;$$

$$(R) \quad Q\,dd\zeta + S\,ddu = 0 :$$

leſquelles, avec l'équation

$$(A) \quad g\pi \left[M - cc\kappa + \left(\theta a^2 - \theta' b^2 \right) y \right) - gpN \Big] dt^2 = pN\,ddx$$

donneront d'une manière fort ſimple tous les mouvements du navire.

L.

En effet l'équation (R) donne $u = - \frac{Q\zeta}{S}$.

Mettons pour $Q\,ddu$ ſa valeur $- \frac{QQ\,dd\zeta}{S}$ dans l'équation (P), & nous aurons

$$g\pi \left(M \left(f' - \frac{h\zeta}{m} \right) - 2\theta'' c^3 \zeta \right) = p . \left(\frac{QQ}{S} - P \right) dd\zeta;$$

d'où l'on tire

$$(S) \quad \zeta = \frac{M f' m}{Mh + 2\theta'' c^3 m} \times \left(1 - \text{cof.} \, t \sqrt{\frac{g\pi}{mp} . \left(\frac{MhS + 2\theta c^3 mS}{QQ - PS} \right)} \right);$$

& par conſéquent

$$(T) \quad u = - \frac{Q}{S} \times \frac{M f' m}{Mh + 2\theta'' c^3 m} \times \left(1 - \text{cof.} \, t \sqrt{\frac{g\pi}{mp} . \left(\frac{MhS + 2\theta c^3 mS}{QQ - PS} \right)} \right).$$

les deux équations (A) & (Q) étant exactement de la même forme que les deux équations (A) & (B) de

de l'article XXII, elles s'intègreront de la même manière qu'ont été intègrées ces deux dernières dans l'article XXXVII ; & on trouvera deux équations de cette forme,

$$(T) \quad x = \frac{K}{K-K'} \times \frac{G'}{H'} \times \left(1 - \text{cof. } t\sqrt{E'}\right) - \frac{K'}{K-K'} \times \frac{G}{H} \times \left(1 - \text{cof. } t\sqrt{E}\right);$$

$$(X) \quad y = \frac{G}{H} \times \frac{(1 - \text{cof. } t\sqrt{E})}{K-K'} - \frac{G'}{H'} \frac{(1 - \text{cof. } t\sqrt{E'})}{K-K'}.$$

Ces différentes équations expriment de la manière la plus générale tous les mouvements d'aſcenſion, de roulis, de tangage & de rotation horiſontale, dont le navire peut être agité tout-à-la-fois. Elles montreront à l'œil quel eſt celui de ces mouvements qui domine ; & on en tirera des règles d'arrimage, ſoit pour augmenter la ſtabilité du navire, ſoit pour diminuer l'amplitude & la viteſſe des oſcillations dont on eſt le plus incommodé. Quoique cette diſcuſſion ſoit extrêmement facile, après tout ce que nous avons déjà dit, l'importance de la matière demande que nous ne la paſſions pas totalement ſous ſilence.

LI.

Mais avant que d'entrer dans ce détail, il eſt à propos de prévenir une difficulté qui ſe préſente au ſujet des deux équations (S) & (T). Comme la quantité $QQ - PS$ peut être négative, les valeurs de z & de u ſemblent alors dépendantes des logarithmes, & par conſéquent ſujettes à augmenter ſans ceſſe. Mais il faut conſidérer que, lorſque $PS > QQ$, au lieu de $QQ - PS$, on doit prendre $PS - QQ$: c'eſt ce qu'on verra aiſément, en remontant à l'équation (B) & aux ſuppoſitions ſur leſquelles le calcul eſt établi. La figure du navire eſt telle en effet que $PS - QQ$ eſt toujours une quantité poſitive. Nous

ſuppoſerons donc que, dans les équations (T) & (V), au lieu de $QQ - PS$, il y ait $PS - QQ$; & nous ferons, pour abréger, $PS - QQ = A$.

LII.

Cela poſé, revenons aux conſéquences qui réſultent de nos formules. Nous pourrions faire cet examen en général; mais pour ſimplifier la queſtion, je crois devoir négliger le mouvement d'aſcenſion du centre de gravité, lequel eſt effectivement preſque inſenſible.

Sur cette hypothèſe, on aura les trois équations

$$y = \frac{Mfm}{Mh + 2m\theta a^3} \times \left(1 - \text{cof. } t\sqrt{\frac{g\pi}{mpR}\cdot(Mh + 2m\theta a^3)}\right);$$

$$x = \frac{Mf'm}{Mh + 2m\theta'' c^3} \times \left(1 - \text{cof. } t\sqrt{\frac{g\pi S}{mpA}\cdot(Mh + 2m\theta c^3)}\right);$$

$$u = -\frac{Q}{S} \times \frac{Mf'm}{Mh + 2m\theta'' c^3} \times \left(1 - \text{cof. } t\sqrt{\frac{g\pi S}{mpA}\cdot(Mh + 2m\theta c^3)}\right).$$

LIII.

On voit par la méthode des articles XXVII, XXVIII, XXIX, XXX que le navire aura de la ſtabilité en toutes ſortes de ſens, lorſque ſon centre de gravité ſera placé au-deſſous de celui de la carène; mais qu'il ceſſeroit d'en avoir, ſi ſon centre de gravité étoit au-deſſus de celui de la carène, & qu'on eût de plus, relativement aux mouvements de tangage, $Mh =$ ou $> 2m\theta a^3$, & relativement aux mouvements de roulis & de rotation horiſontale, $Mh =$ ou $> 2m\theta'' c^3$. La règle d'arrimage qui ſuit delà eſt pareille à celle des articles cités.

L I V.

Il n'eſt pas moins évident (*art. XXX*) qu'on diminuera l'amplitude abſolue des mouvements de tangage & de roulis, en faiſant deſcendre de plus en plus le centre de gravité du navire. Quant à celle des mouvements de rotation horiſontale, elle diminuera par le même expédient, & de plus, elle diminuera encore par la diminution de la fraction $\frac{Q}{S}$. Or ſi l'on obſerve que, conſéquemment aux ſuppoſitions de l'article XLIX, la quantité Q eſt égale à la ſomme des produits des particules du navire par leurs diſtances aux deux plans VGX, OGX, & que la quantité S eſt égale à la ſomme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs diſtances au plan OGX, plus à la ſomme des produits des mêmes particules par les quarrés de leurs diſtances au plan OGV, il eſt viſible qu'on rendra preſque nuls les mouvements de rotation horiſontale.

1°. En diſtribuant la charge à peu près de la même manière, ou de part ou d'autre du plan horiſontal qui paſſe par le centre de gravité du navire, ou de part & d'autre de la coupe latitudinale paſſant par le même centre.

2°. En tranſportant horiſontalement vers la proue & vers la poupe quelques poids fort peſants, & les écartant le plus que l'on pourra de la coupe longitudinale.

Ces conditions étant toujours aſſez bien remplies, les mouvements de rotation horiſontale ſont preſque entièrement inſenſibles.

L V.

Enfin ſoient l, l', l'' les longueurs reſpectives des pendules ſynchrones aux mouvements de tan-

gage, de roulis & de rotation horiſontale : on trouvera

$$l = \frac{mpR}{\pi(Mh + 2m\theta a^3)} ;$$

$$l' = \frac{mp.\frac{A}{S}}{\pi(Mh + 2m\theta'' c^3)} ;$$

$$l'' = \frac{mp.\frac{A}{S}}{\pi(Mh + 2m\theta' c^3)} .$$

La première formule fait voir qu'on diminuera la viteſſe des mouvements de tangage, ou en faiſant monter le centre de gravité, ou bien en augmentant la quantité R, qui repréſente la ſomme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs diſtances au plan vertical OGX, plus la ſomme des produits des mêmes particules, par les quarrés de leurs diſtances au plan horiſontal VGX. Or il eſt évident qu'on augmentera R, ſi l'on tranſporte quelques poids fort peſants vers la proue & vers la poupe, & qu'on écarte de plus, autant qu'il eſt poſſible, ces mêmes poids du plan horiſontal paſſant par le centre de gravité du navire. Les vaiſſeaux armés en guerre ont, à cet égard, un grand avantage ſur les vaiſſeaux démâtés & ſans artillerie. Cet avantage conſiſte en ce que la mâture & l'atillerie ajoutent des poids, qui ſont à une diſtance conſidérable de la coupe latitudinale & du plan horiſontal paſſant par le centre de gravité.

Les deux autres formules par leſquelles on voit d'abord que les mouvements de roulis & de rotation horiſontale ſe font dans le même temps, indiquent que, pour diminuer la viteſſe de ces mouvements, il faut, ou faire monter le centre de gravité du na-

vire, ou bien augmenter $\frac{A}{S}$, c'eſt-à-dire $\frac{PS-QQ}{S}$.

C'eſt à quoi on parviendra en augmentant P & S & diminuant Q.

Or 1°. on augmentera P, qui exprime la ſomme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs diſtances à l'axe longitudinal GV, en écartant des poids fort peſants de cet axe.

2°. On augmentera S en écartant le plus que l'on pourra quelques poids fort peſants, tant de la coupe longitudinale que de la coupe latitudinale, paſſant par le centre de gravité. On voit que P & S augmentent par la même opération en partie.

3°. On diminuera Q, comme on a déjà vu, en diſtribuant la charge de la même manière, ou de part & d'autre du plan horiſontal qui paſſe par le centre de gravité du navire, ou de part & d'autre de la coupe latitudinale paſſant par le même centre. Ici on remarquera, au ſujet des mouvements de rotation horiſontale, que leur viteſſe & leur amplitude diminuent tout à la fois par la diminution de Q. On voit auſſi que ces ſortes d'oſcillations ont une durée aſſez conſidérable, relativement à leur grandeur : nouvelle raiſon pour qu'elles ſoient preſque inſenſibles.

LVI.

Je ſupprime pluſieurs autres remarques qui dérivent de nos principes ; l'objet d'un Mémoire Académique n'étant pas de pourſuivre toutes les vérités juſques dans leurs dernières branches, mais d'en produire des germes féconds & faciles à développer. Je me flatte d'avoir ſuffiſamment approfondi une matière, qui à peine avoit été effleurée. Il ne me reſte plus qu'à rendre raiſon pourquoi j'ai toujours négligé la réſiſtance que le navire éprouve de la part de l'eau

en oſcillant. J'en ai agi ainſi, parce que les oſcillations ayant toujours été ſuppoſées fort petites, leur vîteſſe eſt auſſi très-petite : par conſéquent le quarré de cette vîteſſe, qui entre dans l'expreſſion de la réſiſtance (*art.* IV & V) rend cette même réſiſtance infiniment petite du ſecond ordre, ou de nulle conſidération.

LVII.

L'hypothèſe des oſcillations fort petites a facilité le moyen d'établir des règles d'arrimage, qui précautionneront le navire contre les plus grands efforts des vagues. Dans cette recherche, on a été fondé à faire abſtraction de toutes les ſecouſſes violentes qu'a pu éprouver le navire, avant que ſes balancements devinſſent permanents & réguliers. Mais nous ne devons pas finir ce chapitre, ſans obſerver qu'on rallentira conſidérablement ces agitations antérieures, en augmentant la réſiſtance de l'eau que le navire ſouffre en oſcillant & celle que ſouffre *l'acaſtillage* en frappant l'air. L'augmentation dont il s'agit dépend principalement de la figure du navire; mais on y peut auſſi contribuer en quelque choſe, par le moyen de l'arrimage : c'eſt pourquoi je vais encore déterminer en général la réſiſtance qu'éprouve une courbe *donnée* en oſcillant autour de ſon centre de gravité dans un fluide quelconque. Je me contenterai de conſidérer une courbe diviſée en deux parties égales & ſymmétriques par ſon axe; & je regarderai ſon centre de gravité comme immobile.

LVIII.

PROBLEME IV.

FIG. 2. *Trouver la réſiſtance qu'éprouve la courbe ſymmétrique*

BAO posée verticalement dans un fluide, en oscillant autour de son centre de gravité G, regardé comme immobile.

SOLUTION.

Ayant pris l'élément Mm de la courbe, soient menés les rayons GM, Gm & soit décrit l'arc Mr;

Supposons
- $GM. \ldots = z$
- $Mm. \ldots = dS$
- Le sinus total. $\ldots = 1$
- La vîteſſe initiale de rotation pour le rayon 1. $\ldots = u$
- Et par conſéquent la vîteſſe du point $M. \ldots = zu.$

Puiſque la courbe tourne autour du point G, il eſt évident que l'élément Mm ſe préſentera au choc du fluide ſous un angle d'incidence égal à l'angle mMr: donc l'impulſion perpendiculaire que reçoit Mm ſera exprimée (*art. IV.*) par $ds \times zzuu \times (\textit{ſin. angl. } mMr)^2 = ds \times zzuu \times \frac{dz^2}{ds^2} = \frac{zzuudz^2}{ds}$, en faiſant abſtraction de la denſité du fluide. Qu'on prenne mn perpendiculaire à Mm pour repréſenter cette force & qu'on la décompoſe en deux autres, mq, qn, dont la première ſoit dirigée ſuivant Gm & l'autre ſoit perpendiculaire à Gm: il eſt clair que la force mq doit être négligée, puiſqu'elle eſt détruite par la réſiſtance du point G que l'on ſuppoſe immobile & qu'il ne faut avoir égard qu'à la force qn. Or à cauſe des triangles Mrm, mqn, qui ſont évidemment ſemblables, puiſque les côtés qui forment les angles aigus M & m ſont perpendiculaires chacun à chacun, la force qn aura pour valeur $\frac{zzuudz^2}{ds} \times \frac{dz}{ds} = \frac{zzuudz^3}{ds^2}$. Multipliant cette force par ſon bras de levier z, intégrant de maniere que l'abciſſe

AP correſpondante à l'arc AM devienne égale à l'axe entier AD; & doublant l'intégrale, on aura $2uu\int\frac{\zeta^3 d\zeta^3}{ds^2}$ pour le moment de la réſiſtance que toute la courbe oppoſe au premier inſtant au mouvement d'oſcillation.

LIX.

Ce problême, comme nous l'avons annoncé, fournit le moyen de diminuer la propagation des balancements du navire.

En effet il eſt bien évident que, toutes choſes d'ailleurs égales, les balancements du navire ſe perpétueront d'autant moins que le moment de la réſiſtance qu'éprouve le navire en oſcillant ſera plus grand. Or on voit par la formule précédente que le moment de la réſiſtance augmentera, à meſure que le centre de gravité du navire s'éloignera du point où il auroit été placé, ſi le navire avoit été homogène. Ainſi, à toutes les raiſons qui nous ont déterminé à abbaiſſer le centre de gravité du navire, ſoit pour augmenter la ſtabilité, ſoit pour diminuer l'amplitude de ſes oſcillations, nous pourrons ajouter qu'on parviendra encore par ce moyen à diminuer la propagation de ces balancements dont on eſt tourmenté par une mer groſſe.

CHAPITRE TROISIÉME.

Des changements qu'on peut faire en mer à l'arrimage, pour faire mieux porter la voile au navire.

LX.

LORSQU'UN navire cingle en mer, il eſt pouſſé par le vent qui frappe ſes voiles & il eſt retardé par la

la réſiſtance de l'eau qu'il eſt obligé de fendre. Au commencement du mouvement, l'impulſion du vent eſt plus forte que la réſiſtance de l'eau : d'où il réſulte que la vîteſſe du navire s'accélère par degrés : mais cette accélération parvient bientôt à ſon terme ; la réſiſtance de l'eau ſuſpend entièrement l'action du vent, & le navire ne fait plus que conſerver, en vertu de ſon inertie, le mouvement qu'il a acquis précédemment.

LXI.

L'objet qu'on doit ſe propoſer en équippant un vaiſſeau eſt, comme nous l'avons dit, article XIV, de lui donner les lignes d'eau projettées par le conſtructeur, parce qu'il eſt toujours à croire qu'elles ſont meilleures que toutes celles qu'on pourroit prendre au haſard. Or, pour arriver à ce but, la mâture & l'arrimage doivent être tellement combinés que l'impulſion du vent ſur les voiles & la réſiſtance de l'eau ſe faſſent mutuellement équilibre, enſorte que le navire puiſſe conſerver l'aſſiette convenable. Voyons donc qu'elles ſont les loïx de cet équilibre.

LXII.

En premier lieu, ſoit *ADHTEB* un navire, ou plutôt le profil d'un navire cinglant ſuivant la route directe *Dd*. Soit *GP* une verticale menée par le centre de gravité *G* du navire & par celui de la carêne. Suppoſons que *XV* repréſente la direction de la réſultante de tous les efforts perpendiculaires de l'eau contre la proue, *ZK* la direction de la réſultante de tous les efforts perpendiculaires du vent contre les voiles ; ces deux réſultantes ſe détermineront par les articles IV & V, comme on peut le voir dans l'ouvrage de M. Euler, ou dans celui de M. Bouguer. Soient priſes *SK* pour repréſenter l'effort actuel du FIG. 10.

vent sur les voiles, effort que je suppose horisontal pour abréger; XN pour représenter la résistance de l'eau; & soit décomposée cette force XN en deux autres XM, XO, l'une verticale, l'autre horisontale. Soit prolongée XO jusqu'à ce qu'elle rencontre la verticale GP en quelque point Q. Cela posé,

1°. Pour que le mouvement de translation horisontale reste uniforme, il faut que l'on ait $SK=XO$.

2°. Pour que le navire ne prenne aucun mouvement d'oscillation sur son centre de gravité, il faut que les moments des forces susdites se fassent équilibre, c'est-à-dire qu'on ait $XO \times GQ + XM \times XQ = SK \times GS$. Je n'ai pas besoin d'avertir que, dans le cas où la droite XQ passeroit au-dessous du centre de gravité du navire, le moment de la force XO seroit négatif dans l'équation précédente.

Lorsque ces deux conditions seront remplies à-la-fois, le navire se mouvra uniformément, en vertu du mouvement déjà acquis; & il n'aura aucun mouvement rotatoire sur son centre de gravité : seulement il faut observer que ce centre sera soulevé suivant la verticale GP par la force XM & que l'effet de cette force ne peut être détruit que par un poids égal placé sur la verticale SG.

LXIII.

On peut établir les loix de l'équilibre en question d'une autre manière plus simple, que je vais exposer, parce qu'elle est fort commode pour le sillage oblique.

Il est évident qu'il y aura équilibre, du moins autant qu'il est possible, entre l'impulsion du vent & la résistance de l'eau, lorsque ces deux forces seront égales & directement opposées autant qu'il est possible. Or il faut pour cela que ces deux forces se rencontrent en quelque point S sur la verticale GP & de plus que, prenant SK pour représenter la résistance

de l'eau, & décompoſant cette force en deux autres SR, SP, l'une horiſontale, l'autre verticale, on ait $SR = SK$.

Quant à la force SP, elle ne peut jamais être détruite que par un poids égal & contraire.

Du reſte, ſi la force du vent n'étoit pas horiſontale, comme nous l'avons ſuppoſée, il faudroit la décompoſer en deux autres forces, l'une horiſontale, l'autre verticale, dont on voit bien les effets, ſans que je m'arrête plus longtemps là-deſſus.

LXIV.

En ſecond lieu, ſuppoſons que le navire cingle ſuivant la route oblique LS (*fig.* 11), enſorte que DLS ſoit l'angle de la *dérive*. Soient $D\,\delta\,E\,\delta$ la coupe horiſontale du navire à fleur d'eau; $\gamma YL\&$ la direction horiſontale de la réſiſtance horiſontale de l'eau, laquelle rencontre l'axe DE au point L; $Y\mu\&$ (*fig.* 12), la coupe verticale du navire faite ſuivant l'axe diagonal $Y\&$; XSV la direction de la réſiſtance abſolue de l'eau; ZK la direction de l'effort du vent que je ſuppoſe toujours horiſontale. Cela poſé, les voiles, qui ne reçoivent le choc du vent que dans le ſens perpendiculaire, doivent avoir une diſpoſition ef (*fig.* 11) perpendiculaire à $\gamma YL\&$. Deplus, le centre d'effort des voiles qui ſe trouve toujours dans la coupe longitudinale $ADHTEB$ (*fig.* 10), doit auſſi ſe trouver dans la coupe tranſverſale $Y\mu\&$ (*fig.* 12). Enfin l'effort horiſontal du vent doit être détruit par la réſiſtance horiſontale de l'eau. De tout cela, il réſulte FIG. 11 & 12.

1°. Que les droites XV, ZK ſe rencontreront en S ſur la verticale LS.

2°. Que, décompoſant la réſiſtance SV de l'eau en deux autres forces SP, SR, l'une verticale, l'autre

horiſontale ; & prenant SK pour repréſenter l'effort du vent, on aura $SK = SR$.

3°. Qu'il faudra mettre dans la direction LP un poids égal à la force SP, ſans quoi cette force tendroit à ſoulever le navire & même à le faire oſciller, dans le cas où elle ne paſſeroit pas par ſon centre de gravité.

LXV.

Les loix de l'équilibre entre l'impulſion du vent & la réſiſtance de l'eau étant ainſi déterminées, lorſqu'on ne s'y ſera pas exactement conformé en chargeant le navire dans le port, on pourra très-aiſément & en très-peu de temps corriger l'arrimage en mer.

Suppoſons, par exemple, que le navire donne du *nez* dans l'eau, on n'aura qu'à tranſporter quelques poids de la proue vers la poupe. On feroit l'opération inverſe, ſi le navire gliſſoit trop ſur la lame. J'en dis autant pour tous les autres cas : *mutatis mutandis*. Ces expédients ſont ſi ſimples & tombent tellement ſous le ſens commun, qu'il ſeroit ſans doute ridicule de les propoſer, ſi nous n'avions pas donné de plus les moyens de les mettre en œuvre par des principes certains. Le navigateur étant ſuppoſé connoître les dimenſions du vaiſſeau, ſa charge, l'angle de la dérive, la figure & la capacité de la carêne, la force & l'impulſion du vent, le centre d'effort des voiles, la réſiſtance de l'eau, il pourra déterminer au juſte, à l'aide des règles précédentes, les poids qu'il faut prendre pour remplir l'objet propoſé & l'effet infaillible qui réſultera de cette tranſpoſition.

LXVI.

Mais pour établir quelque choſe de plus précis ſur ce ſujet, examinons en détail les circonſtances des cauſes, qui enlèvent au navire la qualité de bien por-

ter la voile. Ces cauſes ſont les mouvements de roulis & de tangage.

Tous ceux qui ont fait quelques courſes en mer ſçavent que le navire a des mouvements plus rudes dans les calmes que lorſqu'il eſt pouſſé par un vent *bien fait ;* qu'on roule le plus, lorſqu'on a *vent arrière ;* qu'on tangue le plus, lorſqu'on court *au plus près ;* qu'enfin on roule & on tangue le moins, lorſqu'on a vent *largue.* La raiſon de tous ces phénomènes eſt fort ſimple ; car dans les calmes, il y a toujours une lame ſourde, dont l'effet eſt très-ſenſible ; au lieu que les lames n'ont pas beaucoup de priſe ſur un navire qui tient bien le vent ; elles ſe prêtent, pour ainſi dire à ſes mouvements. Lorſqu'on court, vent en poupe, le navire eſt ſoutenu par l'effort du vent & par la réſiſtance de l'eau contre les vagues dirigées ſuivant la route ; mais il eſt expoſé au choc des lames latérales, qui viennent frapper ſes flancs bas-bord & ſtribord : d'où il ſuit qu'on doit ſentir principalement le roulis. Au contraire, un navire, qui court au plus près, n'eſt que très-peu ſoutenu vers la proue & vers la poupe par le vent & par la réſiſtance de l'eau : ainſi il doit tanguer. Enfin un navire, qui court vent largue, doit avoir des mouvements doux ; car l'effort du vent & de l'eau s'exerce, en partie perpendiculairement à la route, en partie perpendiculairement à la quille.

LXVII.

De ces expériences & de ces raiſonnements, naiſſent les réflexions ſuivantes.

Lorſqu'après avoir ſaiſi l'état d'équilibre entre l'impulſion du vent & la réſiſtance de l'eau, on aura arrimé le vaiſſeau, conformément aux principes établis dans le chapitre précédent, on ſera aſſuré que ce même vaiſſeau ſe comportera parfaitement en mer par

un vent bien fait. Les troubles occaſionnés par les lames dans l'équilibre dont nous avons parlé, ne produiront que de très-légers changements dans les oſcillations du navire.

Lorſqu'on aura vent arrière & qu'on ſera tourmenté par les roulis, on diminuera ces mouvements, en tranſportant bas-bord & ſtribord dans les flancs du vaiſſeau, quelques poids fort peſants (*art. XXXIII*).

Lorſqu'on courra au plus près, il faudra tranſpoſer des poids fort peſants vers la proue & vers la poupe, afin de diminuer les mouvements de tangage (*art. XXXIV*).

Enfin lorſqu'on aura vent largue & que le navire ſera fatigué par des balancements compoſés de roulis & de tangage, on mettra en œuvre les expédients propoſés dans les articles LIII, LIV, LV.

LXVIII.

Les remarques que je viens de propoſer ſur les changements qu'il faut faire à l'arrimage pour diminuer les oſcillations du navire, peuvent être ſoumiſes à un calcul plus précis : nous n'avons, pour cela, qu'à déterminer en général les balancements qui réſultent de l'impulſion du vent, de la réſiſtance de l'eau, de la peſanteur & de la pouſſée verticale de l'eau, lorſque ces quatre forces ne ſont pas dans un équilibre parfait.

Pour préſenter la méthode d'une manière bien claire, je ſuppoſerai que le navire cingle ſuivant la route directe, enſorte que les quatre forces dont il s'agit ſeront dans la coupe longitudinale du navire. Outre que les réſultats pour la route directe peuvent toujours s'appliquer à la route oblique, avec certaines modifications que le ſimple bon ſens indique à peu près, ſi l'on combine cette ſolution avec les articles XLVI, XLVII, XLVIII, il ſera très-facile de ré-

ſoudre le problême, dans le cas où les quatre forces ne ſont pas dans un même plan. Je regarderai de plus l'avant de la proue comme un ſimple plan incliné. Cette ſuppoſition pourra toujours ſe faire, ſans craindre aucune erreur ſenſible; car les oſcillations du navire étant fort petites, les variations qui peuvent arriver dans la réſiſtance de l'eau, ſuivront toujours à peu près la même loi, quelle que ſoit la figure de la proue.

LXIX.

PROBLEME.

Déterminer les oſcillations du navire, qui réſultent du défaut d'équilibre abſolu entre la peſanteur du navire, la pouſſée verticale de l'eau, l'impulſion du vent ſur les voiles & la réſiſtance de l'eau.

SOLUTION.

Soit $ADHTEB$ la figure du navire, ou plutôt ſa coupe longitudinale. Suppoſons qu'au bout d'un certain temps, le plan de flottaiſon du navire ſoit repréſenté par ed, qui peut être cenſé couper DE au point C ſur la verticale GC élevée par le centre de gravité G. Du point H ſoit élevée ſur DE la perpendiculaire HV; & du point C ſoient décrits les arcs Ex, Du. Soient ZS la direction moyenne de l'impulſion du vent que je ſuppoſe horiſontale pour abréger : XN la direction de la réſiſtance de l'eau contre DH, laquelle peut être cenſée perpendiculaire ſur un point connu de DH. Qu'on prenne XN pour repréſenter cette réſiſtance & qu'on la décompoſe en deux autres forces, XM, XO, l'une verticale, l'autre horiſontale. Soit prolongée NO juſqu'à ce qu'elle rencontre la verticale GC. Par le centre de FIG. 13.

gravité G du navire, soit menée GL perpendiculaire à de; & du point F, centre de gravité de la carene au premier instant, soient menées Ff, Fo perpendiculaires sur GC & sur GL.

On voit par la nature des forces dont le navire est agité qu'il aura, indépendamment du mouvement uniforme primitif, deux mouvements accélérés ou retardés, l'un horisontal, l'autre vertical; & qu'en même-temps, il oscillera sur son centre de gravité : mais il faut observer

1°. Que, comme on suppose l'impulsion du vent à peu près égale à la résistance horisontale XO, la vîtesse d'accélération qui naîtra de la différence de ces deux forces, doit être regardée comme infiniment petite par rapport à la vîtesse primitive & uniforme du navire.

2°. Que la résistance qui naît des différentes oscillations du navire est nulle, en comparaison de la résistance qui naît de la vîtesse uniforme.

3°. Que le fonds HT, dans le cas où il ne seroit pas parallèle au plan de flottaison, recevra cependant toujours la même impulsion de l'eau; car, en vertu de l'oscillation, il se présenteroit au choc de l'eau sous un angle infiniment petit; &, comme le quarré du sinus de cet angle entreroit (*art. v*) dans l'expession du choc provenant de l'oscillation, il s'ensuit que ce même choc doit être reputé nul. Pour abréger, nous supposerons HT parallèle à DE, auquel cas il ne reçoit aucune sorte de choc sensible.

Soient
- La droite CE. . . . . = a
- La droite CD. . . . . = b
- Le plan de flottaison. . . . . = cc
- La distance du centre de gravité de ce plan au point C. . . . . = k
- Ff. . . . . = f
- Gf. . . . . = h

Soient

GQ	$= r$
XQ	$= n$
GS	$= q$
DH	$= \lambda$
HV	$= \mu$
$DV = \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}$	$= \varpi$
Le ſecond côté du rectangle égal à la proue	$= \phi$
La vîteſſe uniforme du navire	$= u$
L'impulſion du vent	$= F$
La diſtance d'un point donné au point G	$= m$
L'eſpace parcouru verticalement par le centre de gravité	$= x$
L'eſpace parcouru horiſontalement par le même point, en vertu de la ſimple accélération	$= z$
L'eſpace parcouru circulairement autour de G à la diſtance m	$= y$
L'élément du temps	$= dt$
Le volume du navire	$= N$
La ſomme des produits des particules du navire, par les quarrés de leurs diſtances à un axe paſſant par le point G & perpendiculaire au plan $ADHTEB$	$= R$
L'onglet formé par la rotation de la partie du plan de flottaiſon repréſentée par CE au profil, autour d'un axe paſſant par le point C & perpendiculaire à DE	$= \mathfrak{C} a^2 y$
Le moment du même onglet par rapport à l'axe de rotation paſſant par le point G	$= \mathfrak{b} a^3 y$
L'onglet formé par la rotation de la partie du plan de flottaiſon repréſentée par CD au profil, autour de l'axe paſſant par le point C	$= \mathfrak{C}' b^2 y$
Le moment du même onglet par rapport à l'axe paſſant par le point G	$= \mathfrak{b}' b^3 y$
Le volume de la carène au premier inſtant	$= M$
La gravité	$= g$
La denſité de la charge	$= p$
La denſité de l'eau	$= \varpi$

Tout cela poſé, on aura évidemment $Du = \frac{by}{m}$, & les triangles HVD, Dud qu'on peut regarder

comme semblables, donneront $Dd = \frac{\lambda b y}{\mu m}$; donc $dH = \lambda - \frac{\lambda b y}{\mu m}$: par conséquent l'impulsion de l'eau contre la proue aura pour expression * $\varepsilon g \pi . \Phi \left(\lambda - \frac{\lambda b y}{\mu m} \right) \times u^2 \times \frac{\mu^2}{\lambda^2} = \frac{\varepsilon g \pi . \Phi (\mu m - b y) u^2 \mu}{m \lambda}$. D'où il suit que la force XO sera représentée par $\frac{\varepsilon g \pi . \Phi . (\mu m - b y) u^2 \mu}{m \lambda} \times \frac{\mu}{\lambda} = \frac{\varepsilon g \pi . \Phi (\mu m - b y) u^2 \mu^2}{m \lambda^2}$ & que la force XM sera représentée par $\frac{\varepsilon g \pi . \Phi (\mu m - b y) u^2 \mu \varpi}{m \lambda^2}$.

Si l'on retranche la force XO de l'impulsion F du vent, il nous viendra $F - \frac{\varepsilon g \pi . \Phi (\mu m - b y) u^2 \mu^2}{m \lambda^2}$ pour la force qui produit l'accélération horisontale du navire : par conséquent nous aurons cette première équation

$$(A) \quad \left(F - \frac{\varepsilon g \pi . \Phi (\mu m - b y) u^2 \mu^2}{m \lambda^2} \right) dt^2 = p N d d z .$$

Le navire sera soulevé suivant la verticale par une force égale à la somme faite de la poussée verticale de l'eau & de la force XM sur son propre poids, c'est-à-dire par une force exprimée par

$$g \pi \left[M - c c x + \mathfrak{C} a^2 y - \mathfrak{C}' b^2 y \right] + \frac{\varepsilon g \pi . \Phi (\mu m - b y) u^2 \mu \varpi}{m \lambda^2} - g p N ;$$

ainsi on aura l'équation

$$(B) \quad \left[g \pi \left(M - c c x + (\mathfrak{C} a^2 - \mathfrak{C}' b^2) y \right) + \frac{\varepsilon g \pi . \Phi (\mu m - b y) u^2 \mu \varpi}{m \lambda^2} - g p N \right] dt^2 = p N d d x .$$

Enfin il est évident que le navire sera sollicité à tourner sur son centre de gravité par un moment de force représenté par

$$g \pi \left[M \left(f - \frac{h y}{m} \right) + c c k x - (\theta a^3 + \theta' b^3) y \right] +$$

* *La lettre c, est un coëfficient qu'on déterminera suivant l'esprit de l'article VI.*

$$\frac{2g\pi.\, r\phi\,(\mu m - by)\,u^2\mu^2}{m\lambda^2} + \frac{2g\pi.\, n\varphi\,(\mu m - by)\,u^2\mu\varpi}{m\lambda^2} - F_1 s$$

par conſéquent, on aura cette troiſième équation,

$$(C)\quad \left[g\pi\left(M\left(f - \frac{hy}{m}\right) + cckx - (\theta a^3 + \theta' b^3)\,y\right) + \frac{2g\pi.\, r\phi\,(\mu m - by)\,u^2\mu^2 + 2g\pi.\, n\varphi\,(\mu m - by)\,u^2\mu\varpi}{m\lambda^2} - F_1\right] dt^2 = \frac{pRddy}{m}.$$

Ces équations donneront en général tous les mouvements du navire.

LXX.

Lorſque la quantité F ſera donnée en fonctions du temps & de l'eſpace parcouru, on mettra cette valeur dans les équations précédentes : enſuite on les intègrera ſoit exactement, ſoit par approximation. Je crois qu'on ne doit guères ſe flatter de pouvoir établir, au ſujet de la valeur de F, une hypothèſe qui ſoit conforme à la nature. C'eſt pourquoi, ſatisfait d'avoir indiqué la route qu'il faudroit tenir alors, j'abandonnerai ici la méthode générale, & je me bornerai à l'examen d'un cas particulier, dont la pratique retirera beaucoup de lumières.

LXXI.

Suppoſons que le navire ſe meuve d'un mouvement parfaitement uniforme, & de plus que le centre de gravité ne monte ni ne deſcende ; les équations (A) & (B), qui repréſentent les accélérations horiſontale & verticale, ſeront nulles ; & il ne reſtera que l'équation (C), qui repréſente les oſcillations circulaires autour du centre de gravité.

Or puiſque l'accélération horiſontale eſt nulle, il eſt clair que l'impulſion du vent eſt égale à la réſiſtance horiſontale de l'eau ; c'eſt-à-dire que $F = \frac{2g\pi.\, \varphi\,(\mu m - by)\,u^2\mu^2}{m\lambda^2}$.

mettons cette valeur de F dans l'équation (C), & nous aurons, après avoir effacé le terme $cckx$,

$$\left[g\tau \left(M\left(1 - \frac{hv}{m} \right) - (\beta a^3 + \beta' b^3)\, y \right) + \frac{\varepsilon g\pi.\ r\phi\,(\mu m - by)\, u^2\mu^2}{m\lambda^2} + \frac{\varepsilon g\pi.\ n\phi\,(\mu m - by)\, u^2\mu\varpi}{m\lambda^2} - \frac{\varepsilon g\pi.\ q\phi\,(\mu m - by)\, u^2\mu^2}{m\lambda^2} \right] dt^2 = \frac{pR\,dd\,y}{m}.$$

Cette équation donne

$$y = \left[\frac{Mfm\lambda^2 + \varepsilon r\phi m u^2\mu^3 + \varepsilon n\phi m u^2\mu^2\varpi - \varepsilon q\phi m u^2\mu^3}{Mh\lambda^2 + m\lambda^2\beta a^3 + m\lambda^2\beta' b^3 + \varepsilon r\phi bu^2\mu^2 + \varepsilon n\phi bu^2\mu\varpi - \varepsilon q\phi bu^2\mu^2} \right] \times \left(1 - \cos.\omega \sqrt{\frac{g\tau}{\lambda^2 pR} \times \left(Mh\lambda^2 + m\lambda^2\beta a^3 + m\lambda^2\beta' b^3 + \varepsilon r\phi bu^2\mu^2 + \varepsilon n\phi bu^2\mu\varpi - \varepsilon q\phi bu^2\mu^2 \right)} \right),$$

formule, par le moyen de laquelle on déterminera l'amplitude des balancements du navire. Elle fait voir que, les lignes d'eau & la hauteur de la mâture reſtant toujours les mêmes, tout le changement qu'il faudra faire à l'arrimage pour diminuer l'amplitude des oſcillations, conſiſtera à faire deſcendre de plus en plus le centre de gravité du navire. On voit encore que ſi, tout reſtant d'ailleurs abſolument le même, l'on fait quelque renflement à la carêne par des *bordages* du coté de la poupe, de manière qu'on puiſſe faire reculer le centre de gravité vers cette même poupe, on diminuera encore l'amplitude des oſcillations, &c.

LXXII.

Soit l la longueur du pendule ſynchrone : on trouvera

$$l = \frac{\frac{P}{\pi}\,\lambda^2 R}{Mh\lambda^2 + m\lambda^2\beta a^3 + m\lambda^2\beta' b^3 + \varepsilon r\phi bu^2\mu^2 + \varepsilon n\phi bu^2\mu\varpi - \varepsilon q\phi bu^2\mu^2},$$

formule, par le moyen de laquelle on modèrera la vivacité des oſcillations du navire. Elle fait voir que,

tout reſtant d'ailleurs le même, la viteſſe des oſcillations ne pourra diminuer que par l'augmentation de R, ou que par la diminution de h & de b, &c.

Je paſſe rapidement ſur ces détails, qui ne peuvent avoir aucune difficulté, après tout ce qui a été déjà dit.

CHAPITRE QUATRIÉME.

Des changements qu'on peut faire en mer à l'arrimage, pour procurer plus de viteſſe au navire.

LXXIII.

Nous avons déjà remarqué que, lorſqu'on mettoit un navire à la voile, ſa viteſſe s'accéléroit très-rapidement durant les premiers inſtants, & qu'elle parvenoit bientôt à l'état d'uniformité. L'expérience & la théorie apprennent que cet effet s'opère en moins de temps qu'il n'en faut d'ordinaire pour defreler & orienter les voiles *. Ainſi, lorſqu'on propoſe d'augmenter la rapidité de la viteſſe par le moyen de l'arrimage, il ne peut être queſtion que de la viteſſe permanente & uniforme.

* Voyez les Mém. de l'Acad., an. 1745, page 309.

LXXIV.

Or, pour déterminer comment l'arrimage peut contribuer à augmenter la viteſſe uniforme, il faut d'abord connoître les éléments qui entrent dans l'expreſſion de cette viteſſe. Ainſi je commencerai par réſoudre le problême ſuivant. Je ne conſidère que le ſimple mouvement progreſſif; & je fais abſtraction de tout balancement autour du centre de gravité, parce qu'on eſt ſuppoſé avoir pris toutes les précautions pour faire porter parfaitement la voile au navire.

LXXV.

PROBLEME.

FIG. 11. *Le navire D E δ cinglant ſuivant la route donnée L S, trouver l'expreſſion de ſa viteſſe.*

SOLUTION.

Soit $LY\gamma$ la direction de la réſiſtance horiſontale de l'eau. Les voiles, qui ne reçoivent l'impulſion du vent que dans le ſens perpendiculaire, doivent avoir une poſition $e f$ perpendiculaire à $LY\gamma$. Soit VL la direction du vent, laquelle fait avec $e f$ un angle donné VLf & avec la direction de la route un angle auſſi donné VLS ou VLt.

Soient

L'étendue des voiles.	=	aa
La ſurface plane qui, expoſée au choc perpendiculaire de l'eau éprouveroit la même réſiſtance que le navire.	=	bb
Le ſinus total.	=	1
Le ſinus de l'angle VLf.	=	n
Le coſinus de l'angle VLt.	=	q
La viteſſe abſolue du vent.	=	V
Celle du navire.	=	u
La denſité du vent.	=	δ
La denſité de l'eau.	=	π

Il eſt clair que la viteſſe du navire, ſuivant la direction du vent, ſera exprimée par qu; ainſi l'impulſion perpendiculaire du vent ſur ef ſera proportionnelle (*art. v.*) à $\delta aann\,(V - qu)^2$, tandis que la réſiſtance de l'eau ſera proportionnelle à $\pi b^2 u^2$. Or, puiſque le navire marche uniformément, la réſiſtance de l'eau doit être égale à l'impulſion du vent : par conſéquent, on aura l'équation

$$\pi b^2 u^2 = \delta a^2 n^2 . (V - qu)^2 .$$

d'où l'on tire $u = \frac{anV\sqrt{\delta}}{b\sqrt{\pi} + anq\sqrt{\delta}}$.

LXXVI.

On voit par cette formule qu'en ſuppoſant toujours le navire *donné*, on ne peut augmenter la rapidité du ſillage, ou qu'en augmentant l'étendue des voiles pour recevoir plus de vent, ou qu'en diminuant la réſiſtance du fluide, ou qu'enfin, en augmentant l'étendue des voiles & diminuant la réſiſtance du fluide tout-à-la-fois, s'il eſt poſſible.

LXXVII.

Le premier moyen pourra quelquefois être mis en uſage, lorſque les lignes d'eau ſeront bonnes & qu'on voudra par conſéquent les conſerver. Il y a toujours dans le navire des voiles de réſerve pour s'en ſervir dans le beſoin. C'eſt au navigateur prudent & expérimenté à examiner avec ſoin la quantité qu'en peut porter le navire ſans danger. Or ſi l'on augmente en effet l'étendue des voiles, il eſt certain que, comme leur nouveau centre d'impulſion ne pourra guère être le même qu'auparavant, il faudra néceſſairement faire quelques changements à l'arrimage, relativement à cette nouvelle diſpoſition de voiles. Les changements dont il s'agit doivent toujours être ſubordonnés aux loix de l'équilibre entre la peſanteur du navire, la pouſſée verticale de l'eau, l'impulſion du vent ſur les voiles & la réſiſtance de l'eau : ainſi ils ſe feront d'une manière certaine par les principes établis dans tout le cours de ce Mémoire.

LXXVIII.

Mais, ſi les lignes d'eau étoient défectueuſes, en ſorte que le navire éprouvât une trop grande réſiſ-

tance de la part de l'eau, ſans compter les autres inconvénients dont il n'eſt pas ici queſtion, il faudroit tâcher de trouver d'autres lignes, en tranſportant convenablement différents poids. De ce nouvel avantage, il pourroit encore réſulter que le navire fût capable de porter plus de voiles. Souvent on eſt parvenu ainſi à rendre très-bons voiliers des vaiſſeaux qui manquoient de cette qualité.

LXXIX.

Scholie. Du reſte, ſi le vaiſſeau navigeoit abſolument mal, il ne faut pas s'attendre qu'on pût corriger tous ſes défauts par l'arrimage : cette reſſource n'eſt efficace que juſqu'à un certain point. La rapidité du ſillage dépend principalement de la figure de la carène & de l'angle de la derive. Mais ce n'eſt pas ici le lieu de diſcuter ces articles.

CHAPITRE CINQUIÉME.

Des changements qu'on peut faire en mer à l'arrimage, pour rendre le navire plus ou moins ſenſible au gouvernail.

LXXX.

Tout le monde connoit la manœuvre du gouvernail. On ſçait que cette pièce eſt attachée à la poupe du vaiſſeau par des gonds ſur leſquels elle tourne par le moyen d'une barre ou *timon*, & que, préſentée au choc de l'eau, elle oblige le navire à tourner.

LXXXI.

Comme le plan horiſontal, qui paſſe par le centre d'impreſſion du gouvernail & dans lequel ſe trouve la direction du choc de l'eau, ne diviſe pas le navire en

en parties égales & ſymmétriques, il eſt certain (*art. VIII*) que le gouvernail imprimera au navire différents mouvements autour de ſon centre de gravité. Mais, de tous ces mouvements, il n'y en a que deux qui ſoient ſenſibles; le premier, par lequel la rapidité du ſillage eſt retardée, le ſecond, par lequel le navire tourne perpendiculairement à ſa longueur. Quant aux autres, ils doivent être négligés. Ce n'eſt pas qu'on ne pût les faire entrer auſſi dans le calcul; mais ils le compliqueroient à un point qu'il ſeroit peut-être impoſſible d'en tirer des réſultats ſatisfaiſans pour la pratique. Il n'arrive que trop ſouvent que de légères circonſtances rendent une formule intraitable, ſoit que la nature emploie dans ſes opérations les plus ſimples un méchaniſme fort compoſé, ſoit que nous ne poſſédions pas aſſez l'art de lire dans les ſymboles de l'analyſe.

LXXXII.

Suppoſons donc que AB repréſente la quille du vaiſſeau, GC la verticale élevée par ſon centre de gravité, BD le gouvernail, H le centre d'impreſſion de ce gouvernail. Soit priſe HN perpendiculaire à BD pour repréſenter le choc de l'eau; & ſoit décompoſée cette force en deux autres HO, HP, l'une perpendiculaire, l'autre parallèle à la quille. Il eſt clair que la force HP retardera dans le ſens de la quille la rapidité du ſillage, & qu'en même temps, elle tendra à faire tourner le navire ſur ſon centre de gravité : mais, comme elle agit à l'extrémité d'un très-petit bras de levier, ce dernier mouvement ne ſera pas ſenſible. A l'égard de la force HO, elle imprimera au centre de gravité un mouvement de tranſlation perpendiculaire à la quille; & de plus elle fera tourner le navire ſur ce même centre. Ainſi, en vertu de cette dernière force ſeulement, le centre de gra- FIG. 14.

vité parcourra, par exemple, $G\,g$ perpendiculaire à $A\,B$; & la quille prendra une nouvelle poſition $a'\,b'$, faiſant avec la première $A\,B$ ou $a\,b$ l'angle $b'\,g\,b$. Je néglige dans tout ceci le mouvement de charnière du gouvernail, parce que les matelots appliqués à ſa barre rendent ce mouvement comme nul par leur réaction contre l'effort de l'eau.

LXXXIII.

Il ne s'agit pas ici d'examiner comment le choc de l'eau ſe tranſmet au navire, ni de trouver l'angle le plus avantageux, ſous lequel le gouvernail doit être frappé, &c. Il ne s'agit pas même de l'action du gouvernail, en tant qu'elle retarde la rapidité du ſillage. En ſe bornant exactement à l'objet preſcrit par l'Académie, il eſt queſtion de déterminer la diſpoſition de la charge qui favoriſe le plus ou le moins le mouvement de rotation que le gouvernail tend à imprimer au navire.

Pour plus de ſimplicité, je regarderai la force qui tend à faire tourner le navire comme appliquée au point b' perpendiculairement à la quille. Cette force eſt ſuppoſée connue : elle ne peut pas différer beaucoup de la force $H\,O$; car le gouvernail étant fort court en comparaiſon du vaiſſeau, la partie $B\,Q$ eſt fort petite.

LXXXIV.

PROBLEME I.

Déterminer l'arrimage qui rendra l'angle de rotation $b'\,g\,b$ le plus grand ou le plus petit qu'il eſt poſſible en un temps donné.

SOLUTION.

Soient { La force qui tend à faire tourner le navire. . . . = F
{ Son bras de levier $G\,B$. . . . . = a

Soient
- La distance connue d'un point donné Z à l'axe de rotation GC. . . . . $= 1$
- L'angle de rotation $= u$. . . . . $= u$
- La somme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs distances à l'axe de rotation. . . . . $= R$

on aura (*art. x*) $F \times a = \frac{R \times u}{1}$; donc $u = \frac{F \times a}{R}$.

D'où l'on voit que si, outre la force F, qui est toujours constante, on suppose aussi a constante, c'est-à-dire que le centre de gravité du navire reste toujours au même point, ou du moins dans la même verticale; l'angle u ne peut augmenter ou diminuer que par la diminution, ou que par l'augmentation du dénominateur R. Or, l'on diminuera R, en rapprochant le plus qu'il est possible de l'axe GC les poids les plus pesants de la charge; & au contraire, on augmentera R, en éloignant les poids les plus pesants du même axe.

Tels sont, en général, les changements qu'on peut faire à l'arrimage, pour favoriser le plus ou le moins qu'il est possible le mouvement de rotation du navire, sans faire changer de place à la verticale qui passe par son centre de gravité.

LXXXV.

Il est clair que, dans deux navires semblables & semblablement chargés, les quantités R sont entre elles comme les cinquièmes puissances des dimensions homologues. Il n'est pas moins clair que les forces F sont comme les quarrés, & leurs moments comme les cubes des côtés homologues: d'où il suit que les angles de rotation sont réciproquement proportionnels aux quarrés des côtés homologues.

LXXXVI.

PROBLEME II.

FIG. 15. *Déterminer l'endroit K où l'on doit placer un nouveau poids qu'on veut ajouter à la charge, pour rendre l'angle de rotation le plus grand ou le plus petit qu'il eſt poſſible.*

SOLUTION.

Soient GC l'axe vertical paſſant par le centre de gravité du navire avant l'addition du nouveau poids, kr l'axe vertical paſſant par le centre de gravité k du navire, après l'addition du nouveau poids, kx l'eſpace parcouru perpendiculairement à la quille par le centre k. Si, par le point x, on mène ab parallèle AB, & que le gouvernail ſoit ſuppoſé prendre la poſition $a'b'$, l'angle de rotation ſera bxb'; & c'eſt cet angle qu'il s'agit de rendre un *maximum* ou un *minimum*.

Soient

La force qui tend à faire tourner le navire. . .	=	F
GB.	=	a
L'angle de rotation pour le rayon 1.	=	u
La ſomme des produits des particules du navire, avant l'addition du nouveau poids, par les quarrés de leurs diſtances à l'axe GC. . . .	=	R
La ſomme des produits des particules du navire, après l'addition du nouveau poids, par les quarrés de leurs diſtances à l'axe kr.	=	Z
La charge du navire avant l'addition du nouveau poids.	=	N
Le nouveau poids.	=	n
GK.	=	x

on aura, par la propriété du centre de gravité, $Gk = \frac{nx}{N+n}$, & par conſéquent $Bk = a + \frac{nx}{N+n}$. De plus on aura (*art.* XI), $R + nxx = Z +$

$(N+n) \times \frac{n n x x}{(N+n^2)}$ *, ou bien $Z R + \frac{N n}{N+n} \cdot x x$.

Mais on a toujours (*art.* x) $F \times \left(a + \frac{n x}{N+n}\right) = Z \times u$ $= \left(R + \frac{N n}{N+n} \cdot x x\right) \times u$; donc

$$a = \frac{F \cdot \left(a + \frac{n x}{N+n}\right)}{R + \frac{N n}{N+n} \cdot x x} = \textit{maximum}$$ ou *minimum*.

Par conſéquent $\frac{n dx}{N+n} \left(R + \frac{N n}{N+n} \cdot x x\right) -$ $\left(a + \frac{n x}{N+n}\right) \times \frac{2 N n}{N+n} \cdot x dx = 0$; d'où l'on tire

$$x = -\frac{a \cdot (N+n)}{n} \pm (N+n) \sqrt{\frac{a^2}{n^2} + \frac{R}{Nn \cdot (N+n)}}.$$

Cette valeur de a répond toujours à un *maximum* : ainſi, dans la ſuppoſition qu'on ajoute un poids, l'angle de rotation ſera augmenté.

Mais ſi, au lieu d'ajouter, on retranchoit le poids n, ce qui eſt la même choſe que rendre n négatif dans la valeur générale de u, alors cette valeur, qui ſeroit

$$\frac{F \left(a - \frac{n x}{N+n}\right)}{R - \frac{N n}{N+n} \cdot x x}$$ donneroit un *minimum*; & pour déterminer l'endroit d'où il faudroit ôter le poids n,

* Le poids n, eſt ſuppoſé aſſez petit pour qu'on puiſſe regarder toute ſa maſſe comme réunie en un ſeul & même point. Mais, ſi cette ſuppoſition étoit trop libre, on commenceroit par chercher la ſomme des produits des particules de ce corps par les quarrés de leurs diſtances à l'axe $G C$, en regardant la poſition de ce corps comme donnée : enſuite la ſolution du problême s'achéveroit, comme dans le premier cas.

on auroit l'équation

$$x = \frac{a.(N-n)}{n} \pm (N-n).\sqrt{\frac{a^2}{n^2} - \frac{R}{Nn.(N+n)}}.$$

LXXXVII.

Lorſque le poids n ſera fort petit, on pourra prendre, ſans erreur ſenſible, pour déterminer le *maximum*,

$$x = -\frac{a.(N+n)}{n} \pm \frac{(N+n)}{n}\,a \pm \frac{R}{2Na},$$

& pour déterminer le *minimum*,

$$x = \frac{a(N-n)}{n} \pm \frac{(N-n)\,a}{n} \mp \frac{R}{2Na}.$$

Ces formules ſont fort ſimples & d'un uſage très-commode. Il eſt vrai qu'elles renferment la quantité R, dont la détermination exige quelques calculs; mais ils peuvent s'abréger très-conſidérablement par divers moyens, comme on peut le voir dans le *Traité de la manœuvre des vaiſſeaux* de M. Bouguer, *pages 338. 339. & ſuiv.*

LXXXVIII.

Puiſque nous connoiſſons l'endroit où il faudroit mettre, ou dont il faudroit ôter un certain poids, pour favoriſer ou pour contredire le mouvement de rotation du vaiſſeau, il eſt clair que nous ſommes en état de faire la tranſpoſition de poids qui convient, pour régler à volonté le mouvement de rotation dont il s'agit; car nous ſçavons l'endroit ou il faut prendre les poids & l'endroit où il faut les placer.

LXXXIX.

Dans les deux articles précédents, les poids que nous avons tranſportés ont été pris ſur la quille, ou plutôt dans le plan verticale qui paſſe par la quille :

mais, comme on peut être forcé de prendre ces poids dans les flancs du navire, nous allons encore chercher la position de la droite MKM' perpendiculaire à la quille, de manière que, plaçant aux points M, & M' à une même distance donnée de la quille deux poids égaux, l'angle de rotation du navire soit un *max.* ou un *minim.* Ce problême renferme le précédent comme un cas particulier.

Soient G le centre de gravité du navire avant l'addition des deux nouveaux poids, k le centre de gravité, après l'addition.

Suppositions

La force qui tend à faire tourner le navire. . .	=	F
GB.	=	a
L'angle de rotation pour le rayon 1.	=	u
La charge du navire avant l'addition des deux nouveaux poids.	=	N
Chacun de ces deux nouveaux poids.	=	n
La somme des produits des particules de N par les quarrés de leurs distances à l'axe GC. . .	=	R
La somme des produits des particules de $N+2n$, par les quarrés de leurs distances à l'axe kr. .	=	Z
KM ou KM'.	=	b
GK.	=	x

on aura $Gk = \frac{2nx}{N+2n}$; $Bk = a + \frac{2nx}{N+2n}$; $\overline{GM}^2 = bb + xx$, & suivant l'article XI, $R + 2n.(bb+xx) = Z + (N+2n)\frac{4nnxx}{(N+2n)^2}$ ou bien

$$Z = R + \frac{2Nn.(bb+xx)+4bbnn}{N+2n};$$

donc $u = \dfrac{F.\left(a + \frac{2nx}{N+2n}\right)}{R + \frac{2Nn.(bb+xx)+4bbnn}{N+2n}} = maxi-$

mum ; ce qui donne

$$x = -\frac{a(N+2n)}{2n} \pm (N+2n)\sqrt{\frac{a^2}{4n^2} + \frac{R}{2Nn.(N+2n)} + \frac{bb}{2N.(N+2n)}}.$$

On aura l'équation du *minimum*, en faiſant n négatif dans l'équation précédente.

XC.

Lorſqu'on ne voudra pas augmenter ou diminuer l'angle de rotation du navire, & que, cependant, on aura beſoin de tranſpoſer quelques poids pour remplir quelque objet particulier, comme, par exemple, pour faire mieux porter la voile au navire, cette tranſpoſition pourra ſe faire à l'aide du problême ſuivant, ſans que l'angle de rotation du navire ſouffre aucun changement.

XCI.

PROBLEME III.

FIG. 16. *Trouver une courbe MKM' telle que, plaçant ſur ſa circonférence des poids égaux, l'angle de rotation du navire demeure toujours le même.*

SOLUTION.

Il eſt viſible que la coupe dont il s'agit doit être diviſée en deux parties égales & ſemblables par la quille AB ; & qu'en la formant, il faudra à chaque opération placer de part & d'autre de la quille deux poids égaux dans les deux points qui ſe correſpondent.

Soit pris le point K pour l'origine de la courbe, & ſoient KP, PM les coordonnées pour le point M ou M'. Soient G le centre de gravité du navire avant l'addition des deux nouveaux poids aux points ſymmétriques M & M' ; k le centre de gravité de tout le

le ſyſtème, après l'addition de ces deux nouveaux poids; $b \times b'$, l'angle de rotation.

Suppoſons

La force qui tend à faire tourner le navire. . . . =	F
GB. . . . . =	a
GK. . . . . =	c
La charge du navire avant l'addition des deux nouveaux poids. . . . . =	N
Chacun de ces deux nouveaux poids. . . . . =	n
La ſomme des produits des particules de N par les quarrés de leurs diſtances à l'axe GC. . . =	R
La ſomme des produits des particules de $N+2n$ par les quarrés de leurs diſtances à l'axe kr. . . =	Z
L'angle de rotation pour le rayon 1. . . . . =	u
KP. . . . . =	x
PM. . . . . =	y

on aura $Gk = \frac{2n.(c-x)}{N+2n}$, $Bk = a + \frac{2n.(c-x)}{N+2n}$;

$\overline{GM}^2 = yy + (c-x)^2$; $R + 2n.(yy + (c-x)^2)$

$= Z + (N+2n).\frac{4nn.(c-x)^2}{(N+2n)^2}$ ou bien $Z = R$

$+ \frac{2Nn.(yy+(c-x)^2)+4nnyy}{N+2n}$. Donc

$$F\left(a + \frac{2n.(c-x)}{N+2n}\right) = \left(R + \frac{2Nn.(yy+(c-x)^2)+4nnyy}{N+2n}\right) \times u;$$

ou bien $$u = \frac{F\left(a + \frac{2n.(c-x)}{N+2n}\right)}{R + \frac{2Nn.(yy+(c-x)^2)+4nnyy}{N+2n}};$$

égalant cette valeur de u à une conſtante, & obſervant qu'à l'origine de la courbe cette conſtante

$$= \frac{F \times \left(a + \frac{2nc}{N+2n}\right)}{R + \frac{2Nncc}{N+2n}}, \text{ on aura}$$

$$\frac{a+\frac{2nc}{N+2n}}{R+\frac{2Nnc^2}{N+2n}}=\frac{a+\frac{2n.(c-x)}{N+2n}}{R+\frac{2Nn.(c-x)^2+(2Nn+4nn)y^2}{N+2n}}$$

ou bien

$$\frac{N+2n}{N}\cdot yy=\left(\frac{2aN^2c+4aNnc+2Nnc^2-RN-2nR}{N.(aN+2an+2nc)}\right)x-xx$$

équation à une ellipſe, dont l'axe des x eſt $\frac{2(2aN^2c+4aNnc+2Nnc^2-RN-2nR)}{N.(aN+2an+2nc)}$ & celui des y eſt $\frac{2.(2aN^2c+4aNnc+2Nnc^2-RN-2nR)}{N.(aN+2an+2nc)}\times\sqrt{\frac{N}{N+2n}}$.

Cette ellipſe ne diffère pas beaucoup d'un cercle, par ce que le poids n eſt fort petit par rapport à N.

XCII.

Le problême que nous venons de réſoudre ne ſe borne pas à l'uſage indiqué dans l'article XC : il eſt facile d'en conclure auſſi que tous les poids qu'on mettra au-dedans de l'ellipſe, favoriſeront le mouvement de rotation, & que ceux qu'on mettra au dehors lui nuiront. Si, au lieu d'ajouter de nouveaux poids, on en retranchoit, ceux qu'on prendroit au-dedans de l'ellipſe, nuiroient au mouvement de rotation ; & ceux qu'on prendroit au dehors, lui ſeroient favorables.

XCIII.

Scholie I. Les deux problêmes des articles LXXXVI & XCI, ont déjà été réſolus par M. Bouguer. Voyez ſon *Traité de la manœuvre des vaiſſeaux, pages 351 & 356.* Mais mon ſujet les amenoit ſi naturellement, que j'avois trouvé mes ſolutions longtemps avant que d'avoir lu l'ouvrage cité.

Si on refuſe de m'en croire, on pourra du moins ſe convaincre que je n'ai abſolument rien emprunté de M. Bouguer. J'oſe ajouter que ma méthode eſt beaucoup plus ſimple, plus claire & plus directe que la ſienne.

XCIV.

Scholie. II. Je ne diſſimulerai pas ici une remarque que fait M. Bouguer dans le même ouvrage. Il prétend que, pour mieux gouverner, il faut rapprocher les poids de la poupe, parce qu'à meſure qu'on charge la poupe, le gouvernail s'enfonce plus avant dans l'eau & reçoit par conſéquent un plus grand choc, qui compenſe abondamment le défaut de cet arrimage, relativement au même objet. Mais, en admettant même toutes les hypothèſes ſur leſquelles l'auteur établit ſon calcul, je crois qu'il n'a propoſé ce moyen que pour certains cas preſſans, où tous les autres avantages de la navigation doivent être ſacrifiés à la néceſſité de bien gouverner; car il eſt certain en général que ſi le navire porte bien la voile, qu'il ait une belle batterie, &c, il faut conſerver cette aſſiette autant qu'il eſt poſſible; &, par conſéquent, altérer le moins qu'il eſt poſſible le premier arrimage. Or, l'altération la moins ſenſible qu'on puiſſe faire à l'arrimage, pour augmenter ou pour diminuer la facilité de gouverner, eſt évidemment celle qui réſulte de la théorie que nous venons d'établir. Lorſqu'on ſurcharge l'arrière, la rapidité du ſillage eſt rallentie par la ſurface que la quille préſente au choc de l'eau, les mouvements de roulis & de tangage ſont plus vifs : il peut même ſe faire que le centre d'impreſſion du gouvernail ne ſe trouve plus alors aſſez ſenſiblement dans le même plan horiſontal que le centre de gravité du navire; ce qui occaſionnera de nouveaux mouvements qui, en ſe combinant

avec les premiers, ne manqueront pas de tourmenter l'équipage & la mâture. Ces inconvénients, qui réſultent du trop grand enfoncement de la poupe, ont tellement frappé pluſieurs conſtructeurs habiles *, qu'ils diminuent conſidérablement & réduiſent preſque à rien la différence du tirant d'eau de l'avant & de l'arrière ; différence qu'on portoit autrefois aſſez loin. Pluſieurs vaiſſeaux, tels que le Northumberland, l'Auguſte, l'Aloſe, la Badine, &c., ont très-bien navigé avec de légères différences de tirant d'eau. Je n'inſiſterai pas d'avantage ſur ce ſujet. C'eſt au navigateur ſage & expérimenté à prendre le meilleur parti, ſuivant l'occaſion.

* Voyez l'archi. nav. de M. Duhamel, 2e. ed., p. 104, & ſuiv.

FIN.

Fig. 1.

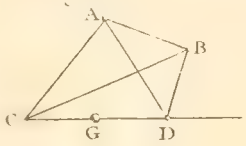


Fig. 2.

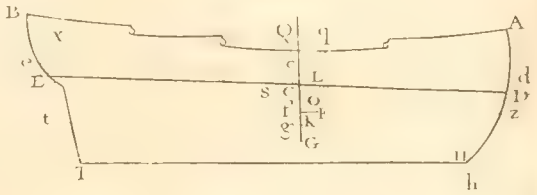


Fig. 3.

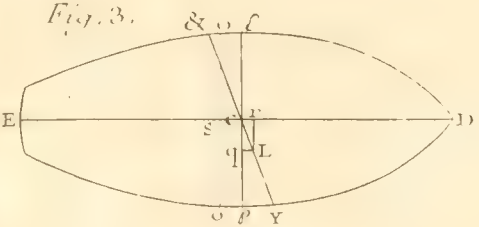


Fig. 4.

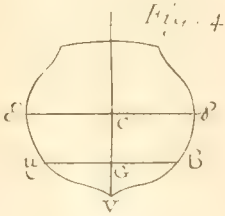


Fig. 5.

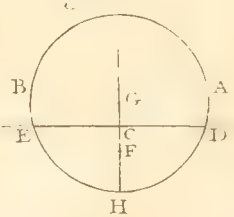


Fig. 6.

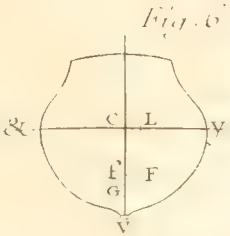


Fig. 7.

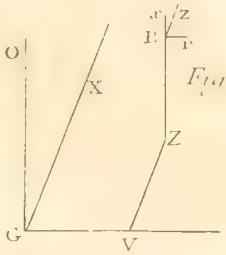


Fig. 8.

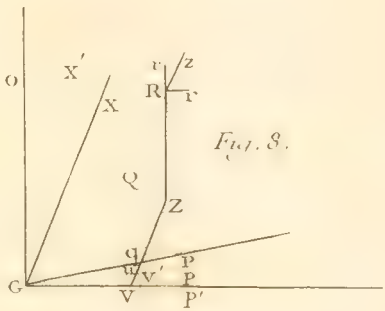


Fig. 9.

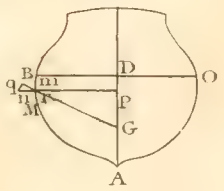


Fig. 10

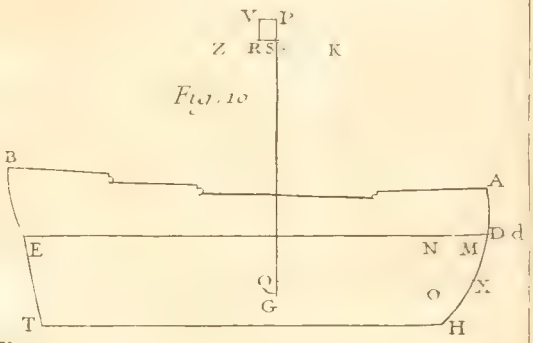


Fig. 11.

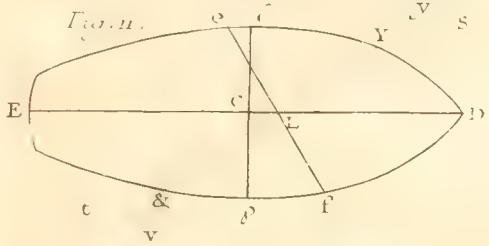


Fig. 12

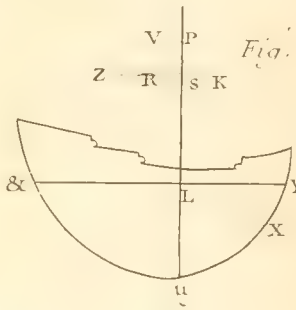


Fig. 13.

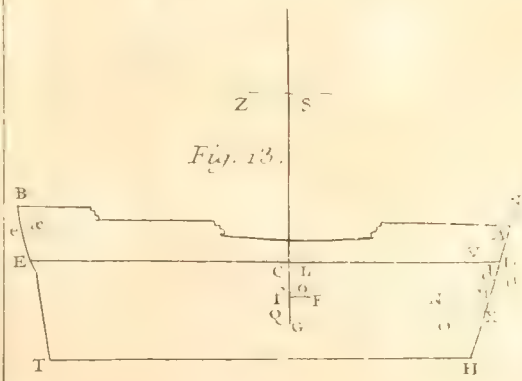


Fig. 14.

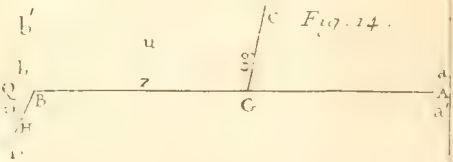


Fig. 15.

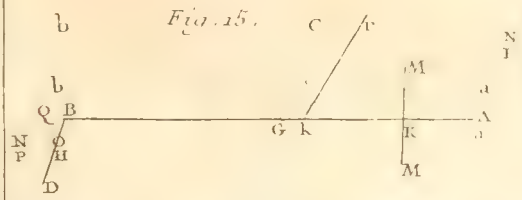
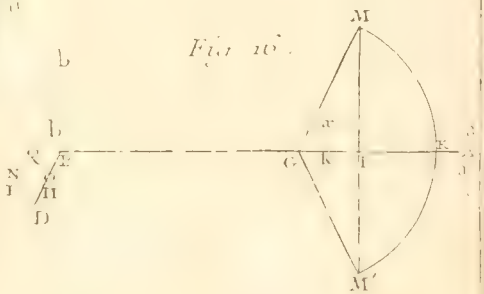


Fig. 16.



Delahrt sculp.

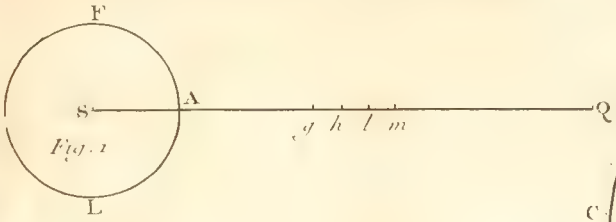


Fig. 1

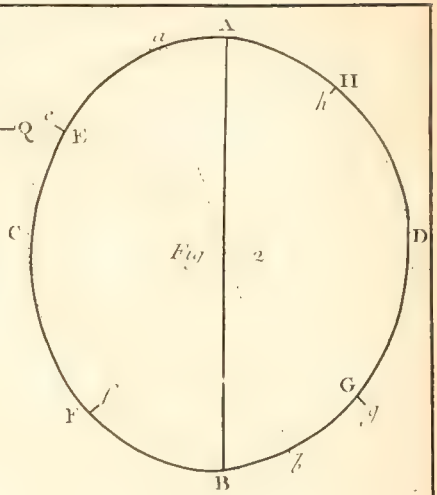


Fig 2

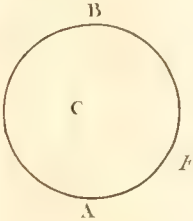
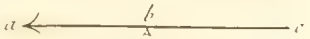


Fig 3.



d

L F

E

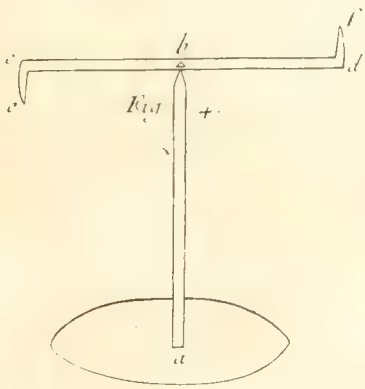


Fig 4

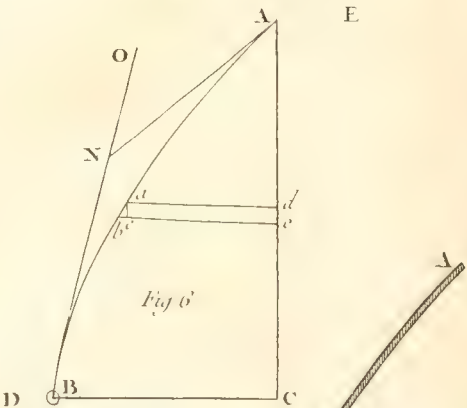


Fig 6

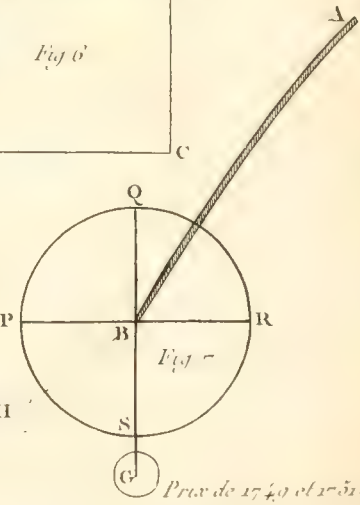


Fig 7

H G

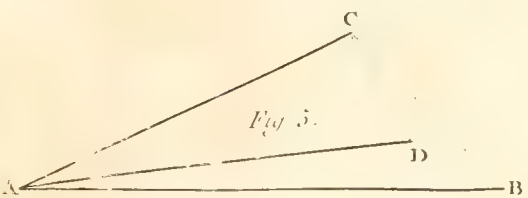


Fig 5.

Prix de 17 sols et 17 sols.

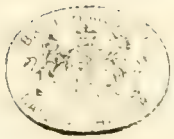


Fig 1

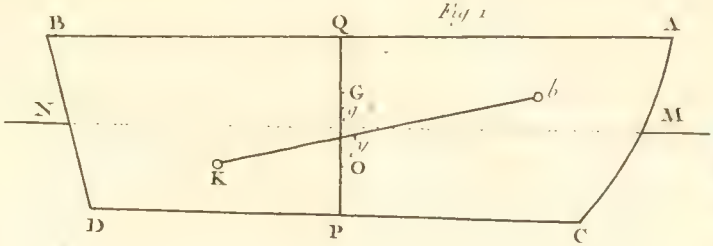
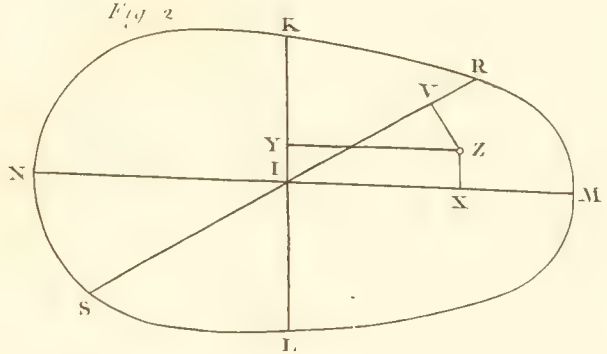


Fig 2



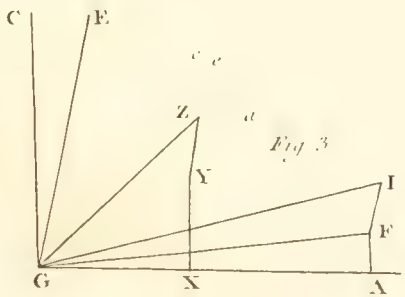


Fig 3

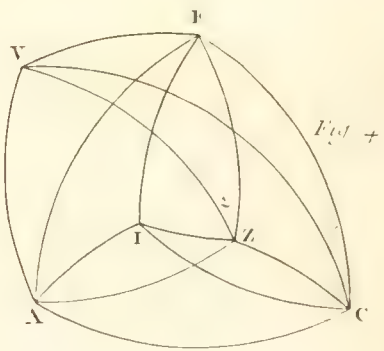
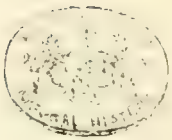


Fig 4

Prix de 1-02